目　录

第二章 非线性保守系统

第三章 非保守系统

第四章 一阶动力学系统

第五章 二阶动力学系统

目　录

第六章　二阶微分方程定性理论基础

第七章　具有相柱面的系统

第八章　点变换法和分段线性系统

第九章　似谐振子非线性系统

第十章 不连续振动

绪　　论

在对任一真实物理系统作任何理论研究时，我们总是不得不对此系统的性质,作一定程度的简化、理想化．对系统进行某种理想化总是不可避免的;为了建立所研究的物理系统的数学模型(即列出描述此物理系统之性状的某一方程组),应该考虑这样的一些基本的、决定性的因素,它们决定着那些目前我们最关心的系统性状的特点,而绝不应该力求精确地、毫无遗漏地考虑系统的所有性质．后面这一点,一般说来是办不到的;但是，即便我们能够考虑到大部分的这种性质,那末问题将变得那样的复杂,以致要求解它成为十分困难,甚至是完全不可能的．

既然对问题的理想化总是不可避免的，首先就会出现这样的问题,沿此方向应该作到什么地步,对系统的性质可以理想化到什么程度,仍然能获得满意的结果．归根到底,只有实验才能回答这一问题．只有将我们对某一问题进行的理想化的研究得到的结果,和实验结果进行对比,我们才能判断某种理想化是否合理．

当然,只有在对理想化的对象(数学模型)进行的理论探讨是完全严格的情况下,这个结论才是正确的[1]．只有在这一种情况中，才能认为理论与试验的差异确凿地证明了原来理想化不够充分,并且为了解释观察到的现象,必须考虑系统的某些新性质．

还应注意,是否允许作某种理想化,不仅可以从理论研究的结果与试验数据的比较中得知，而且也可以通过比较两个不同理论之结果来判断,其中一个理论是采用这种理想化而建立的,而另一个理论却没有作这种理想化．既然第一个理论是忽略了某些情况

1) 应注意“严格的理论”这一术语决不是指理论应该给出所提问题的精确定量结果．严格的理论可以只给出近似的定量结果(例如，可以用不等式来估计振动过程的振幅),也可以只给出定性的论断(例如,关于周期运动的存在性)．

而建立的，而第二个理论恰好考虑了这些情况，那末，比较这两个理论的结果就可以直接知道，这些情况对于解决某种问题起了怎样的作用．逐渐地我们积累了经验，发展了这方面的直观能力，并学会越来越精确地"猜测"对解决这类问题，那些情况是重要的，那些是无足轻重的．如果用某一方法我们证实了，在解决给定问题时，某一情况只起次要的作用，以后当我们把所得的结果推广到其他类似问题上去时，一开始就可以忽略这些情况，然后再用试验来检查这种忽略是否合理．

在研究某一课题时，允许的理想化的性质决定于整个课题，所以它不仅依赖于所研究之系统的性质，还与研究此课题时希望得到哪些问题的解答有关．

例如，研究仅含有一个钢球的系统，此钢球铅垂地落到水平钢板上．如果我们对作为一个整体的钢球的运动感兴趣的话，那末，一般来说，我们在作理论研究时，可以认为钢球是一个在重力作用下运动的质点，而且在到达钢板时，其速度突然地改变符号，这样做不会引起很大的误差．如果我们关心的是碰撞时钢球中所产生的弹性应力，自然就不能再把钢球作为质点来研究；必须把钢球理想化为弹性体，它具有表征钢的性质的某些常数，并且要考虑变形的性质，以及碰撞时间等等．在电系统理论中，也可以举出类似的例子，可能有这样的情况：在回答某些问题时，可以认为电容和自感是集中的，而在回答另一些问题时（对同一个系统），却应认为它们是分布的．

类似地，如果我们对摆在某一短时间内运动（自由振动）的问题有兴趣，并且摆所受的阻尼不大，那末就可以不考虑阻力．可是对摆在长时间内运动的问题，这样的理想化就不会给出正确的答案，因为摆的振动是衰减的．同样地，研究摆在谐外力作用下的强迫振动问题时，如果我们关心的是远离共振的区域，就可以不考虑阻尼．但接近共振时，因为共振时的振幅和阻尼的大小关系甚大，这样的理想化（忽略阻尼）就不可能使我们对强迫（定态的）振动的振幅问题，作出正确的答案．

因此，同一个理想化，可以是“允许的”，也可以是“不允许的”，更正确地说，可以是合理的，也可以是不合理的，这和我们要回答什么问题有关．从给定之真实系统的同一个理想化（以某些方程组描述的同一个数学模型），可以得到关于系统性状的某些问题的正确的答案，但是一般地说，却不可能正确地回答关于同一系统之性状的另一些问题．这是因为，在建立真实物理系统的数学模型时，忽略了它的许多性质和特点，这些性质和特点对系统中的某些过程是不重要的，但它们对于其他过程，却可能是很重要的、有决定性意义的．

某一理想化是否允许也和表述给定问题的某些定量关系有关．例如，在前面讲过的摆的情况中，只有在阻尼充分小，并且我们研究的摆的运动时间又不太长的条件下，才可以忽略阻尼．但是当我们说“大”或“小”时，只有在我们指出了给定的量同别的什么量相比大或小时才有意义．在我们的例子中，应该要求衰减指数比振动频率小得多（或阻尼的对数减缩比 1 小得多）并且观察的时间比振动的周期不能太大．只有作了这样的规定，才能认为象“大”或“小”这样的定量性质，是完全确定的．

但是，在研究某一问题时，往往很难预先指出给定的量究竟应和什么量相比较．这时应用数量特征，而并不指出给定量究竟比什么大或小．在此情况中，这些数量特征便不确定了，但是由于我们对这类现象总有某种程度的了解，所以它们仍然具有一定意义。因此，甚至这种不明显的定量特征，还是能使我们对允许的理想化的性质有所了解，并且在所有情况中都会告诉我们，在问题的理想化方面应从怎样的方向做出尝试．例如从“一般人们的时间概念”看，在一分钟内观察现象，这“不算太久”．另一方面，千分之一秒就“很快”了．因此我们常说摆的振动衰减得“慢”；而说高频电振荡回路中的振动衰减得“快”，即便是回路的对数减缩很小而且很接近于摆的对数减缩．虽然严格说来，这些“小”和“大”的论断并没有精确的含义，但是在考虑某一问题通常应该采用怎样的理想化时，必竟还是有作用的．在研究机械系统的固有振动问题时，通常

(至少在开始时)不计阻尼，而在研究振荡电路的固有振荡时，几乎总是一开始就要注意到回路的电阻．这样，看来没有内容的特征"小"和"大"(没指出和什么比较)，仍能帮助我们选择一定的理想化．在作进一步研究时，这些数量特征"小"和"大"便有了完全确定的含义：给定量是"小"还是"大"，应该和什么比较就会明确了．有时，我们就从这种不确定的假设——"小"或"大"(不指明与什么比较)出发开始进行研究，但是在进一步的探讨中，这种论断的意义总会得到阐明的．

在所有的物理研究中，特别是在我们以后的阐述中，关于理想化的性质问题，也即，在建立数学模型时，真实物理系统的哪些性质应该考虑，考虑到怎样的近似程度等问题，起着十分重要的作用；因此，我们首先应该说明，在研究振动系统时，究竟应该采用理想化的哪些性质．以下(不仅在绪论中，并且在全书中)我们将仅限于研究真实振动系统的**动力学模型**，也就是说，忽略其中的起伏扰动和所有其他的统计现象[1]．因此，我们将认为动力学模型方程中的因变量具有表示系统状态以及表示系统中发生的某些过程的定量特性的(确定的而不是概率的)物理意义．在谈到将真实系统理想化为动力学模型时，那么，第一，这些理想化和决定系统状态之变量(如，坐标和速度)的数目有关，第二，还和联系这些状态或状态变化速度的、确定它们之间的关系式的规律的选择有关．这

1) 在关于真实系统动力学模型的理论中，真实系统里存在的起伏扰动亦应以间接的方式予以考虑．很明显，因为在任一物理系统里，小的随机干扰总是不可避免的，所以其中就不可能有这样的过程存在，它们是只有当没有任何的随机偏离和随机干扰时才会发生的过程．从此提出了动力学系统理论中常常用到的要求：数学动力学模型所反映的、与真实系统中存在并且观察到的过程相应的过程，不仅对于坐标和速度的微小改变，而且对于数学模型本身的微小改变都应该是稳定的．前者导致模型平衡状态和其中过程的稳定性概念，后者导致动力学系统之粗性的概念．

为了对起伏扰动、噪音等给予振动系统中的过程之影响进行理论研究，必需采用统计模型．在考虑了随机过程时，系统的动力学将不再服从动力学规律，而应服从统计学规律．因之，可以提出：某一运动的概率，最可能的运动、系统性状的其他概率特性等问题．所谓的爱因斯坦-福克(Einstien-Foker)方程就是研究振动系统中的随机过程的数学工具[106,75,83]．

些关系式在所研究的大多数情况下，可以表示为某些微分方程的形式，它们之中通常都包含一些表征系统性质的常量参数．例如，对于普通的电路，在最简单情况下，决定系统状态的量是电量及电流，而把电感、电容及电阻当作常参数看待．表征系统状态的量之间的关系决定于某一微分方程，常参数或其组合构成微分方程的系数．

和决定系统状态之量的数目有关的理想化，归根到底，将导致于系统有几个自由度的概念．本书主要地将研究这样的一些问题（即，这样的系统，以及和这些系统的性状有关的一些问题），采用给定系统的单自由度数学（动力学）模型就能够解决这些问题．

当然，从古典物理的观点来看，所有真实系统不是只有一个自由度，而是有很多自由度的．例如，根据普通的分子概念，应该认为所有力学系统都有很大的自由度数，即等于组成系统的所有单个分子的自由度数之和．但是，在许多情况中，可以撇开物质的分子结构，而把系统当作连续介质来考虑．在此情况下，我们以无穷多自由度代替了很多自由度，并且建立了偏微分方程．在另一些情况下，看来为了描述我们感兴趣的问题，在研究中，只要取一个或几个自由度就够了．这样，一方面我们获得了无穷多自由度的连续系统的概念；另一方面获得了具有有限个自由度的离散系统的概念．

自由度的概念是从力学引入振动理论的，大家知道，在力学中自由度数被理解为能完全确定机械系统的空间位置的坐标数目（在某种简化的假设下）．这时，描述系统运动的微分方程组的阶数，照例是自由度数的二倍．在振动理论中要研究的不单是机械系统，因此，自由度数应理解为在给定的时刻完全单值地确定系统状态的变量数目的一半，或者，换句话说，理解为描述系统性状的微分方程组阶数的一半（在给定的简化假设下）．

在研究一定类型的系统，且仅限于研究一定范围内的问题时，可以利用单自由度系统的概念．例如，对于悬挂在弹簧上的质量 m（图 1），如果可以不计弹簧质量的影响（这只有在弹簧质量远较

质量 m 为小的情况中，才有意义），并将假定物体 m 是绝对刚性的（如果物体 m 的刚性远较弹簧为大时，才有意义），那末在此情况中，可以将它当作是个单自由度的系统来研究．此外，当然还应该只限于研究物体沿铅垂方向的运动．后一限制只有当质量 m 的铅垂振动不会引起象摆一样的摆动时，才有意义——当系统的参数间有某种关系时这种摆动是不可避免的*．这些假定在真实系统中当然不会严格满足的，实际上，弹簧有质量，物体 m 亦有弹性，但是我们把问题进行理想化，并且不把物体和弹簧看成是连续系统（具有分布参数的系统）．由于这种理想化，我们就不可能回答物体 m 和弹簧的个别质点运动的问题了；但是，如果一方面，物体 m 相当地刚硬，而且其质量又比弹簧的质量大得多，另一方面，初始条件和我们的假设相容，也就是说，质量 m 在初瞬时对平衡位置的偏离是沿铅垂方向的，或者，它只在铅垂方向获得初速度，那末，在对问题所作之理想化的条件下，还是可以满意地回答关于整个质量 m 之运动的问题．并且，当我们对于有这种性质和这样的初始条件之系统的运动有兴趣时，除了质量 m 和弹簧弹性的存在之外，再考虑其他任何特性，简直是不合理的了．对于另一些问题，它们只是初始条件的性质与所研究过的有所不同，我们已经不可能再用前面的理想化来求解了．例如，假定弹簧开始时被作用在 b 点的力拉伸（图 1），而在时刻 $t=0$ 将这个力去掉．这样的初始条件和我们所作的理想化是不相容的，因为这种理想化只容许把整个系统作为单自由度系统来研究．当然，我们给定的可以不是作用于 b 点的力，而是弹簧的任

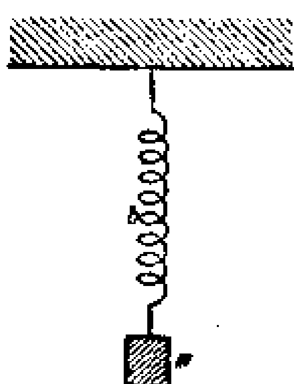


图 1

* 例如，当 $\omega_1 = 2\omega_2$ 时（$\omega_1 = \sqrt{k/m}$，$\omega_2 = \sqrt{g/l}$，其中 m 为质量，k 为弹簧的弹性系数，l 为静止时弹簧的长度），就出现这种情况．此时，铅垂振动必然地会导致角振动（摆动），在振动过程中，随着铅垂振动的消失，逐渐地建立起角振动，其后角振动消失又引起铅垂振动，这样交替下去，直到阻尼使系统完全静止为止——译者注．

一初始分布变形，这种分布变形和力加在质量 m 上时所产生的不同．任一个这样的分布变形都和我们的理想化不相容．如果保留原来的理想化，不再作任何新的假设，我们便不能够回答有关系统在这样的初始条件下，运动性质的问题．

这个例子说明了上述的一般原理．我们看到，对决定系统状态的变量数目（特别是系统的自由度数）所允许的理想化，不仅和系统本身的性质有关，而且也和给定的初始条件的性质以及必须回答之问题的内容有关，——总之，依赖于我们所提出的问题的性质．

对于具有电容、电感和电阻的一般电路（图 2），情况也是这样，只有在不考虑自感线圈中各匝间的电容和导电性等条件下，才可以把它当作单自由度的系统来研究．但是，尽管作了这样的理想化，如果初始条件是这样的，给定了电容器极板的电压和整个自感线圈上的电流，那末对于我们感兴趣的关于电容器极板上电压变化规律的那些基本问题，我们还是能够给出相当精确的结果．但

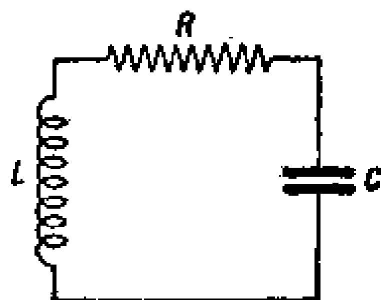


图 2

是这样的理想化，不可能回答，例如，关于电流在自感线圈内的分布规律问题．如果在初瞬时，不是整个线圈都有电流，而只在和直流电源相连接的那一部分上才有（图 3），那末采用上述理想化，并且不再作特殊的假设，我们就不能解决关于电流强度在过程开始阶段中如何变化的问题，因为这些初始条件，和我们研究过的力学例子一样，是和问题的理想化不相容的（例如，在蜂鸣器激励的波长表的情况中，就发生这种类型的初始条件——电池 Б 与蜂鸣器 З，通常象图 3 所示那样和波长表相连接）．在这一情况中，和前面一样，在给定电流强度在线圈中的初始分布时，可以不用对两部分线圈分别

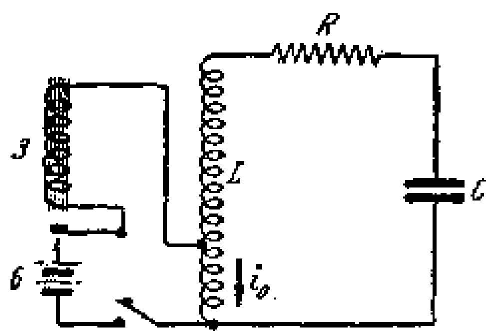


图 3

给定两个条件的形式，而采用某一分布函数 $i=f(x)$ 这种更一般的形式．但是，除去线圈各匝电流强度都一样的情况以外，任意一种其他的分布，当然和我们的系统的理想化，都是不相容的．一般来说，这种任意的初始条件，要求我们研究有无穷多自由度的系统，即研究分布系统．

因此，我们看到，由于不把真实系统当作分布系统而当作有限个自由度的系统来研究，特别是在我们的情况下作为单自由度系统来研究，我们就应该对初始条件的选择加以相应的限制，并且只给出和理想化相容的初始状态，否则，初始条件和理想化系统的方程之间，就会发生矛盾，要消除这种矛盾，一般说来，必须改变系统理想化的性质．但是，在某些情况中，正如以后我们将会看到的，不改变系统理想化的性质——利用某些确定与模型方程相容的状态（发生矛盾后经过一段时间系统便达到了这个状态）的补充假设，也可以消除这种矛盾．

同样地，在决定支配系统运动的规律时，某种理想化是否允许的问题的解决，不仅和系统本身的性质有关，而且还和所提出的问题的特点有关．也正是这种理想化决定着描述系统的方程的类型，并且把系统分为“线性的”和“非线性的”、“保守的”和“非保守的”、“自振的”和“耗散的”等等．

关于决定系统运动的规律的问题，即按照在某一时刻给定的这个系统（模型）的状态决定其状态变化的规律的问题，我们应如何着手研究呢？在什么情况下，对真实系统的性质以及系统各部分各元件间的联系作怎样的理想化才是允许的呢？一般地说，所有电系统与机械系统的参数——电容或弹性，电阻或阻尼系数，自感或质量——总是在一定程度上和系统的状态有关的，即和系统的坐标与速度有关．实际上，电容器充电到某一电压时，在其极板之间就存在着静电吸力．因为绝对刚性的系统是不存在的，所以这些力将引起电容器极板的形状和尺寸的改变，因而就改变了它的电容；电容器极板间的电压愈大，这种改变也就愈大．因此，电容器的电容总是或多或少地依赖于其极板间的电压的．

同样地，有电流通过的自感线圈绕组各匝间亦存在着有质动力（пондеромоторная сила），使线圈绕组的形状和电感有某些改变．因而，线圈的电感不可避免地或多或少地依赖于通过线圈的电流强度．最后，导线的电阻也总是或多或少地与温度有关；因为当电流通过导线时，放出的热量使电阻加热，所以这个电阻的大小在达到某种程度以前总是和通过它的电流有关的．

例如，不难证实，图 1 所示的机械系统的参数总是在一定程度上依赖于系统的状态的．例如，任何材料的弹性模数，或任何弹簧的弹性系数，当变形充分大时已经不再是常数了，它将依赖于系统的坐标．阻尼系数总是（以相当复杂的形式）依赖于速度的．旋转体的惯性矩一般说来，也不是常量，而是和角速度有关的，因为所有实际的物体都不是绝对刚体，因而在旋转时要发生变形．总之，无论是机械系统还是电系统，其参数的大小都在一定程度上依赖于系统的状态．

如果在用数学关系式描述所研究的机械或电系统时，首先考虑所有参数对系统状态的关系，那么我们就得到系数依赖于坐标和速度的微分方程，也就是得到非线性微分方程．为了简化问题，我们应该把系统的性质理想化到某种程度，对于参数与系统状态的依赖关系作一些简化假设，因为，为了回答对给定系统提出的问题并不是永远都必须考虑这种非线性的，这些非线性往往大大地增加了理论研究的困难．

最简单、最方便的假设是：一切参数都不依赖于系统的状态，都是常量．那末，对所研究的系统作数学描述时，我们就得到了常系数线性微分方程，对这种方程已经有正规的解法，研究这种方程并无任何困难．

如果采用上述理想化，即假定系统的参数都是常数而和系统的状态无关，在什么条件下，对我们所感兴趣的关于系统运动性质的问题，可以给出满意的回答呢？一般说来，正象我们看到过的，这个假设在真实的物理系统中是不正确的．但是在许多情况中，可以选择坐标和速度的这样的变化区域，使得在这个区域中，系统

的参数实际上(也就是我们给定的精确度内)是保持不变的. 例如,若电容器与自感线圈的结构有足够的刚性, 并且电容器极板上的电压与自感线圈中的电流可能达到的最大值并不太大, 那末电容器的电容与线圈的电感在所给的区域中实际上可以认为是不变的. 同样地,如果电流密度的最大值相当小,那末,普通金属导线的电阻也可以认为是常数.

类似地,对于机械系统,我们也可以选择其坐标与速度的一个窄的变化区域,使得系统的参数在这个区域中,可以足够精确地认为是常数. 在今后我们将经常考虑的情况中,系统参数和坐标及速度无关的假设,将使我们得到结论: 系统中所产生的、一般说来是某些坐标、速度与加速度的函数的所有的力,都必然是坐标或速度或加速度的线性函数. 例如,弹性力是坐标的线性函数(或电压是电量的线性函数),而阻力(或欧姆电压降)是速度(或相应的电流强度)的线性函数,最后,"惯性力"(或自感电动势)是加速度(或电流的导数)的线性函数.

在自变量改变充分小的区域内,力可以看成是坐标、速度或加速度的线性函数,这一论断实质上是从数学观点得出的. 因为,如果函数在给定点的邻域里, 可以展成台劳级数, 此外, 又如果它的一阶导数在该点不等于零,那末,当自变量和它在给定点之值的差充分小时*,总可以只取台劳级数的前二项**,也就是说,把函数看成是线性的.

但是,这些想法当然不能告诉我们在多大的区域内,可以把函数当作是线性的. 此外,在真实的物理系统中有这样的一些情况: 甚至在坐标和速度的很狭的(但有物理意义的)变化区域内,线性力的概念也不能正确地回答关于系统运动的问题.

我们用一个有阻尼的机械系统的例子, 来说明将真实系统进行"线性化"的可能性的问题. 设质量 m 挂在弹簧上,但物体或者

---

* 原书为"当自变量甚小时"——译者注.

** 原书为"第一项"——译者注.

受到周围气体（或液体）对运动的某些阻力，或者沿某一有摩擦的固体表面而运动（图 4）. 在没有阻尼的情况下，这种系统的“线性化”问题不会引起任何困难，因为有小偏离时，根据虎克定律，弹簧的弹性力是和偏离成正比的，而物体的质量在一个很广的范围内可以认为是和速度无关的. 在有阻尼的情况中（我们知道，阻力一般是依赖于速度的），产生了摩擦力能不能“线性化”的问题，也就是阻力能不能看成是速度的线性函数的问题，即使是在速度很小的区域内. 只有实验，包括象以下的最简单的实验，才能回答这一问题. 使物体运动，我们可以算出物体移动某一距离时，克服阻力所消耗的功. 然后，不断减小物体运动的速度，一次又一次地重复这种测量（路程保持不变）. 于是，就可以建立消耗于克服阻力的功和运动速度间的关系. 这种关系一般来说是很复杂的，对于物体在气体或液体中的运动，或物体受到固体表面摩擦等不同情况，得到的结果差别很大.

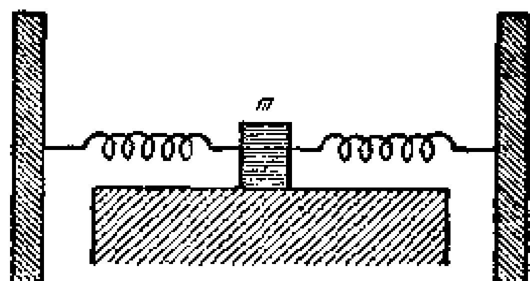


图 4

在第一种情况中，功和速度的关系很大，它随着速度的减小而减小，而且可以任意小. 在第二种“干摩擦”的情况中，相反地，功和速度的关系不大，无论物体运动得多慢，在其位移上都必须消耗有限的完全确定的功，就是说，即使速度是非常小时，摩擦力亦有着有限的值. 此外，必须注意到，摩擦力永远和速度的方向相反，也就是说，当速度通过零值时，摩擦力应该改变符号. 注意到这一情况以及试验的结果，我们可以在低速度范围内建立起摩擦力与速度间的关系（即使是定性的）. 显然，在第一种“湿摩擦”的情况中，阻力通过零值而改变符号时，没有跳跃现象（图 5）. 而在第二种情况中，当速度趋于零时，一般来说，摩擦力从两方面趋向于不同的（在特例中，符号相反而绝对值相同的）有限极限，亦

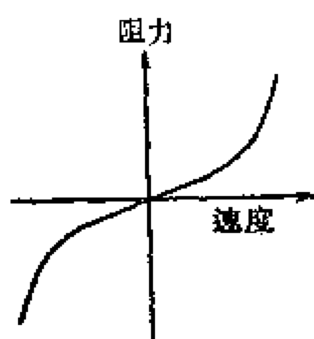


图 5

就是说，在零值处有间断（图 6）[1]. 显然，在“湿摩擦”情况中，在零值的左右的一段上(至少是不大的一段)总可以认为阻力是速度的线性函数，亦即，可以把阻力线性化，从而把系统看成是线性的. 在“干摩擦”的情况中，甚至在速度很小的区域中，这种线性化亦不能反映干摩擦的最典型的特性. 因为当速度通过零值时，摩擦力有跃变，那末我们把摩擦力认为是速度的线性函数，当然就不能反映摩擦力的这一特点. 因此，在讨论干摩擦起重要作用的问题中，甚至仅限于讨论非常小的速度值，我们也不能把系统看成是线性的.

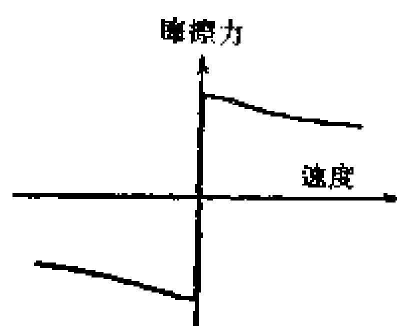


图 6

对于干摩擦的情况，即依赖关系如图 6 所示的情况，可以作出的最简单的理想化是库仑提出的假设：摩擦力大小与速度无关. 象阻力的线性规律是湿摩擦情况中的最简单的理想化一样，库仑定律是干摩擦情况中的最简单的理想化. 这种理想化的摩擦特性如图 7 所示.

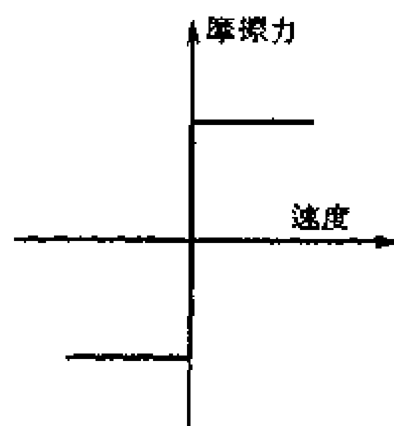


图 7

于是我们看到，即便是在某一有限的区域里，亦不是永远能够把系统当作是线性的. 但是在不少情况里，这还是可能的. 此时，在这个有限区域中，虽然作了理想化（假定系统所有的参数都是常数），仍然可以回答我们关心的那些有关系统运动的特性及某些一般性质的问题. 这个区域的边界，决定于真实物理系统中存在的参数与坐标及速度之关系的特性，以及所提问题的特性；但是理想化适用的区域，**永远是限于一定范围的**.

1）在速度不很小的区域内摩擦力和速度的关系以后我们还要讲到，暂时我们只考虑速度很小的区域.

但是如果这个区域是有限的，那末不可避免地会产生以下十分重要的问题：系统"本身"会不会由于自己的性质越出我们的理想化所适用的区域呢？如果不会发生这种情形，如果初始条件位于系统参数可以认为是常数的区域里，而系统在以后的所有运动中，也不会越出这个区域，那末，我们的理想化的问题，就能够回答在研究该系统时可能发生的一系列问题．为了回答这样的问题，我们可以认为系统的参数不依赖于系统的状态，而用线性微分方程来描写此系统，也就是把系统当作"线性的"来研究．

当系统由于它本身的性质越出"线性区域"的范围时，十分明显，可能出现一些，如果把系统看成是线性系统，我们就不能回答的问题．此外，在有关连系参数性质和系统状态的规律的问题中，某一理想化是否允许，不仅和系统的性质有关，而且还和所提问题的特点，特别是和问题的初始条件的特点有关．

要回答许多非常有意义的、实际上很重要的问题，必须讨论系统在线性区域以外的性状．例如，近代无线电技术提出了一系列这样的问题．我们以后就会看到，甚至最简单的电子管振荡器理论，原则上不能归结为线性微分方程来研究，而必须研究非线性方程；例如，线性方程不能解释这种事实：不论初始条件怎样，电子管振荡器都有着形成一定的振荡状态的倾向．在电工技术、声学等方面，也有着类似的问题．

正是对这种问题的研究构成我们的主要任务，这类问题本身的特性使我们不得不提出非线性问题，即把系统当作非线性的来研究．

要把实际的物理系统，严格地划分为"线性的"与"非线性的"，"保守的"与"非保守的"，且严格地按自由度数来分类等等，是不可能的．真实的物理系统既不是线性的，也不是保守的，亦不可能有有限的自由度，因为它们一般不可能完全精确地用数学关系式来描写．因此，对于真实的物理系统不能进行任何一种严格的划分和分类．只有对抽象的模型（数学模型）才能进行这种严格的划分，而这种抽象模型是我们对真实物理系统的性质作了一定理想

化的结果.

特别地,在一般教科书中所讨论的那些系统,并不是什么特别的"线性系统",可以把它们和我们要讨论的"非线性系统"严格地加以区分. 在一些不同的情况中,我们讨论的常常是同一些真实的物理系统,不过采用了不同的理想化方法而已. 我们已经指出过,理想化的特性不仅决定于系统本身的性质,而且还决定于所提问题的内容,由于这种理想化的结果,使我们能够把系统划分为线性的和非线性的、保守的和非保守的,并且能从非线性非保守系统中分出一类自振系统,最后,还可以把自振系统分为连续的[包括"汤姆逊(Thomson)型的"]和"不连续"的.

进行了这种分类以后,我们总会对某类系统的性质取得一定的结论;但是,应注意到,表征系统的这些性质是理想化的性质. 这也很自然,因为,具有这些性质的系统的分类,只有在作过某种理想化以后才有可能. 例如,当我们讲到自振系统会以不变振幅振动任意多久这一性质时,那末,当然这个性质必须看成是理想化的. 在真实的自振系统中,振动并不能持续"任意多久";当钟的发条完全变松了时,钟的振动就停止了,当屏极电池或灯丝电池用完了时,电子管振荡器中的振荡也就停止了. 在我们说振动可以延续"任意多久"时,这意味着,我们将排除上述情况(钟的发条中或电子管振荡器电池中的能量储备是有限的). 完全同样地,只是在近似的意义下,才可以断言:所有的自振系统,例如无线电技术中的发射机,有着形成某一确定状态的倾向,亦即,在这种发射机中振动的定态"振幅"和周期是不变的(当参数固定时). 不难看出,事实上,由于总是存在着不大的外作用和不可避免的起伏扰动,振幅及周期总是在某一个通常是很小的范围中变化的. 此外,很显然,对真实系统来说,甚至周期运动这个概念也是理想化的. 正象我们已经多次指出过的,在进行任何研究时,我们强调真实物理系统的那些对解决所提问题起重要作用的性质,而忽略另一些对于解决所提问题说来是次要的性质.

在研究这些非线性问题时,我们将企图回答些什么问题呢?

在研究动力学系统的性状时，我们首先感兴趣的是系统的所谓定态运动[1)]，因为正是这种运动最能在长时间内表征系统的性状。

在我们将要研究的系统中，可能发生那些定态运动呢？（为确定起见，我们现在只考虑机械系统的动力学模型）。

首先这可能是平衡状态，此时描写系统性状的微分方程所确定的速度和加速度都等于零。加速度等于零的条件，等价于在系统上没有作用任何规则力，这些力是列微分方程时必需考虑的。但是在所有的物理系统中，除了这种规则力以外，还作用着微小的不规则力，例如具有起伏性质的力。由于这些力的存在，系统无论何时都不会严格地处于平衡状态，它将在平衡状态近旁作微小的运动［布朗（Brown）运动］。但是在平衡状态近旁，系统上已经有了规则力（只有当严格地处于平衡状态时，它们才等于零），这些力可以使系统或者回到平衡状态，或者更远离平衡状态。在前一种情况中，将有稳定的平衡状态，在后一种情况中，得到不稳定的平衡状况。很明显，为了研究系统的性状，不仅要会求出平衡状态，而且还要决定平衡状态对坐标和速度的微小改变的稳定性。这个意义下的稳定性，是系统能处在平衡状态近旁任意多久的必要条件。

系统中还可能有的一种定态运动是周期运动。的确，除了周期运动外，在振动系统中，还可能有其他定态的振动过程，例如，概周期运动。但是，在单自由度的自治振动系统（亦即未受到变作用力的系统）中[2)]，经过对这些问题的详细讨论，我们将阐明，只有最简单类型的定态振动过程——周期过程，才可能存在。

---

1) 粗略地说，定态运动就是系统所趋向的极限运动。说到定态运动，我们也这样地理解静止状态，也就是把静止状态看成是定态运动的特殊情况。将定态运动和所谓的比克荷夫（Birkhoff）递归运动[34,139,96]相等同后，就可以给出它的严格数学定义。对于单自由度系统，只有平衡状态与周期运动可以是递归运动，对于更一般的系统，递归运动可以是更复杂的运动，例如概周期运动。

2) 不显含时间的微分方程所描写的系统，我们称之为自治系统。因此，在研究自治系统时，将认为外作用力不依赖于时间。

但是在真实物理系统中，并非所有可能的定态运动都可能存在．为了使定态过程能够在真实物理系统中延续随便多久，必须有：在不可避免的偶然冲击下，系统将作充分接近于给定定态运动的运动，并且不会显著地远离它．这个要求和对平衡状态的要求完全相似：要使周期过程能够持续随便多久，它对于坐标和速度的微小改变应该是稳定的．因此，我们不仅必须求出系统中可能存在的周期过程，而且还要解决此过程对微小偏离的稳定性问题．同样地，我们亦将关心系统运动和参数的依赖关系，这些参数含于系统的方程中，它们可取某些固定值（如电阻、电容等）．研究这些关系，使我们能够回答一系列有关振动的产生、振动的中断等基本问题．

要使定态状态能够在真实系统中持续存在，它们不仅应该对坐标和速度的微小改变是稳定的，而且对描写系统的微分方程的微小变形也应该是稳定的．微分方程的这种微小变形表示着其所描写的系统性质的相应的微小变化．因为，一方面，我们总也不可能利用数学工具绝对精确地描写真实系统；另一方面，任一真实系统，当其中有过程进行时，也不可能是绝对不变化的，所以，描写真实系统的微分方程的形式可能有微小变化应该是允许的[1]．

如果我们在研究某一具体的问题时，给予所有参数一些完全固定的数值，这只有当参数的微小变化，不会使运动特性发生很大的变化，并且理想模型的性状仍然能保持着我们感兴趣的特点时，才有意义．当微分方程和参数有微小改变时，模型的性状不能保持的那些特点，是没有实际意义的，因为它们不能反映真实物理系统的性质．当微分方程有微小变形时，最本质的特性不改变的系统，我们称之为“粗系统”，它们是真实物理系统的理论模型，在本书中我们要研究的主要就是这种系统．但是我们对系统的微小改

1）关于系统的这些微小变化，或微分方程的这些微小变形，初步地我们将假设是这样的，它们将不致改变原微分方程的阶次（或者，当我们仅研究一阶方程组时，不改变一阶方程的数目，亦是一样）．用物理学的术语，这意味着，我们所考虑的系统的微小变化是这样的，它们不致于使我们必须放弃对自由度数目所作的理想化．

变所加的限制——使得有这种改变时自由度不增加，换句话说，方程的阶次不增加，是非常重要的．实际上，从某种物理上可以证实的观点来看，如果新出现的高阶导数的系数充分小的话，方程的“微小变形”亦可以理解为微分方程阶次的升高．使方程的阶次升高的微分方程的“微小变形”是考虑了系统某些新的自由度，以及考虑了某些“寄生”参数的结果．例如，在图 8 所示电路的情况中，只考虑电感 L、电容 C 和自感线圈的有效电阻 R，亦即只考虑基本的（“非寄生”）参数时，我们得到二阶微分方程．此外，如果还考虑线圈绕组间的总“寄生”电容，即电容 C_1，以及导线的“寄生”电感，即电感 L_1，则得到的不是二阶方程，而是四阶方程．但是既然 C_1 和 L_1 是小量，这个四阶方程就可以看成是原来的二阶微分方程的微小变形．

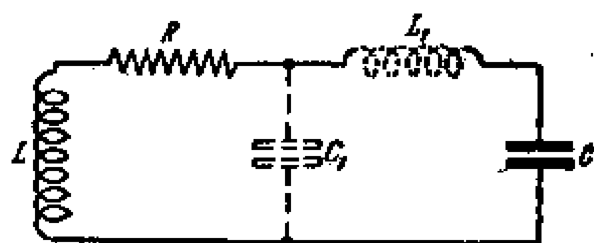


图 8

这种升高微分方程阶次的“微小变形”，我们可以继续作下去，因为当我们想更完全地描写系统时，总将会得到越来越大的自由度．

在解决了关于某一定态运动的稳定性问题以后，严格地说，我们还应该证实，当微分方程的阶次升高时，该运动不会消失，也不会丧失其稳定性．实际上，如果当只考虑基本参数时平衡状态是稳定的，而由于微小寄生参数的影响方程阶次升高以后，平衡状态便丧失了稳定性，那末，这意味着，这个平衡状态实际上是不稳定的．因此，提出平衡状态应对方程的这种变形是稳定的要求是很自然的．不难证明，对于动力学系统，要想建立这样的理想模型（提出这种类型的微分方程），即便是在方程组中引入了有更高阶导数的项（这些导数有着任意小而不等于零的任意解析系数），使系统的平衡状态永远稳定，这是不可能的．由此可知，不能对动力学系统的理想模型提出这样的一般要求，使得出现新自由度时，定态运动的性质仍然不变（和动力学系统的微小改变不引起新自由度

时所提的粗性要求相类似)，而只能在注意到新研究系统特点的情况下，来考虑新自由度的影响．今后还要遇到这样的状态，其“稳定性”实质上并不是决定于真实系统的性质，而是决定于我们没有考虑的某些自由度．

但是，在这方面我们不能不显得无能为力，否则的话，我们应该能够检查出，增加方程阶次的一切可能的小寄生参数是否会破坏给定状态的稳定性．可是我们永远亦不能检查到底，因为在任一系统里，这种寄生参数的数目非常之多，此外，以后将指出，可能出现这样情况，寄生参数的影响是不同方面的，就是说，为了检查它们的影响，不仅要假定这些参数是存在的，还应该知道它们间的数量关系，但是寄生参数的大小我们一般是不知道的．因此，真实系统中某一状态的稳定性问题，我们解决得是否正确，正象任一其他理论研究的结果一样（其中不可避免地将对所研究之系统的性质进行理想化)，只有用实验的方法来检验．

对于我们感兴趣的问题，我们在寻求其解答时所采用的形式，在不同情况中是不相同的．如果我们知道了表征系统状态以及表征这些状态变化的函数，对于所有发生的问题，我们就能够加以解决．为了确定系统的性状，我们必须研究的这些函数，例如，电流强度或电压和时间的函数关系，是由描述给定系统的微分方程所决定的，并且不可能有其他求法．只有在不多的一类情况中，例如，对于常系数线性微分方程，才可能将寻求这种函数的问题归结为其他更简单的问题，例如，解代数方程，求微分方程中所含有之函数的积分等．

所以必须学会，直接地从微分方程本身，就能得到这些方程所决定之函数的性质和形状(简称性状)．

此时首先出现问题：利用求所谓的积分曲线（即微分方程定义的曲线）的几何方法，来求出上述函数的最有特点的性质，即所谓的定性性质．这种方法我们将称之为微分方程的定性积分．如果我们能够定性地积分所研究的微分方程，那末，就得到了在所研究系统中存在的一切可能物理过程的定性图象．大量的、有着重

大实际意义的问题正好具有这样的定性性质，例如，稳定平衡状态是否存在的问题、稳定周期过程的存在性问题、关于软状态和硬状态问题等等。

定性积分在很大程度上减轻了定量积分的工作，精确些说，减轻了求解振动物理中的定量问题的工作．归根到底，振动理论对函数在某一特定瞬时的值并不感兴趣，而主要地只对那些能够在很长一段时间上，表示此函数变化情况的定量特性有兴趣．例如，在周期函数的情况中，感兴趣的是它的周期、展为富里埃级数时的系数值、函数用富里埃积分表示时的频谱等．

但是，为了求出这些数值（例如频谱），在振动理论中，作为中间阶段，常常还是要对自变数的某些个别值，求出函数数值．普通的近似定量积分方法（如等倾线法、龙格-库塔法）可以用来解答这些问题，很明显，这些方法亦是要直接处理微分方程的．知道了给定微分方程的定性图象，使近似定量方法的应用更加有效，更加可靠，并且能够更合理地配合使用各种近似方法等等．

以后我们还要介绍给读者一些数学工具，它们是研究非线性微分方程定义的函数所必须的．由于我们在这里只限于研究单自由度系统，那末这些函数也就是由一个不高于二阶的微分方程或不多于两个的一阶微分方程组所定义的函数．

为了易于掌握这种数学工具，我们先阐述熟知的一般线性问题，这里常用到的术语及方法（下述非线性问题方法中的一部分），今后将以更一般的形式被用来解决更加复杂的非线性问题．

第一章 线性系统

§1. 无阻尼线性系统(谐振子)

我们首先讨论最简单的自治振动系统，其运动是由线性微分方程

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1.1}$$

来描述的,此系统在物理中称为谐振子.

例如，质量为m的物体在两个弹簧的作用下沿杆作水平运动时，就是这种系统的一个例子(在相应的假设下)(图 9). 为了把这个系统的研究化为我们感兴趣的情况，我们作以下的简化假设[1]. 第一,假设弹簧作用于物体上的力正比于弹簧对平衡位置的位移 x. 实际上,只有当位移充分小时，此假设才在一定精确度上被满足(只有当变形小时,弹簧才服从虎克定律). 第二,假设系统运动时未受到阻力(既未受空气阻力，也未受支杆的摩擦，弹簧也没有内摩擦). 当然，这个关于系统中没有阻力的第二个假设，对于真实的物理系统来说,精确的程度更要差些. 在所作的假设下,这个系统的运动可由以下的二阶线性微分方程来描述:

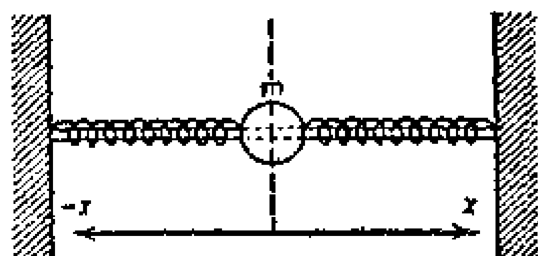


图 9

$$m\ddot{x} + kx = 0, \tag{1.2}$$

其中 k 是依赖于弹簧弹性的正系数. 令 $k/m = \omega_0^2$, 我们便得到谐振子的方程 (1.1).

---

1) 其他简化假设在绪论中已讲过了,这里不再提及,今后也不再重复.

由电容 C 和自感 L 组成的振荡回路是这种类型的电系统的例子(图 10)；为了简便，将这样的回路称之为"汤姆逊回路"[1]. 为了得到无阻尼线性系统的情况，当然，我们还应该将这个回路的性质加以理想化. 首先应该假设，系统中没有能量损失，亦就是说，回路中的导线没有电阻，在介电质中没有能量耗散，最后，亦没有电磁能的辐射. 在实际的系统中，这些假设的精确度总不会是十分高的，如下的一个事实就能证明这一点：在任一回路中，振动都有着或强或弱的衰减，而且在任何情况中，衰减亦都是非常明显的(如果我们观察相当长时间的话). 把振荡回路理想化为无能量损失的系统，我们就不能表达所有真实系统中的一个最典型的特性——固有振动的衰减；这种意义下的关于无能量损失的假设要比回路的线性假设更为理想化得多，因为不少真实系统都相当接近于线性的. 但是这样的理想化还是可以相当满意地回答振动理论的某些基本问题，例如，关于固有振动的频率与形式的问题(当然只是对振动衰减甚小的情况而言). 此外，还必须假定电容器的电容 C 不依赖于充电量，而线圈的电感 L 也不依赖于通过它的电流强度. 作了这些假设后，电系统也可用(1.1)型的方程来描述；亦即，若以 q 表示电容器的电量，则得：

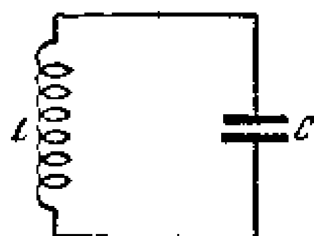


图 10

$$L\ddot{q}+\frac{q}{C}=0, \tag{1.3}$$

令 $\frac{1}{LC}=\omega_0^2$，我们又导出了谐振子的方程(1.1).

现在我们重述一下谐振子的运动特性. 如所周知，微分方程(1.1)的通解是：

$$x=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t, \tag{1.4}$$

其中 A 和 B 为积分常数，它们决定于初始条件. 若 $t=0$ 时，

---

1) 以后讨论到其他系统——"非汤姆逊回路"时，就会知道这一专门名词的来源，在非汤姆逊回路中电阻将起重要的作用.

$x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, 则:

$$x = x_0 \cos\omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t;$$

$$\dot{x} = -x\omega_0 \sin\omega_0 t + \dot{x}\cos\omega_0 t. \tag{1.5}$$

这个解还可以写作

$$x = K\cos(\omega_0 t + \alpha); \quad \dot{x} = -K\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha), \tag{1.6}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &K = +\sqrt{A^2 + B^2} = +\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}} \\ \text{及} \quad &\operatorname{tg}\alpha = -\frac{B}{A} = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0} \\ &\left(\cos\alpha = \frac{x_0}{K}, \quad \sin\alpha = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 K}\right). \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

我们看到，位移或电量对时间的关系（振动波形图）可以表示作熟知的“正弦波”（图 11）. 为了表征这种“正弦的”或简谐的振动，必须给定三个量：K——最大偏离或振幅，ω_0——在 2π 秒内的振动次数或圆频率，以及 α——所谓的振动的初相位，当我们同时考虑几个振动过程时，初相位起着极其重要的作用. 实际上，因为振动的相位完全决定于计算时间的初瞬时，如果计算时间的初瞬时已由某一其他过程给定了，那末这个过程的初相位便不能随便选取了. 但是当我们只研究一个“孤立的”过程时，振动的相位便不起任何实际作用了. 总之，谐振子作的是周期正弦（谐）运动（由此得名）. 只有在 $x_0 = 0$ 及 $\dot{x}_0 = 0$ 的情况中，即当振子在初瞬时处于平衡状态时，才不会产生振动；在这个情况中，振子将一直保持静止. 谐振动的振幅与相位决定于初始条件. 圆频率，因之振动的周期，却和初始条件无关，它们决定于振动系统的参数.

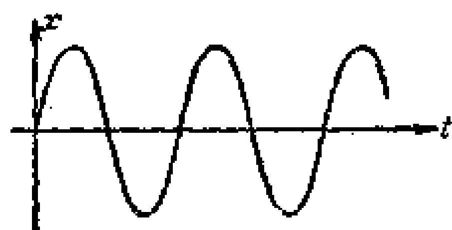


图 11

方程(1.1)所决定的系统作什么运动的问题，公式(1.5)或(1.6)与(1.7)给出了精确的定量解答。这些公式使我们能够"由现在确定未来"，也就是说，如果知道 $t=0$ 时 x 与 $\dot{x}$ 的值，我们便能够算出 x 和 $\dot{x}$ 在任一瞬时 t 的数值.

§2. 相平面的概念、谐振子的所有运动在相平面上的表示

1. 相平面 令 $\dot{x}=y$，我们来研究谐振子在 x, y 平面上的运动，这里 x 和 y 是笛卡儿直角坐标. 系统的每一个状态，坐标 x 与速度 y 的每一对数值，对应着 x, y 平面上的一个点. 反之，x, y 平面上的每一个点对应于且仅对应于系统的一个状态，x, y 平面称为状态平面或相平面，它表示着系统的所有可能状态的集合. 相平面上每一个新的点对应于系统的一个新的状态. 这样，可以用一个点在相平面上的运动，来表示系统状态的变化，这个点我们称之为"相点"或"代表点". 这种相点的轨迹称之为相轨线(或称相迹)*；不要把相轨线和运动的真正轨迹相混淆. 相点的速度称之为相速度，仍然不要把它和实际的速度混淆起来. 相点在全部运动时间(从 $t=-\infty$ 到 $t=+\infty$)内所描出的曲线，我们称之为整相轨线[1].

知道了谐振子微分方程(1.1)的解，不难求出相平面上的轨线的方程. 方程

$$x=K\cos(\omega_0 t+\alpha);\quad y=-K\omega_0\sin(\omega_0 t+\alpha) \qquad (1.6)$$

就是相轨线的参数方程；从这些方程中消去 t，便求得轨线的坐标

---

* 在数学上通常采用"相轨线"名词，而在工程应用上通常用"相迹"——译者注.

1) 用给定 $2n$ 维空间中的一个点，来表示 n 自由度之系统状态的这一方法，在物理中早就被应用了. 这个系统状态(相)的 $2n$ 维空间被称之为相空间. "相空间"，特别是"相平面"的名词便是由此处转借到振动理论中来的.

第一个用相空间来研究振动系统动力学的是洛特 (Leaute)[172]，他在研究某一自动调节装置的工作中，采用了在此装置的相空间里构造积分曲线和极限环的方法(但未用极限环的名词，看来，他并不知道早些时发表的庞卡莱的工作[108]). 可惜，洛特的出色的工作，到后来几乎完全被遗忘了.

方程：

$$\frac{x^2}{K^2} + \frac{y^2}{K^2\omega_0^2} = 1. \tag{1.8}$$

不难看出，这是一个相似（轴长比相同）椭圆族的方程，并且通过平面上每一个点，有一个且只有一个椭圆[1]，这个椭圆对应于一定的K值，即一定类型的初始条件，也即系统总能量的同一个初值．除点 $x = 0$, $y = 0$ 以外（“通过”此点的椭圆，退化为一个点），x, y 平面上布满着层层相套的椭圆．

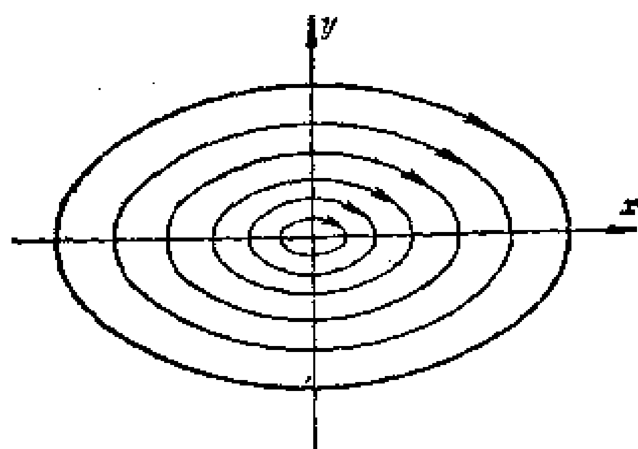


图 12

所有这些椭圆都是相点的运动轨线．我们来看，相点是怎样沿其中某一椭圆运动的．不难看出，对于我们所选的坐标轴的方向而论，相点永远是（沿任何轨线）顺时针方向运动的，因为在上半平面中，$\dot{x} = y > 0$，故 x 随时间而增加；而在下半平面中 $\dot{x} = y < 0$，因之 x 随时间而减小．

为了求出相速度，象通常在力学中所作的那样，引入相向径：

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y.$$

这样一来，相速度可表为：

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}\dot{x} + \mathbf{j}\dot{y}$$

或按 (1.6) 表为：

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}\{-K\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)\} + \mathbf{j}\{-K\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha)\}. \tag{1.9}$$

不难看出，除了 $K = 0$ 的情况，相速度永远不等于零，因为正弦和余弦永远不会同时等于零．

---

1) 在其他更复杂的例子中能发生这样的情况，从相轨线的参数方程中消去时间 t，得到的不是一个，而是几个相轨线的坐标方程．

我们研究了相平面的特性，并发现，在相平面上相点的闭轨线（在我们研究的情况中此闭轨线为椭圆）对应着系统的周期运动，相点沿闭轨线以不等于零的相速度而转动（图 12），在 $T_0=2\pi/\omega_0$ 的时间单位内绕行一周. 相平面上退化成一个点的相轨线对应于振子的平衡状态.

现在假设，我们并不知道系统运动的特性，但是通过某种方法却知道了相轨线的特性和相速度的大小. 能不能仅利用这些知识，对这些曲线所表示的运动作出一些论断呢？下面我们将会看到，运动的一般性质和它的一些定性特点，已经在相轨线的特性里显示出来了. 被相轨线所划分的相平面，能给出动力学系统的一个一目了然的“图象”；相平面立即提供了一个可能，使得一眼就可以看出：在各种初始条件下能够发生的全部运动.

对于所讨论的谐振子情况，我们从谐振子方程的现成解 (1.6)，得到了相平面的图象. 但是，也可以不利用这些解，直接由方程 (1.1) 得到关于相点在相平面上运动的某些结论. 正是这一第二途径，具有特殊的意义，因为可以不知道原方程积分的分析表达式，就能够获得关于运动性质的某些结论，因而，在不能求得象 (1.6) 那样的分析表达式的情况下，我们将采用这个方法.

2. 不含时间的方程 为了不积分原方程 (1.1)，而直接由这个方程就能求得相平面的图象，可以按下面的方式进行. 以下面的两个等价的一阶方程来代替原来的二阶方程：

$$\frac{dx}{dt}=y;\quad \frac{dy}{dt}=-\omega_0^2x. \tag{1.10}$$

将此二式相除之，得微分方程：

$$\frac{dy}{dx}=-\omega_0^2\frac{x}{y}. \tag{1.11}$$

这个方程确定着所谓的积分曲线——这样的曲线，其上每一点之切线的斜率（角系数 dy/dx），可以按方程 (1.11) 来计算. 可以看出，此时 x 与 t 的关系是以二阶微分方程表示的，但是 y 与 x 的关系却是由一阶微分方程表示的. 积分方程 (1.11)，我们就会

得到积分曲线的方程，这时它已经不是微分形式，而是有限形式了．在给定的最简单的情况中，不难看出，积分曲线与相轨线重合．但是今后我们必须区分积分曲线和相轨线，因为可能发生这种情况，一条积分曲线可以不是由一条相轨线，而同时是由几条相轨线组成的．

3. 奇点，中心 在相平面的每一点上，方程(1.1)直接地决定着通过该点之积分曲线的、唯一的切线方向，但原点 $x=0$, $y=0$ 是例外，在这一点上，切线方向是不确定的．从微分方程一般理论，我们知道，通过满足柯西定理[1]条件的那些点(其中包括条件：微分方程能给出积分曲线切线的确定方向)，有一条且仅有一条积分曲线；对于积分曲线切线方向不确定的，因而柯西定理条件不满足的那些点，已经不能再肯定(根据该定理)，通过这样的点有一条且仅有一条积分曲线．切线方向不确定的这些点，称之为给定微分方程的奇点．但是，根据柯西定理，我们亦不能正确的断定，通过奇点的积分曲线多于或少于一条(即，或者一条也没有，或者很多)．但是，对我们将常常遇到的最简单的奇点(一次奇点)来说，上述反推论是正确的．也就是说，在研究这些奇点时，我们将能确信，通过一次奇点，或者没有，或者有多于一条的积分曲线．

一般来说，一个微分方程可以有许多奇点．在我们研究的情况中，只有唯一的奇点：$x=0$, $y=0$．根据奇点近旁积分曲线的性状，可以将奇点分成不同的类型．在所讨论的情况中，没有一条积分曲线通过奇点，在这种孤立奇点近旁的积分曲线都是没有奇性的闭曲线，例如，它们是层层“相套”并环绕奇点的椭圆，这种奇点我们称之为中心．以后我们研究其他例子时，还会遇到其他类型的最简单的奇点．目前我们只指出，由于系统的不同类型的运动对应于不同类型的积分曲线，所以奇点的分类和系统在奇点近旁的性状有着密切的关系．

4. 等倾线 这样，方程(1.11)在相面上确定着一个切线场．

1) 为了研究积分曲线的性状，今后我们还要讲到柯西定理及其意义(参看下册附录I)．

只要作出等倾线族[1]，就不难解释这个切线场的性质了，在上述情况中，等倾线是一些通过坐标原点的直线．事实上，我们可以在相平面上寻找所有这样的点，通过它们的积分曲线的斜率都等于 $\kappa\left(\frac{dy}{dx}=\kappa\right)$．这时，根据（1.11），这条等倾线的方程为：

$$-\omega_0^2\frac{x}{y}=\kappa \text{ 或 } y=\sigma x,$$

其中

$$\sigma=-\frac{\omega_0^2}{\kappa}. \tag{1.12}$$

不难看出，（当 ω_0^2 固定时，给 σ 以不同的值）所研究的切线场，是由一些对称于轴 x 与 y 的元线段所组成的，这些元线段逐渐地（随着等倾线斜率 σ 的改变）从水平方向（沿 y 轴，这时 $\kappa=0$）改变成铅垂方向（沿 x 轴，这时 $\kappa=\infty$）．

但是，方程（1.11）并不能回答相点在相平面上向那个方向和以多大的速度而运动的问题．而方程（1.10）既确定相速度的大小，也能确定相速度的方向；实际上，

$$\mathbf{v}=\mathbf{i}\dot{x}+\mathbf{j}\dot{y}=\mathbf{i}y+\mathbf{j}(-\omega_0^2x). \tag{1.13}$$

如果注意到方向，则以向量场（图 14）代替元线段场（图 13），进行

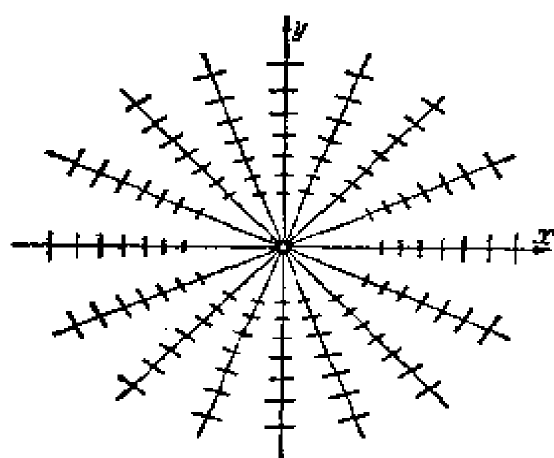


图 13

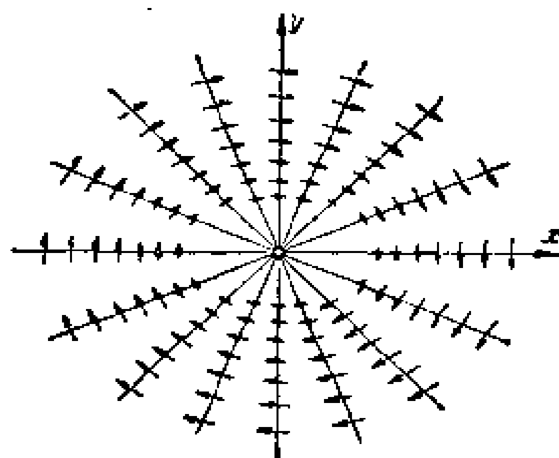


图 14

1）等倾线——是这样的线，其上各点的积分曲线都具有相同的斜率，亦即它们的切线和横轴成相同的夹角．

研究时将更为有利，向量场不仅能表征该点积分曲线的切线方向，还能够表征出沿相轨线的运动方向.

正象我们已经指出的，相速度 $v = \sqrt{y^2 + \omega_0^4 x^2}$ 只在坐标原点（亦即只在奇点）才等于零.

看了图 13 和 14 以后，不难确信，在所研究的情况中，利用等倾线方法立刻就可得到关于相平面上轨线性质的已知概念. 当然，由于在所研究的最简单的情况中，原微分方程 (1.11) 可以分离变量，因之很容易积分，应用等倾线方法未必有什么优越性. 事实上，积分以下方程:

$$xdx + \frac{1}{\omega_0^2} ydy = 0,$$

我们得到:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2\omega_0^2} = C,$$

或者，令 $2C = K^2$，正象预期的那样，我们求得和前面一样的、相平面上的椭圆族方程:

$$\frac{x^2}{K^2} + \frac{y^2}{K^2\omega_0^2} = 1.$$

不要忘记，这个椭圆族现在是用完全不同的方法得到的，我们并不知道微分方程 (1.1) 的解. 在一些情况中，类似于 (1.11) 的方程不能积分时，尽管积分曲线的分析表达式并不能求出，用等倾线法，仍然可以得到关于相平面上积分曲线性质的相当精确的概念. 以后可以看出，在这些更为复杂的情况中应用等倾线法，会带来很大的好处.

5. 平衡状态与周期运动　　在这一节开始的研究中，我们是在知道运动、知道 x 与 t 之关系的情况下，寻求相平面的性状的，现在进行与此相反的探讨. 试看一下，知道了相平面上积分曲线的特性，并且知道了相速度的表达式，对于运动的性质，我们能知道些什么.

第一：我们可以断定，在这一情况中，所有相轨线（退化成一点的轨线 $x = 0$, $y = 0$ 除外）都对应于周期运动. 实际上，所有

的轨线都是椭圆，亦即，闭曲线．如果相点沿闭曲线运动，并且如果经过一段时间“绕了一周”后，又回到了相平面上的同一点，亦即，相点经一段时间后重新具有原来的位置和原来的速度，那末，以后的运动将和以前的运动完全相同，运动过程亦将重复地持续下去．

不难看出，“返回时间”，或者，运动周期的值是有限的．因为，椭圆的周长是有限的；另一方面，相速度在沿椭圆运动的任何瞬时，都不趋于零（因为只在坐标原点才等于零，而椭圆都不通过坐标原点）．因此相点在有限时间内绕整个椭圆绕行一圈，亦即，过程的周期是有限的．

第二：我们可以断言，退化的轨线 $x=0$，$y=0$，或者说奇点 $x=0$，$y=0$，对应于平衡状态．实际上，点 $x=0$，$y=0$ 的相速度等于零，相点若在初瞬时处于原点，并且如果没有任何偶然偏离和冲击使相点离开点 $x=0$，$y=0$ 的话，它将一直停留在原点．

一般而论，相平面上同时有 $dx/dt=0$ 与 $dy/dt=0$ 的点对应于平衡状态．这不难从物理观点来理解．例如，在力学上，$dx/dt=0$ 说明速度等于零，而 $dy/dt=0$ 说明加速度（或者力，亦是一样）等于零．

一般来说，相平面上积分曲线方程的奇点对应于动力学系统的平衡状态；反之，平衡状态也对应于奇点[1]．

这样，在还不知道所有可能运动的定量性质的情况下，我们就知道了这些运动的定性性质．无阻尼线性系统（谐振子）的定性研究结果，可以总结如下：这种系统在任何初始条件下，都作绕平衡状态 $x=0$，$y=0$ 的周期运动，除去唯一的例外，即当初始条件

---

1) 研究由方程 $dx/dt=P(x,y)$，$dy/dt=Q(x,y)$ 所描述的动力学系统，如果 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 有等于零的公因子，就可能出现一些平衡状态，它们不是积分曲线方程 $dy/dx=Q(x,y)/P(x,y)$ 的奇点．如果 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 有这样的公因子，它们在积分曲线方程的奇点上趋于无穷，那末，这些奇点也可能不是平衡状态．

恰恰对应于平衡状态的情况.

§3. 平衡状态的稳定性

我们可以直观地了解"平衡状态的稳定性"这一词的含义. 但是,直观的概念当然是不够的,必须使它成为一个严格的概念,以便我们能够在今后应用它.

先从对一个最简单例子的研究开始: 设想有一个无阻尼的数学摆(图 15). 显然,摆可能有二个平衡状态: 1) 把摆放在最低点 a 而不给它初始速度的状态; 2) 把摆放在最高点 b 同样也不给它初始速度的状态. 亦很明显,低的平衡状态是稳定的,而高的是不稳定的. 实际上,如果摆位于 b 点,任意小的冲击(即使假设开始时摆恰恰位于 b 点上),都足以使摆加速地由 b 点开始运动,并且远离 b 点的邻域. 静止在 a 点的摆的情况就完全不一样了. 摆受到冲击后便以逐渐减小的速度开始运动,并且冲击越小,离开 a 点的距离也越小,然后,返回来并在 a 点附近振动. 在充分小的冲击下,摆不会跑出 a 点附近的任意给定的区域,而且速度也不会超过任意给定的值.

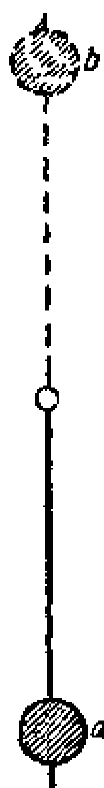


图 15

根据这个例子,利用已经引入的关于相平面的概念,我们着手给平衡状态的稳定性下一个定义. 设所研究的系统位于平衡状态,这时相平面上的相点静止地位于积分曲线方程的一个奇点上. 如果现在我们使系统离开平衡状态,例如,给它某一个冲击[1],则相点将离开奇点并开始在相平面上运动. 为叙述简单起见,将相点"涂"成黑色,奇点"涂"成白色(图 16). 我们可以这样表征描述稳定平衡状态的特

---

1) 在稳定性理论中,通常研究的都是"瞬时"冲击,其作用是能使相平面上的相点有瞬时的位移,换句话说,亦即,能使初始条件有瞬时的改变. 当然,这是真实冲击的一个理想化.

征：如果初始位移充分小时，黑点永远不会远离白点，则白点是稳定的平衡状态[1]。

显然，这种描述是不完整的。第一，如果沿某一些方向的初位移不会使黑点远离白点，而沿其他方向，无论初位移多小，都会使它远离白点，我们是否说白点是稳定的呢？自然地，这样的白点是不稳定的；可以说，当不允许某类型位移时，白点仅是"条件"稳定的。对于稳定性，必须要求：任何方向的充分小的初位移，都不会使黑点远离白点。

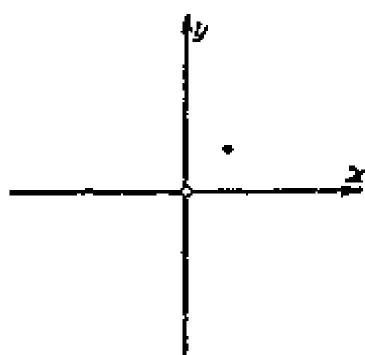


图 16

第二，(也是最重要的)"不远离"、"停留在附近"等等，都不是完全确定的术语。很明显，"近"和"远"的概念与问题的具体物理条件有关。因此，"远"和"近"二词的含义不是别的，而是指：黑点是否跑出环绕白点的某一给定区域，并且，这一区域可大可小，它依赖于问题的条件。

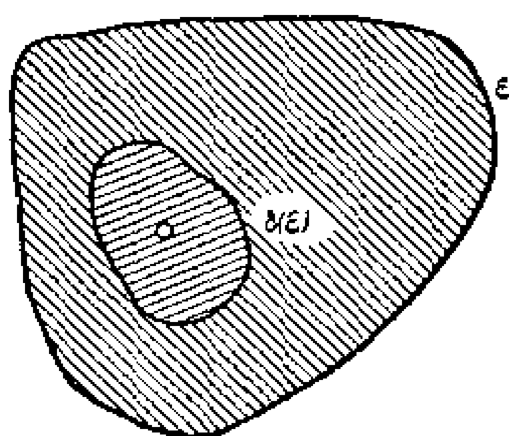


图 17

因此，最后我们得到这样的定义(图 17)：如果任意给定一个对于平衡状态的允许偏离的区域(ε 域)，我们可以找到一个包含平衡状态的区域 $\delta(\varepsilon)$，它具有下述性质：任何一个从 δ 内开始的运动，永远不会到达 ε 域的边界，那末，平衡状态是稳定的。反之，如果可以指出这样一个对于平衡状态的偏离区域(ε 域)，且对它来说，不存在一个包含平衡状态的 $\delta(\varepsilon)$ 区域，此区域具有下述性质：任一从 δ 内开始的运动，永远不会到达 ε 域的边界，那末，平衡状态是不稳定的。

这些定义和所研究的系统的相平面概念有着密切的联系。但

1) 这个条件常常叙述为：如果充分小的扰动永远保持是微小的话，则平衡状态是稳定的。

是，也可以不利用相平面的概念，给出这个定义。

还可以把稳定性的定义写成数学不等式的形式，以 $x(t)$ 和 $y(t)$ 表示初始偏离后黑点的运动，并为简单起见，假设允许偏离的区域 ε 是一正方形(图 18)。于是我们的定义可以写成这样：如果先给定一任意小的 $\varepsilon(\varepsilon>0)$，可以找到这样的 $\delta(\varepsilon)$，使得，若 $t=0$ 时，

$$|x(0)-\bar{x}|<\delta 及 |y(0)|<\delta,$$

则当 $0<t<\infty$ 时，有：

$$|x(t)-\bar{x}|<\varepsilon 及 |y(t)|<\varepsilon,$$

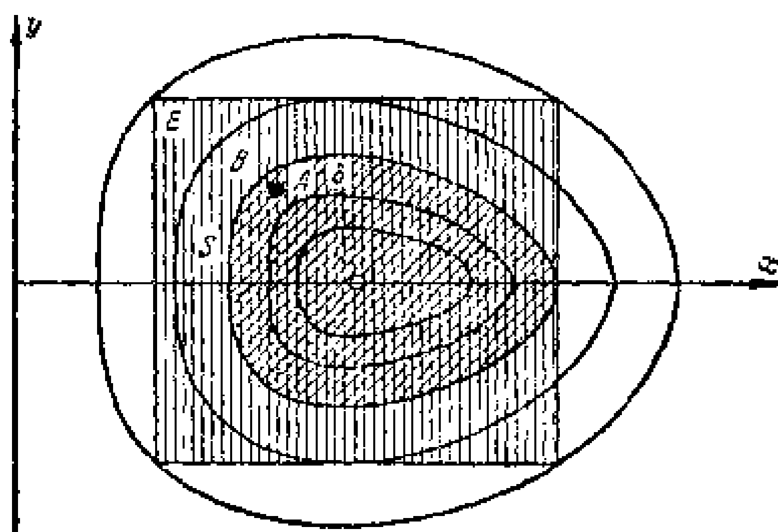


图 18

则平衡状态 $x=\bar{x}$, $y=0$ 称为稳定的。这样定义的稳定性，我们称之为“按李亚普诺夫的稳定性”，今后为简单计，凡说到稳定性时，指的就是这种稳定性。后面我们还将介绍稳定性的其他定义，以及李亚普诺夫的工作[84]在稳定性理论中的意义。

现在我们来分析谐振子平衡状态的稳定性。在这一分析中，顺便地可以清晰地说明，为什么定义稳定性时，必须谈到 ε 与 δ 这两个区域。

不难确信，中心型的奇点对应于稳定的平衡状态。设给定了一个任意小的 ε 区域，例如一个正方形(图 18 中的垂直纹区)。从环绕奇点的闭曲线中，选择一个切于给定正方形而完全位于此正

方形之内的闭曲线 S. 顺便地指出，不论奇点邻域中的闭积分曲线是椭圆还是其他形状的，这总是可以作到的. 为了有这种曲线 S 存在，仅要求存在着闭曲线连续统，而且这些闭曲线没有奇异性质，并且是层层相套的，并可收缩为一点；在中心情况中，总是这样的. S 内的区域(双斜线部分)就是 $\delta(\varepsilon)$ 域，因为，如果黑点的初始位置位于这个区域之内 (A 点)，则无论什么时候，它都不会越出正方形 ε，并将绕平衡状态作周期运动. 当然，我们可以在曲线 S 内，选取任何其他区域作为 δ 域，例如，选取除了顶点可以在曲线 S 上之外，所有点都在曲线 S 内的正方形[1]. 这样，我们可以断言，中心型的平衡状态是稳定的平衡状态.

§4. 有阻尼的线性振子

为了回答阻尼起着重要作用的问题，对于我们研究的谐振子，必须将上面所作的一个理想化的特点——没有阻尼——去掉，并保留其他理想化. 假定阻力与速度成正比. 这个假设亦是一个理想化，那就是，真实阻力规律的理想化，当速度不大时，对于液体阻力或气体阻力，这一理想化和实验是很符合的. 任何其他阻力规律都将破坏谐振子的线性性质，同时目前我们只限于研究线性系统.

在上述关于阻力规律的假设下，运动方程可写为：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0, \tag{1.14}$$

其中 b 是阻力系数，亦即，单位速度时的阻力. 具有欧姆电阻的"汤姆逊回路"，是相似于这种具有正比于速度的阻力的机械系统的电系统. 这种回路的方程是：

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0, \tag{1.15}$$

其中 q 是电容器板的电量，而 L, R, C, 和通常一样，分别为电感、

---

1) 很明显，不能把 ε 区域本身取作 $\delta(\varepsilon)$ 区域，因为当所有黑点的初位置在 ε 区域内而在 δ 区域以外时，如初位置位于 B 点 (图 18)，那末黑点必将越出 ε 区域.

电阻及电容.

令 $b/m = 2h$; $k/m = \omega_0^2$(或相应地 $R/L = 2h$; $1/LC = \omega_0^2$)可将方程 (1.14) 与 (1.15) 写成普通的形式:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{1.16}$$

如所周知,这个方程的解的形式是[1]:

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, \tag{1.17}$$

其中 λ_1 与 λ_2 是下面的二次方程的根:

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = 0. \tag{1.18}$$

如所周知,当 $h^2 > \omega_0^2$ 时,这些根都是实的,而当 $h^2 < \omega_0^2$ 时,是复的. 因此,根据 $h^2 - \omega_0^2$ 的符号不同,我们分别地得到两种类型的解和两种不同的过程: 当 $h^2 < \omega_0^2$ 时,得到衰减的振动过程,当 $h^2 > \omega_0^2$ 时,得到衰减的非周期过程.

1. 衰减振动过程 当阻尼甚小时,即 $h^2 < \omega_0^2$ 时,特征方程 (1.18) 的根为:

$$\lambda_{1,2} = -h \pm j\omega,$$

其中

$$\omega = +\sqrt{\omega_0^2 - h^2}, \quad j = \sqrt{-1}, \tag{1.19}$$

而方程 (1.16) 的通解为:

$$x = e^{-ht}(A\cos\omega t + B\sin\omega t), \tag{1.20}$$

其中 A 与 B 由初始条件决定. 如果 $t = 0$ 时, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, 则

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{-ht}\left\{x_0\cos\omega t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{\omega}\sin\omega t\right\}, \\ \dot{x} &= e^{-ht}\left\{\dot{x}_0\cos\omega t - \frac{\omega_0^2 x_0 + h\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

解 (1.20) 还可以写成如下形式:

$$x = Ke^{-ht}\cos(\omega t + \alpha),$$

其中

---

1) 除特殊情况 $h^2 = \omega_0^2$ 外.

$$
\left.
\begin{aligned}
K &= +\sqrt{A^2+B^2} = +\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0+hx_0}{\omega}\right)^2},\\
\operatorname{tg}\alpha &= -\frac{B}{A} = -\frac{\dot{x}_0+hx_0}{\omega x_0}\\
&\left(\cos\alpha=\frac{x_0}{K},\quad \sin\alpha=-\frac{\dot{x}_0+hx_0}{\omega K}\right).
\end{aligned}
\right\}\tag{1.22}
$$

对速度也可得出类似的表达式:

$$
\dot{x} = -K\omega_0 e^{-ht}\sin(\omega t+\alpha+\vartheta),\tag{1.23}
$$

其中 ϑ 由下列关系式决定:

$$
\left.
\begin{aligned}
h &= \omega_0\sin\vartheta,\\
\omega &= \omega_0\cos\vartheta.
\end{aligned}
\right\}\tag{1.24}
$$

公式(1.22)与(1.23)决定一种类型的衰减振动,即振动地衰减过程,其振幅是按指数规律衰减的.

得到的函数 $x(t)$ 及函数 $\dot{x}(t)$,都不是周期函数. 实际上,如所周知,如果对于函数 $f(t)$,可以指出某个数 τ,使得对于自变量 t 的任意值,都有

$$
f(t+\tau)=f(t)
$$

时,则函数 $f(t)$ 称之为周期函数. 最小的 τ 值称为函数 $f(t)$ 的周期. 函数(1.22)和(1.23)都不符合这个定义; 因为上述条件不是对任意自变量 t 的值都满足的. 因此,在严格的意义下,周期在这情况中是不存在的. 然而系统相继两次通过平衡位置之间(在相同的方向)的时间,或在相继二个最大偏离(同一侧)之间的时间是常数并等于 $T=\frac{2\pi}{\omega}$. 这个时间间隔,我们称为衰减振

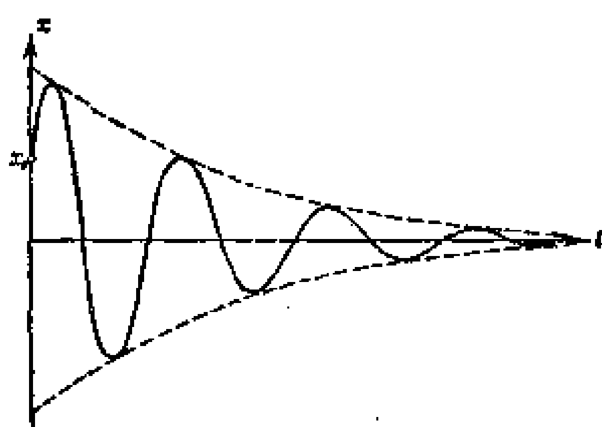


图 19

动过程的"条件周期"．坐标对时间的关系如图 19 所示[1]．

所研究的振动过程衰减的速度可以用量 h，即所谓的衰减指数来表征． h 的数值与所选的时间单位有关． 但是，可以另取一个不依赖于时间单位选择的特征量来表示过程的衰减．

取两个同侧的相继极值之比，例如两个最大值之比：

$$\frac{x'_{\max}}{x''_{\max}} = e^{hT} = e^{\frac{2\pi h}{\omega}}.$$

这个量的对数，或者说，两个相继最大值的对数之差，称为衰减的对数减缩 d，且有：

$$d = hT = \frac{2\pi h}{\omega}. \tag{1.25}$$

为了再用一种方法说明对数减缩 d 的物理意义，可看出，倒数 $1/d$ 等于条件周期的个数，经过这样的时间后，振幅减小到 $1/e$（e 是自然对数的底）[2]．

不难看出，得到的振动衰减规律，和对阻力规律所进行的理想化有着紧密的联系． 只有假设了阻力正比于速度，最大值才按公比为 e^{-d} 的几何级数规律而减小． 另一方面，很明显，只有在这种衰减规律下，衰减的对数减缩的概念才有确定的意义，如果衰减的规律使得两个相继极大值之比不再是常数时，对数减缩便失去了意义．因而，没有特殊附加条件的话，衰减的对数减缩这一概念，只能用于线性系统． 衰减的对数减缩，可以按图 19 所示的曲线，或者按由此曲线得到的、在半对数坐标（用最大偏离的对数代替沿纵轴的偏离）上表示的极值对时间的关系求出． 在后一情况中，得到的关系是一条直线，其斜率就是衰减指数 h，乘上条件周期 T，便得到衰减的对数减缩 d（但是，实际上，常常用按共振曲线确定

---

1) 应注意，偏离 (x) 取极值（极大和极小）时的时间，距此极值前后那两个偏离为零时的时间值，并不相同，亦即，不在这两个时间值的中点上，而向左偏一时间距离 $\frac{\vartheta}{\omega}$，其中 ϑ 决定于公式 (1.24)．

2) 例如，如果 $d = 0.02$，则这意味着，经过 50 个条件周期后，振幅将减小到 $1/e$、即约为最初值的 1/3．

衰减的更方便的方法,来代替这种直接方法).

我们看到,衰减振动可用四个量来表征: 条件周期T(或对应的条件圆频率 ω)、衰减的对数减缩 d、振幅K及相位 α.

振动的条件周期与衰减的对数减缩决定于系统的性质; 而振幅与相位仍然是任意的,它们决定于初始条件.

2. 衰减振动过程在相平面上的表示 现在进一步研究所考虑的系统的相平面,并作出表示系统的全部可能运动的图象.

知道了微分方程 (1.16) 的解, 就可以求出相轨线族的方程. 根据 (1.22), 相平面 x, y 上之轨线的参数方程为:

$$\left.\begin{aligned} x &= Ke^{-ht}\cos(\omega t+\alpha), \\ y &= \dot{x} = -Ke^{-ht}[h\cos(\omega t+\alpha)+\omega\sin(\omega t+\alpha)]. \end{aligned}\right\} \quad (1.26)$$

可证明,相轨线族是一个以原点为渐近点的螺线族.

为了达到这个目的, 利用对坐标作线性变换的方法——以后我们常常要用到这个方法. 由变量 x, y 变换到变量:

$$u=\omega x, \quad v=y+hx, \quad (1.27)$$

新变量可以解释为另一平面上的笛卡儿坐标 (即所谓的坐标变换的"积极"解释[1]). 显然如果记 $\omega K=C_1$, 则

$$u=C_1e^{-ht}\cos(\omega t+\alpha), \quad v=-C_1e^{-ht}\sin(\omega t+\alpha).$$

利用极坐标 ρ 及 $\varphi(u=\rho\cos\varphi,\ v=\rho\sin\varphi)$, 在 u, v 面上,相轨线的方程具有更简单的形式:

$$\rho=C_1e^{-ht}, \quad \varphi=-(\omega t+\alpha),$$

或者,消去时间,

$$\rho=Ce^{\frac{h}{\omega}\varphi} \quad (1.28)$$

(这里 $C=C_1e^{\frac{h\alpha}{\omega}}$ 是新的任意常数).

1) 坐标变换的"积极"解释指的是: 将变换 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 看成是某一点变换的规律, 此变换把 x, y 平面变为有正交(笛卡儿)坐标系 u, v, 且有相应的图形变形的另一平面.

在我们这里的线性齐次变换(1.27)的情况中,图形的变形只是简单的转动,和沿所谓的二个主轴的均匀伸长或缩短. 不难确信, x, y 平面上之每一条通过坐标原点的直线,经变换 (1.27) 后,仍然是通过坐标原点的直线, 同时, 在这些直线上,对应点到坐标原点的距离 (分别在 x、y 面上及 u、v 面上) 互成正比.

这样，相轨线在 u, v 平面上就是以坐标原点为渐近点的对数螺线族（图 20）．在这种情况下，由于 φ 随时间而减小，而当 $t\to+\infty$ 时，$\rho\to 0$，于是相点在 u, v 面上沿螺线移动，并渐近地趋向坐标原点．

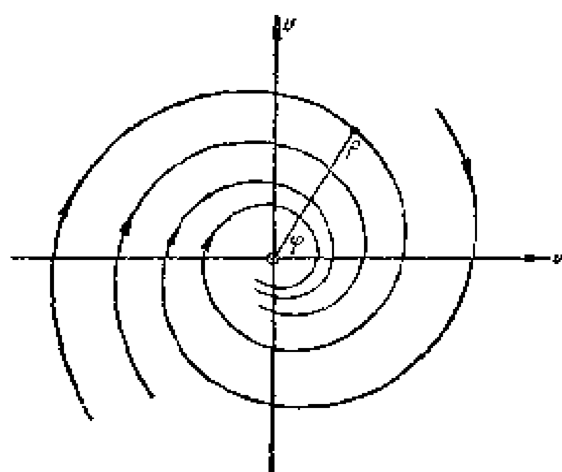


图 20

返回到 x, y 面．注意到：

$$\rho^2 = u^2 + v^2 = \omega^2x^2 + (y + hx)^2 = y^2 + 2hxy + \omega_0^2x^2,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{v}{u} = \operatorname{arctg}\frac{y+hx}{\omega x},$$

由（1.28）我们可得到相轨线的坐标方程（消去时间后）为：

$$y^2 + 2hxy + \omega_0^2x^2 = C^2e^{2\frac{h}{\omega}\operatorname{arctg}\frac{y+hx}{\omega x}}. \tag{1.29}$$

因为在作逆变换（从 u, v 到 x, y）时，相轨线的变形不可能改变其定性性质，那末我们可以断言：x, y 面上的相轨线族（1.29），也是以坐标原点为渐近点的螺线族．

关于这些螺线的性质，可以提出下列几点．当 h/ω 不大时，即衰减的对数减缩不大时，对数螺线（1.28）的每一转都甚接近于相应的圆 $u^2+v^2=$常数．经线性变换(1.27)后，这个圆变成椭圆 $y^2 + 2hxy + \omega_0^2x^2 =$ 常数．由此，我们可以得到结论，当 h/ω 不大时，我们所研究的螺线（1.29）在每一转的伸展上，都甚接近于椭圆（具有适当选择的常数值）：

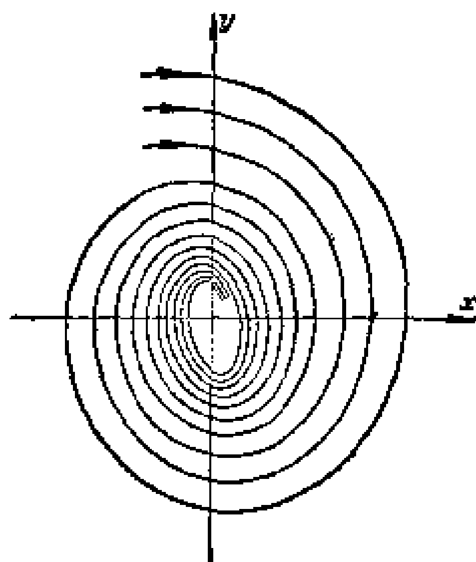


图 21

$$y^2 + 2hxy + \omega_0^2x^2 = \text{常数}. \tag{1.30}$$

在图 21 上，表示出了我们研究的螺线——x, y 面上的相轨线

族．相点沿任一螺线运动时，都将渐近地（当 $t\to+\infty$）趋向作为平衡状态的坐标原点．相点的向径在每一转后都将减小（按长度）．

我们来计算经过半转、一转等等之后，向径长度减小的量．为此，在 x, y 面上作通过坐标原点的任意一条直线，并以 $r_0, r_1, r_2\cdots$ 记这条直线与某螺线(1.29)的交点到坐标原点的距离(图 22)．在变换(1.27)下，所作直线连同上述交点，仍将变为通过坐标原点的直线，同时，如前所指出过的：

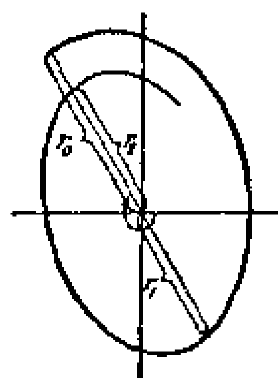


图 22

$$r_0:r_1:r_2:\cdots=\rho_0:\rho_1:\rho_2:\cdots,$$

其中以 $\rho_0, \rho_1, \rho_2\cdots$ 表示在 u, v 面上之变换后的交点到坐标原点的距离．

由此可知，在 x, y 面上，沿螺线(1.29)运动之相点的向径 r 每半转，也对应于 u, v 面上之向径 ρ 的半转（在此半转中，φ 角在时间间隔 $\pi/\omega=T/2$ 内，减少一角度 π）．根据(1.28)，显然有

$$\rho_1=\rho_0 e^{-\frac{h\pi}{\omega}},$$

$$\rho_2=\rho_0 e^{-2\frac{h\pi}{\omega}},\ \cdots$$

因为距离 $r_0, r_1, r_2\cdots$ 和 $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \cdots$ 成正比，那末显然，x, y 面上相点向径的长度经过半转后，等于：

$$r_1=r_0 e^{-\frac{\pi h}{\omega}}=r_0 e^{-\frac{d}{2}}, \tag{1.31}$$

经一转之后，等于：

$$r_2=r_0 e^{-\frac{2\pi h}{\omega}}=r_0 e^{-d},$$

而 n 转之后，等于：

$$r_{2n}=r_0 e^{-nd}. \tag{1.32}$$

可以看到，向径是按前已求出的指数规律减少的，其衰减的对数减缩为 $d=hT$．

这样，我们就阐明了相轨线的性质．还可以阐明，通过相平面

上的每一点，有一条且仅有一条螺线，它对应于一定的常数值 C，换句话说，对应于一定的初始条件. 整个平面充满了层层卷迭的螺线，相点沿着这些螺线渐近地（当 $t \to +\infty$）趋向于坐标原点. 例外的只有平衡状态（点 $x=0, y=0$），它应看成是一条单独的相轨线. 当相点沿螺线运动时，相速度无论何时都不等于零，只是随着转动渐渐地减小，同时，每转的时间是不变的，它等于 $T=\frac{2\pi}{\omega}$. 对于轨线 $x=0, y=0$ 所表示的"运动"，相速度恒等于零.

3. 微分方程的直接研究 我们在相平面上研究了有阻尼（阻尼与速度成正比）的线性振子的运动性质，并阐明了，相点沿以坐标原点为渐近点的螺线形相轨线的运动，对应于小衰减（$h^2<\omega_0^2$）过程. 在此情况中，坐标原点就是平衡状态. 但是，相平面上的图象是从已经求出的解（1.20）得到的. 不知道解（1.20），我们也能直接地从（1.16）得到这一图象.

象以前那样，以下列两个等价的一阶方程，代替原来的二阶方程（1.16），它们是：

$$\frac{dx}{dt}=y,$$

$$\frac{dy}{dt}=-2hy-\omega_0^2x. \tag{1.33}$$

二者相除，便得到积分曲线的微分方程：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2hy-\omega_0^2x}{y}. \tag{1.34}$$

不难看出，和方程（1.11）一样，这个方程在相平面上决定某个切线场，而与方程（1.33）一起，决定某个有唯一奇点 $x=0, y=0$ 的向量场.

利用等倾线，很容易近似地研究这个场的性质，各点上积分曲线斜率为 κ 的等倾线之方程为：

$$\frac{-2hy-\omega_0^2x}{y}=\kappa \text{ 或 } y=\sigma x,$$

其中

$$\sigma = -\frac{\omega_0^2}{\kappa + 2h}, \tag{1.35}$$

亦即，在此情况中，等倾线也是通过坐标原点的直线．例如，给出充分多的、一系列的 κ 值（当决定于系统的 h 与 ω_0 取固定值时），便得到一等倾线族，利用它们就能作出向量场，并可以精确到需要的程度[1]．

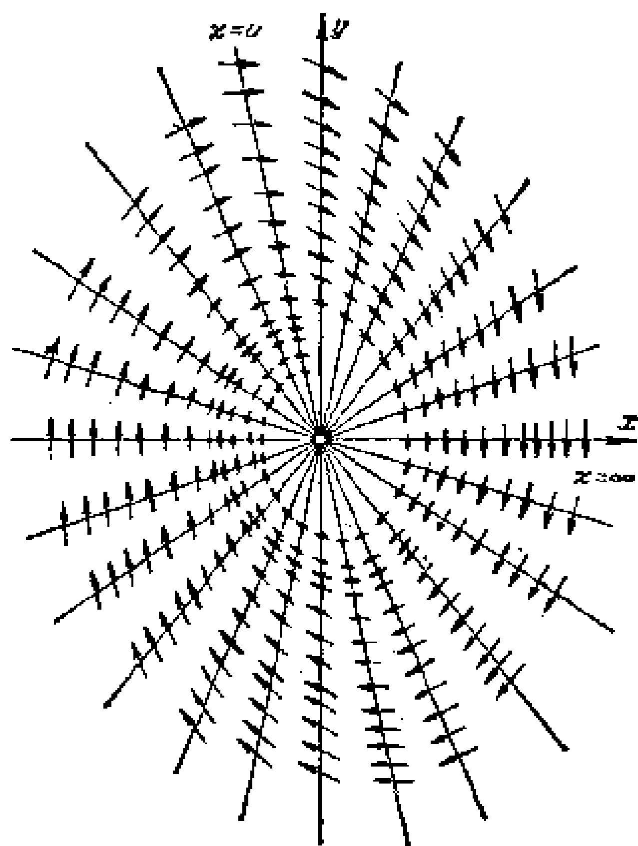


图 23

图 23 上表示出了用一些等倾线作出的这种向量场，从这个图已经能够预测积分曲线的特性了．

消去时间后所得到的方程 (1.34) 可以积分，因为它是齐次方程．

按普通规则积分之（置 $z = y/x$），在此情况中（$h^2 < \omega_0^2$），得到积分曲线的方程为：

$$y^2 + 2hxy + \omega_0^2 x^2 = C e^{2\frac{h}{\omega}\operatorname{arctg}\frac{y+hx}{\omega x}},$$

这个方程我们已经研究过了[2]．现在我们是在不知道方程 (1.16) 的解的情况下，用另一种方法得到了这一方程的．从方程 (1.13) 及 (1.33) 可求出相速度 $\mathbf{v}$ 的表达式：

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}y + \mathbf{j}(-2hy - \omega_0^2 x)$$

及

$$|\mathbf{v}|^2 = \omega_0^4 x^2 + 4h\omega_0^2 xy + (1 + 4h^2)y^2. \tag{1.36}$$

---

1) 我们应指出，等倾线法不仅是一个近似的数值积分方法，而且还可以用此方法，严格地证明关于积分曲线的各种论断．

2) 表达式 (1.29) 中的正积分常数 C^2，这里用 C 来表示．

利用这个方法，几乎不用任何计算，我们立即就可以看出，除了在坐标原点 $x = 0$，$y = 0$ 以外，相速度无论何时都不等于零，但是相速度随着相点向坐标原点的趋近而减小。

知道了相平面上积分曲线的特性和相速度的表达式，对于系统运动的特性，可以作出什么结论呢？

第一：可以断言，所有相轨线都对应于振动的、衰减的、且趋向于平衡位置的运动（除去沿轨线 $x = 0$，$y = 0$ 的“运动”）。事实上，所有这些轨线都是螺线，因为当相点沿螺线运动时，系统的坐标及速度多次地通过零值，所以相平面上的螺线反映着振动的过程。而且沿螺线运动的相点的向径每经一转都要减小，这就意味着运动是衰减的过程，x 与 $\dot{x}$ 的极大值都一转转地减小。第二：显然，奇点 $x = 0$，$y = 0$ 对应于平衡状态。

分析相平面上的运动特性所得的结果，可以叙述如下：除去初始条件恰好对应于平衡状态这一唯一情况以外，在任意的初始条件下，我们的系统都作环绕平衡位置 $x = 0$，$y = 0$ 的衰减振动。

在所研究的情况中，积分曲线族只有一个奇点，它是所有积分曲线的渐近点。这种奇点，所有层层卷迭之螺线形积分曲线的渐近点，我们称之为焦点。

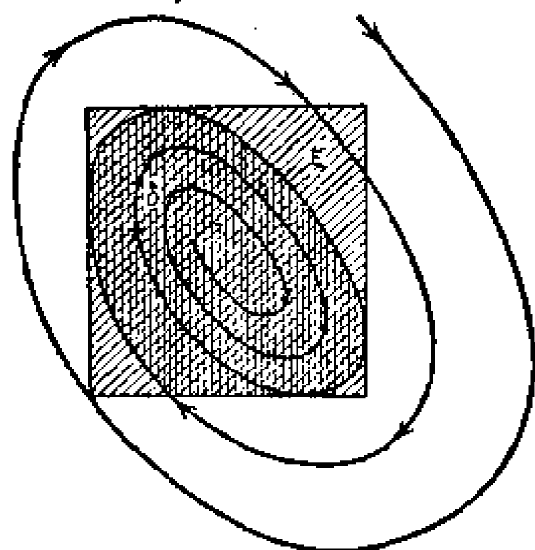


图 24

现在来说明，在此情况中，焦点型的奇点是否稳定的问题。注意到，相点沿所有积分曲线都作趋近于奇点的运动，很容易证实，前面所讲的平衡状态的稳定条件，在此情况中，是满足的。实际上，我们总可找到这样的 δ 域（图 24 中的双斜线区），使得相点不致越出 ϵ 区域（单斜线区）的边界。因此，在我们所研究的情况中，平衡状态是稳定的，而奇点是稳定焦点。焦点型奇点的稳定性，显然跟积分曲线是卷拢的还是展开的有密切关系，而卷拢及展

开是按相点运动方向决定的．因为相点运动的方向单值地决定于坐标的选择（相点应该沿顺时针方向运动）*，那末（因为时间坐标方向是不变的）就可单值地确定奇点在所研究之情况中的稳定性．反之，如果螺线是展开的（假定沿同一方向），那末奇点就是不稳定的．很容易证实，例如，根据方程（1.28），积分曲线卷拢的条件为 $h > 0$，因为只有在这个情况中，沿顺时针方向运动时，向径才减小．

这样，一般来说，焦点型的奇点可以是稳定的，也可以是不稳定的（和中心型奇点不同，正象我们见到的那样，中心总是稳定的）．在所讨论的情况中，焦点是稳定的，因为 $h > 0$．这一稳定条件的物理意义是明显的：阻力应该是正的，亦即，应该阻止运动而且消耗能量．这种阻止运动的、而且消耗功的正阻力，不会引起不稳定，并且，若在无阻尼时（在谐振子中）系统的平衡位置是稳定的，则它在有正阻力时，仍然是稳定的．在以后的研究中我们会遇到不稳定焦点型的奇点．

我们研究过的稳定焦点比前节研究过的中心具有“更强的”稳定性．实际上，在稳定焦点的情况中，不仅能满足李亚普诺夫稳定的条件，而且还能满足更强的要求．这就是，在任意初偏离下，经过充分长的时间间隔之后，系统又将任意地接近平衡位置．这种使初偏离不仅不增加，相反地，反而衰减的稳定性，我们称之为**绝对稳定性**．在我们所研究的线性振子的情况中，焦点是绝对稳定的．

4．衰减非周期过程　现在研究特征方程之根为实数的情况，亦即当 $h^2 > \omega_0^2$ 的情况．此时，令

$$q = +\sqrt{h^2 - \omega_0^2}, \tag{1.37}$$

得特征方程的根为：

$$\lambda_1 = -h + q = -q_1, \quad \lambda_2 = -h - q = -q_2 \tag{1.38}$$

---

* 括号中的话应该这样理解：对振动方程而言，化为两个一阶的微分方程时，引入了 $y = \dot{x}$；如果引入 $y = -\dot{x}$，那么，相点将沿逆时针向运动——译者注．

$(q_2 > q_1 > 0)$. 因此，方程(1.16)的通解可写为：

$$\left.\begin{aligned} x &= Ae^{-q_1 t} + Be^{-q_2 t}, \\ \dot{x} &= -q_1 Ae^{-q_1 t} - q_2 Be^{-q_2 t}. \end{aligned}\right\} \tag{1.39}$$

其中 A 与 B 决定于初始条件. 亦就是，若 $t=0$ 时，$x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$，则：

$$x = \frac{\dot{x}_0 + q_2 x_0}{q_2 - q_1} e^{-q_1 t} + \frac{\dot{x}_0 + q_1 x_0}{q_1 - q_2} e^{-q_2 t}{}^{1)}. \tag{1.40}$$

我们的任务是研究所有可能运动之特性和初始条件之依赖关系.

第一，显然，在任何初始条件下，运动都是衰减的，因为 $q_1 > 0$ 与 $q_2 > 0$，这意味着，当 $t \to +\infty$ 时 $x(t) \to 0$. 为了更详细地说明衰减的特性，我们求出 t_1 与 t_2——x 与 $\dot{x}$ 分别为零的瞬时（亦即初瞬时以后的两个时间间隔）. 利用(1.40)，可求得下列决定 t_1 与 t_2 的方程：

$$e^{(q_2-q_1)t_1} = \frac{\dot{x}_0 + q_1 x_0}{\dot{x}_0 + q_2 x_0} = 1 - \frac{x_0(q_2 - q_1)}{\dot{x}_0 + q_2 x_0}, \tag{1.41}$$

$$e^{(q_2-q_1)t_2} = \frac{q_2(\dot{x}_0 + q_1 x_0)}{q_1(\dot{x}_0 + q_2 x_0)} = 1 + \frac{\dot{x}_0(q_2 - q_1)}{q_1(\dot{x}_0 + q_2 x_0)}. \tag{1.42}$$

由这些方程立刻可以看出，每个方程的根都不多于一个；这样，振动式的衰减是不可能的，我们得到了所谓的非周期过程.

我们来说明，何时决定 t_2 的方程没有一个正根. 在此情况中，运动**单调地**衰减，渐近地趋向于零. 从 t_2 的表达式(1.42)可以看

1) 当 $h^2 > \omega_0^2$ 时，以双曲线函数的形式表示方程(1.16)的解，常常会更方便些：通解的形式为

$$x = e^{-ht}(A \operatorname{ch} qt + B \operatorname{sh} qt),$$

而满足初始条件，$t=0$ 时，$x=x_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$ 的解为：

$$x = e^{-ht}\left\{x_0 \operatorname{ch} qt + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{q} \operatorname{sh} qt\right\},$$

$$\dot{x} = e^{-ht}\left\{\dot{x}_0 \operatorname{ch} qt - \frac{\omega_0^2 x_0 + h\dot{x}_0}{q} \operatorname{sh} qt\right\}.$$

后一表达式是将式(1.21)中的三角函数代以相应的双曲线函数，并以 ω 代 q 得到的.

出，如果

$$\frac{\dot{x}_0}{\dot{x}_0+q_2x_0}<0, \tag{1.43}$$

便有这种情况。图 25 中表示了初始条件满足这一不等式的区域（区域 II）。对于其余的初值 $\dot{x}_0/(\dot{x}_0+q_2x_0)>0$——决定 t_2 的方程有正根；这意味着，位移不是单调地减小，而是起先绝对值增大，只有在达到某个极值以后，才开始减小，并渐近地趋向于零。

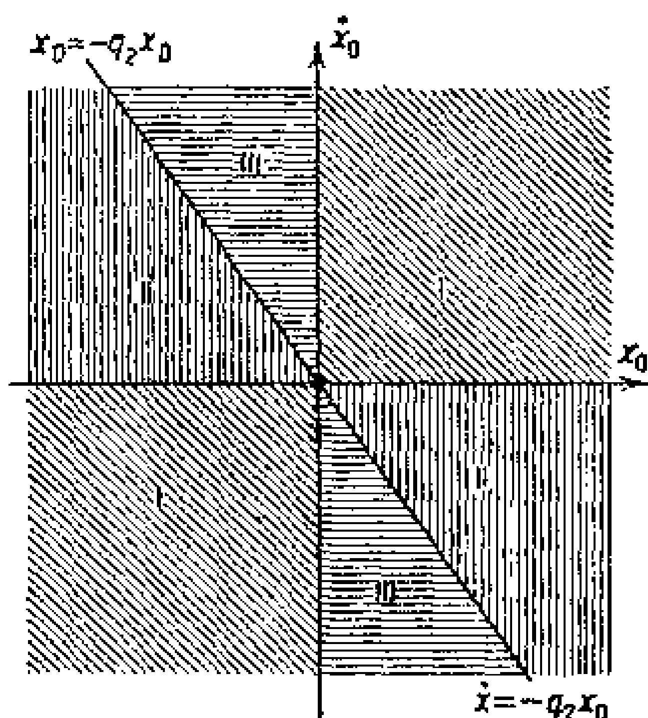


图 25

对所研究的初始条件而言，根据决定 t_1 的方程有或没有正根，这里必须区分两种情况。如果没有这样的正根，则位移在整个运动期间内 $(0<t<\infty)$ 不变号；系统离开平衡位置，先达到某个极大的偏离，然后单调地趋近平衡位置（但是不通过平衡位置）。根据 (1.41)，当

$$\frac{x_0}{\dot{x}_0+q_2x_0}>0 \tag{1.44}$$

时，就会发生这种情况。图 25 中的第 I 区就表示会发生这种类型运动的初值区。

如果决定 t_1 的方程有一个正根，那么，系统起初趋向平衡位置，在 $t=t_1$ 通过平衡位置，又当 $t=t_2$ 时，在与初偏离相反的方向达到某个极大偏离，最后单调地趋近于平衡位置，但是，在有限时间内不能到达平衡位置[1]。

---

1) 不难由方程 (1.41) 与 (1.42) 看出，$e^{(q_2-q_1)(t_2-t_1)}=q_2/q_1$ 成立，因此，必然有 $t_2>t_1$。

图 25 中的第 III 区对应着会发生这种运动的初值区.

运动特性与初始条件间的关系，还可以用作图方法表示成其他形式，那就是，对所有三种情形 I, II, III，都作出位移与时间的关系，即如图 26 所示，同时在所有情况中，都假定了初位移 $x_0>0$.

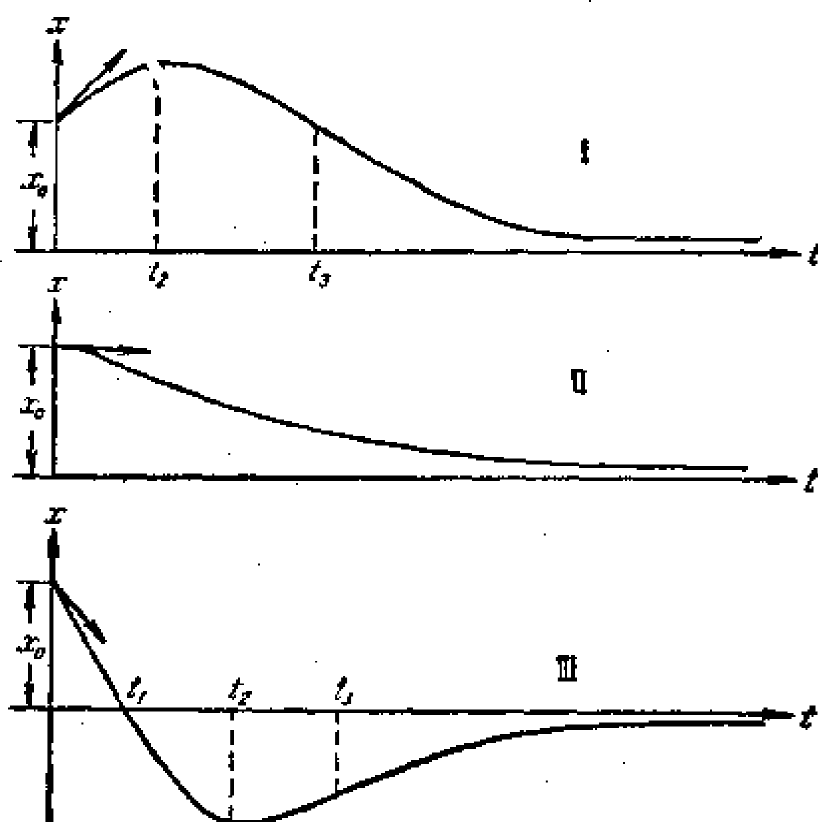


图 26

5. 非周期过程在相平面上的表示 现在来研究相平面 x, y ($y=\dot{x}$) 上的相轨线. 方程 (1.39) 是所考虑情况中相轨线的参数方程，从中消去时间 t[1]，不难求得积分曲线的坐标方程：

$$(y+q_1x)^{q_1}=C(y+q_2x)^{q_2}. \tag{1.45}$$

为了研究这个曲线族，再作线性变换：

$$y+q_1x=v;\quad y+q_2x=u.$$

1) 例如，可以这样进行. 从方程 (1.39) 解出 Ae^{-q_1t} 和 Be^{-q_2t}，便得到：

$$y+q_1x=(q_1-q_2)Be^{-q_2t},\quad y+q_2x=(q_2-q_1)Ae^{-q_1t}.$$

求出第一式的 q_1 次方，第二式的 q_2 次方，然后将得到的结果相除，便得到 (1.45).

变换后,在新变量中方程(1.45)具有简单的形式:

$$v = Cu^{\alpha}, \quad 其中\ \alpha = \frac{q_2}{q_1} > 1. \tag{1.46}$$

把 u 与 v 当成直角坐标,我们可以说,变换后得到了"抛物线"族,并且,由于 $\alpha > 1$: 1) 所有积分曲线,除对应于 $C = \infty$ 的曲线外,都在坐标原点和 u 轴相切,因为 $dv/du = C\alpha u^{\alpha-1}$,所以 $(dv/du)_{u=0} = 0$; 2) 当 $C = 0$ 与 $C = \infty$ 时,积分曲线退化为直线:当 $C = 0$ 时,有 $v = 0$,即 u 轴;当 $C = \infty$ 时,有 $u = 0$,即 v 轴; 3) 积分曲线都以凸面对着 u 轴[1],其纵坐标的绝对值随 u 增加而单调增加*. 图 27 上表示出了这个抛物线族.

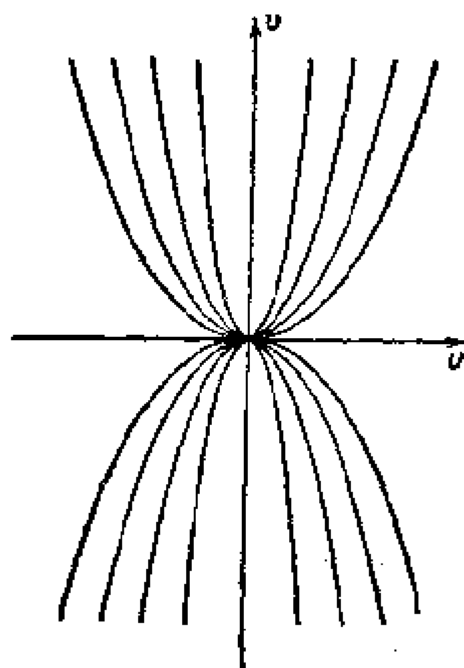


图 27

现在回到 x, y 平面. u, v 面上的 v 轴对应于 x, y 面上的直线 $y + q_2x = 0$; u 轴对应于直线 $y + q_1x = 0$. 其余的积分曲线,或更确切地说,族(1.45)的其他曲线,在 x, y 面上是切于直线 $y = -q_1x$("原来的" u 轴)的变形了的抛物线. 为了作出这个曲线族的图,还必须考虑下列情况: 1) 这族的曲线在与直线 $y = -xq_1q_2/(q_1 + q_2)$ $[q_1q_2/(q_1 + q_2) < q_1]$ 相交的点上,有水平切线; 2) 这族曲线在与 x 轴的交点处,有铅垂的切线; 3) 与 x 轴相交的曲线的斜率,在由平衡状态到 x 轴的一段上单调地增加,它们从 $-q_1$ 增加到 $+\infty$; 4) 这族曲线有抛物型的无穷支线,其轴平行于直线 $y = -q_2x$(当伸展至无限远时,曲线的斜率 $dy/dx \to -q_2$). 这个曲线族如图 28 所示.

1) 因为 $\frac{v''}{v} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{u^2}$.

* "其纵坐标的绝对值随 u 增加而单调地增加",其中的"随 u"应改为"随 u 的绝对值"——译者注.

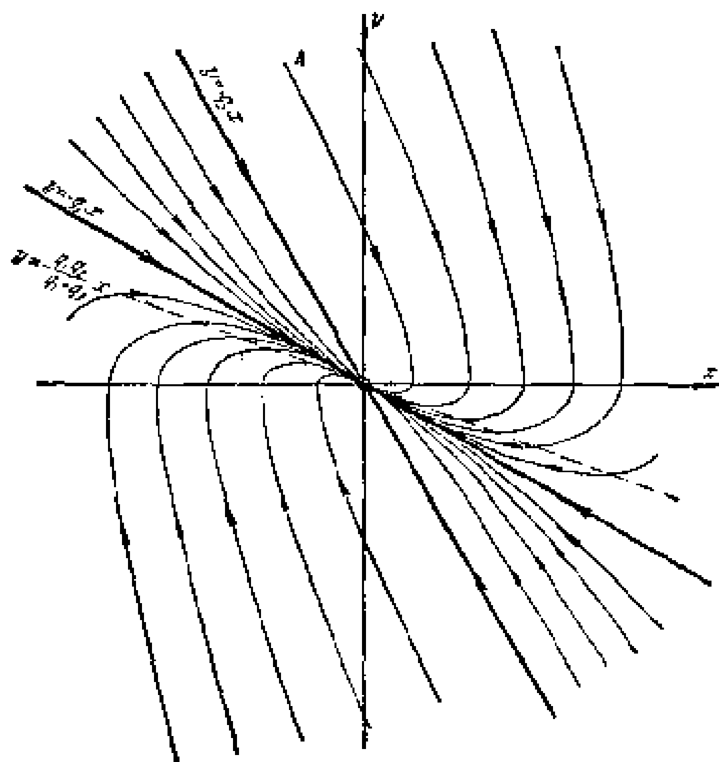


图 28

和上一情况类似，在此情况中，我们不积分方程(1.16)，而以两个与之等价的一阶方程来代替原来的二阶方程，并且从中消去时间，也可以得到相同的结果．我们得到和前一情况相同的积分曲线方程：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2hy-\omega_0^2x}{y}. \tag{1.34}$$

这个曲线族的唯一的奇点为点 $x=0$, $y=0$，它对应于系统的平衡状态．在此情况中，等倾线也是直线，它们决定于方程(1.35)．但是因为这时 $h^2>\omega_0^2$，所以等倾线的位置将有些不同(图 29)．在所研究的情况中，有两条积分曲线是通过坐标原点的直线．为了求出它们，把直线方程 $y=\beta x$ 代入积分曲线方程(1.34)．于是得到决定此二直积分曲线的角系数 β 的方程：$\beta^2+2h\beta+\omega_0^2=0$，它和特征方程(1.18)相同．在此情况中，它有两个实根：$\beta=-q_1$，$\beta_2=-q_2$，亦即，直线 $y=-q_1x$ 与 $y=-q_2x$ 都将是积分曲线．这样立刻就排除了存在环绕坐标原点之螺线形相轨线的可能性；

因而，在此系统中，也就不可能存在振动式的衰减运动.

完全类似地，在将方程(1.34)进行积分时，令 $z = y/x$，我们得到(因为 $h^2 > \omega_0^2$)和上一情况不同的结果，亦即，得到“抛物线型”积分曲线族的方程：

$$y^2 + 2hxy + \omega_0^2x^2 = C\left[\frac{\dfrac{y}{x} + h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}}{\dfrac{y}{x} + h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}}\right]^{\frac{h}{\sqrt{h^2-\omega_0^2}}}$$

或

$$(y + q_1x)^{q_1} = C_1(y + q_2x)^{q_2}, \tag{1.45}$$

其中 $q_1 = h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$，$q_2 = h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$，这个方程和前面我们用到的方法(由原微分方程的解消去 t)得到的结果完全一样.

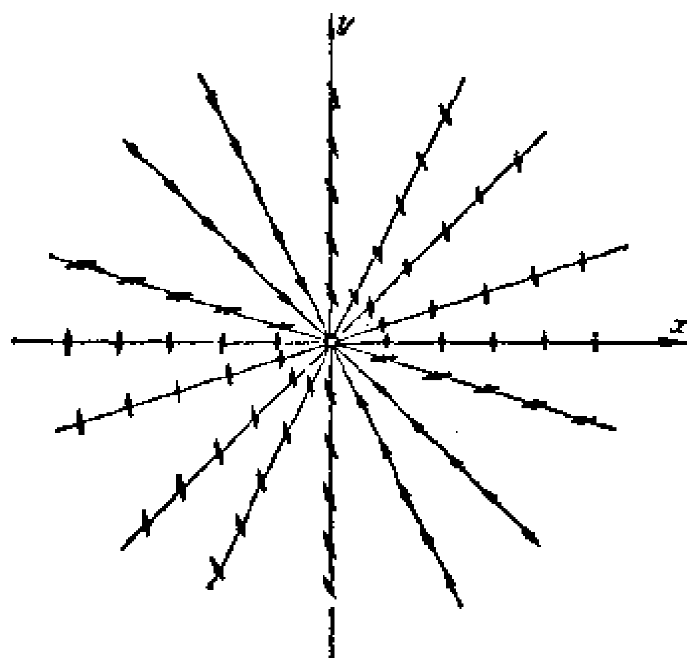


图 29

至于相点运动的方向，可用和前一情况相同的想法来确定，即根据 $y = \dot{x} > 0$ 时 x 应该增加的条件来确定. 因为，积分曲线的切线与 x 轴间夹角的正切，仅当它和 x 轴相交时才变一次号，所以立即可以看出，相点将沿积分曲线，按图 28 所示之箭头所指的方向运动，亦即，永远向坐标原点趋近. 相点运动的速度也象上情况一样，只有当同时有 $\dot{x} = 0$ 及 $y = 0$ 时，即只在所讨论之微分方程的奇点上，才等于零.

正象早已说过的那样：我们将要区分积分曲线与相轨线这二名词的不同，因为一条积分曲线可以对应于几个完全不同的运动，或换句话说，几条不同的相轨线. 例如，在所讨论的情况中，给常

数 C 以确定的值，我们还不能定出唯一的相轨线，因为在此情况中，每条积分曲线都通过奇点，因而它是由三条相轨线所组成的(其中两条对应于渐近地趋向于平衡状态的运动，第三条就是平衡状态)．在此情况中，所有积分曲线都通过奇点．这种所有积分曲线都通过的奇点，象抛物线族 $y = Cx^{\alpha}(\alpha > 0)$ 通过坐标原点那样，称之为**结点**．不难看出，在此情况中，对应于奇点(结点)的平衡状态，是按李亚普诺夫稳定的，因为相点沿所有积分曲线都是趋向于坐标原点而运动的．对应于稳定平衡状态的结点*，以后我们将称之为**稳定结点**．今后我们会确信，结点也可以是不稳定的，为此只要令 h 为负就行了．象焦点的情况一样，这个情况的物理意义在于：如果一自由度无阻尼系统的平衡状态是稳定的，那末加以正阻力，即加上要消耗功的阻力以后，不会破坏它的稳定性(其实还更强些——正阻力使平衡状态绝对稳定)．

再仔细地讨论一下图 26 所示的三种类型的非周期运动的物理特点．首先，如果初速度与初位移同号(亦即相点位于图 25 上的第 I 区内)，则系统起初将远离平衡位置，且其速度将逐渐减小(初动能用于增加势能及克服阻力而减小)．当速度减至零(t_2点)后，系统开始作返回平衡位置的运动，同时速度亦开始增加，因为这时恢复力大于阻力．但在运动中，阻力开始增加(因为速度在增加)，而恢复力在减小(因系统向平衡位置趋近)，所以，从某瞬时(图 26，I 上的点 t_3)开始，速度于此时到达极大值后，又将重新减小．其后系统将渐近地趋近于平衡位置．

在另一种情况中，当初速度与初偏离异号时，即当初冲击和初偏离反向时，产生两种不同类型的运动(II 和 III)．如果初冲击远较初偏离为小时**，则由于存在着大阻尼，系统不会穿过平衡位置，它将渐近地趋向于平衡位置(曲线 II)．如果初速度相当地大，则系统于某瞬时 t_1 通过平衡位置(曲线 III)时，还具有某一离开

---

* 原书为"对应于结点型奇点的稳定平衡状态，称之为稳定结点"——译者注．

** 应为："初冲击较小而初偏离较大时"．因为初冲击是一个力(或冲量，或冲击引起的初速度)，而初偏离是长度，二者不能直接比较——译者注．

平衡位置的速度，即具有使系统继续产生偏离的速度．此时，又成为已经考察过的第 I 型的运动；系统达到某个最大偏离以后渐近地趋向于平衡位置．这样，第 III 型运动只在其第一阶段（t_1 点之前）上，与第 I 型运动有所不同．在 t_1 点之后，第 III 型的运动和第 I 型的完全相似．另一方面，第 I 型运动在 t_2 点以后与第 II 型运动相同．所以实际上，相点沿通过所有 I, II, III 三个区域的相曲线*（例如，沿图 28 中字母 A 所表示的曲线）的运动或属于 III 型，或属于 I 型，或属于 II 型，这取决于相点初瞬时所在的区域．

对临界情况（当 $h^2 = \omega_0^2$），我们将不进行详细的讨论，而只作一简短的说明，因为这种情况（但亦象系统参数间有精确关系的其他情况一样），在物理系统中不会精确地实现的，它只有被看作二种不同的衰减过程（振动的过程和非周期的过程）的边界时，才有意义．在 $h^2 = \omega_0^2$ 的情况中，如所周知，原微分方程（1.16）的解必须按下列形式去寻求：

$$x = (A + Bt)e^{-qt}.$$

在此情况中，也可以不求解二阶微分方程，而求解决定积分曲线*的一阶方程（1.34）．在此情况中，我们也得到抛物线型的积分曲线及稳定结点型的奇点，因此，从积分曲线的性状及奇点类型的角度来看，临界情况应该归入 $h^2 > \omega_0^2$ 的情况，而不能归入 $h^2 < \omega_0^2$ 的情况．没有物理意义的 $h^2 = \omega_0^2$ 情况，对设计工作来说还是有一定的兴趣的，因为选择系统的阻尼，使得 h^2 接近于 ω_0^2，常常是有利的．一方面，这样可以消除系统中的振动，而当 h^2 远小于 ω_0^2 时，振动是不可避免的；另一方面，使系统非周期地回到零点的速度这时是最大的（比 h 值很大时为大）．正是这一条件，对于一系列的测量仪表，例如，电流计等，是最有利的．但是当系统参数有任意小的改变时，这一临界情况将变成前面所讨论的二种情况的一种，所以它没有物理意义，也不反映真实物理系统的特性．临界情况仅起边界的作用，它在形式上把系统分为振动的与非周期的．但

* 原书为“相曲线”——译者注．

是必须看到，把系统分为振动的与非周期的，这在线性系统的情况下，虽然可以进行完全严格的数学处理，但实质上，却没有很大的物理意义，因为当 h 值很大，但 h^2 还没有达到值 ω_0^2 时，系统就已经丧失了最有特征的"振动特点"了．实际上，如果 h^2 仅略小于 ω_0^2，则系统的衰减是那样的厉害，初偏离后的第二个极大值实际上已经完全看不出来了．同样地，共振现象——非自治振动系统的最有特征的现象之一——也不明显了．

这样，虽然形式上情况 $h^2=\omega_0^2$ 也是边界，但是振动过程与非周期过程的边界实际上是模糊的，不能明显地给出．顺便我们还应指出，对于某些非线性系统（例如，有"常值的""库仑"摩擦的系统，或有"平方"阻力的系统），我们将要看到，振动的与非周期的这种区分失去意义．

§5. 小质量的振子[1)]

1. 1/2 自由度的线性系统 讨论有阻尼的线性振子时，我们假设了所有振子上的三个参数——质量（电感）、阻尼系数（电阻）和弹性系数（电容的倒数）——起着同样重要的作用，并且对系统的特性和性状都有着显著的影响．在小阻尼的情况中，正象我们已经讲过的，在回答阻尼起次要作用的问题中，可以完全不计阻尼对系统运动的影响．如果阻尼很大[2)]，那末，将产生另一种情况，其他二个"振动"参数之一——质量或弹性系数（电感或电容的倒数），由于其值很小，而起次要的作用．

我们现在讨论在强阻力介质中，小质量的物体在弹簧作用下的运动（这种情况对以后将研究的所谓的"不连续"振动，有着很大的意义）．除去以前在提出有阻尼的线性振子问题时，我们所作的

1) 第1与第2小节是 H. A. 热列佐夫改写的，第3与第4小节是他新写的．

2) 我们说"小"和"大"，并没有指出和什么相比较．正象在绪论中已经指出的，这种形式的断言没有什么内容．不过在以后的讨论中就会明确，阻力或电阻应该比什么大．

那些假设之外，我们还将忽略运动物体的质量. 于是运动方程可写为一阶微分方程的形式:

$$b\dot{x} + kx = 0 \tag{1.47}$$

(和以前一样，此处 x 是相对平衡位置的位移，k 及 b 是正值的弹性系数及阻尼系数). 这样，在所讨论的情况中，我们得到了 1/2 自由度的系统. 为了单值确定系统的状态，对于单自由度的系统必须给定两个值,而现在对于 1/2 自由度系统,给定一个值就够了(例如，坐标 x). 因而，1/2 自由度系统的相空间是一维的，它已经不是平面而是一条线了.

如所周知,方程 (1.47) 的解有下形状:

$$x = Ae^{-\frac{k}{b}t},$$

或者,如果引入初始条件: $t = 0$ 时 $x = x_0$[1], 可写成

$$x = x_0e^{-\frac{k}{b}t}. \tag{1.48}$$

显然，$x = 0$ 是平衡状态; 对于所有其他初始条件 ($x_0 \neq 0$), 无质量振子作非周期衰减运动,并趋近于(当 $t \to +\infty$) 平衡状态.

在讨论相点沿相线——直线 x——的运动时，我们得到同样的图象 (图 30). 坐标原点是平衡状态;相点由其他状态向着平衡状态运动(因为在右边 $\dot{x} > 0$, 而在左边则 $\dot{x} > 0$).

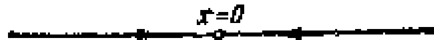


图 30

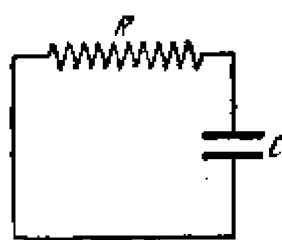


图 31

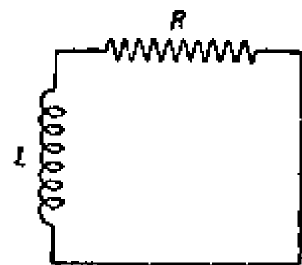


图 32

由电阻、电容组成的 (RC 回路, 图 31) 或电阻、电感组成的 (RL 回路,图 32) 电路,也是 1/2 自由度的系统. 当然，这亦是理

1) 现在,我们不能不考虑给定的 x_0, 就任意地给定初速度 $\dot{x}_0$(对于所作的理想化), 因为速度 $\dot{x}$ 和坐标 x 的值之间，存在着单值的关系式: 方程 (1.47), 此方程我们假定在任何瞬时刻,都是正确的 (当 $t = 0$ 时,得 $\dot{x}_0 = -(k/b)x_0$).

想化的系统，是从相应的真实电路得出的，但是在回路的所有各种性质中，只考虑一些基本的、对所讨论的那些问题极为重要的性质，而忽略了组成回路之某些元件的，特别是小的(寄生的)电感或电容. 这种回路的运动方程，对 RC 回路 (q 是电容器电量) 可以写为

$$R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0, \tag{1.49}$$

对于 RL 回路 (i 是回路中的电流) 可以写为

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0. \tag{1.50}$$

它们的解显然是

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad i = i_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

产生这样一个问题：把所讨论的物理系统表示为 1/2 自由度系统，其“合法”或合理的程度如何？亦即一阶微分方程 (1.47)、(1.49)、(1.50) 及其解，反映这些真实系统之运动的精确程度如何？自然，这里谈的仅是物理系统的那些运动，它们的出发状态和相应的 1/2 自由度系统运动方程是相容的(在一定的精确度上)[1]. 把解方程 (1.47), (1.49) 或 (1.50) 得到的结果和试验数据相比较，我们就能得到上述问题的解答. 这样的比较说明了，用 1/2 自由度的系统来反映相应的物理系统的运动，是合适的、“合法的”.

现在我们用分析方法来说明，考虑振子的小质量时，并得不出什么全新的东西，亦即，如果质量甚小时，在所讨论的问题中，它便不是重要的参数. 计入振子的小质量，并把小质量振子的较“完全的”方程：

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \tag{1.14}$$

的解 (其中 m 很小，但不等于零)，和一阶方程 (1.47) 的解进行比较. 给定初始条件：$t = 0$ 时，$x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, 根据 (1.40)，解的

---

1) 正象绪论中所指出的那样，采用任何给定的理想化系统时，我们只能讨论真实系统的某些运动(这些运动是从理想化方程所允许的状态开始的运动).

形式为

$$x = x_0\left[\frac{q_2}{q_2-q_1}e^{-q_1 t}-\frac{q_1}{q_2-q_1}e^{-q_2 t}\right]+\frac{\dot{x}_0}{q_2-q_1}[e^{-q_1 t}-e^{-q_2 t}], \tag{1.51}$$

其中

$$q_1=\frac{b}{2m}-\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}},\quad q_2=\frac{b}{2m}+\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}.$$

为便于比较起见，方程（1.14）的精确解（1.51）用近似解 $x_1(t)$ 代替，使得 $x_1(t)$ 与 $x(t)$ 之差以及其导数 $\dot{x}_1$ 与 $\dot{x}$ 之差，由于 m 选择得充分小，可以任意地小（对 t 一致）。

利用根式的展开式

$$\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}=\frac{b}{2m}\sqrt{1-\frac{4km}{b^2}}=\frac{b}{2m}\left(1-\frac{2km}{b^2}+\cdots\right),$$

不难得出：

$$x_1(t)=x_0\left[e^{-\frac{k}{b}t}-\frac{mk}{b^2}e^{-\frac{b}{m}t}\right]+\dot{x}_0\frac{m}{b}[e^{-\frac{k}{b}t}-e^{-\frac{b}{m}t}]. \tag{1.52}$$

可以指出，这个近似解在下述意义上逼近精确解，那就是，无论 ε 多小，总可以找到如此小的 m，使得对于区间 $0\leqslant t\leqslant+\infty$ 中的所有 t 值，都有[1]：

$$|x_1(t)-x(t)|<\varepsilon,\quad |\dot{x}_1(t)-\dot{x}(t)|<\varepsilon.$$

现在来比较（1.48）与（1.52）。以 $\bar{x}$ 记一阶方程的解，并使完全方程[2]的解和一阶方程的解，取相同的坐标初值，我们得到：

$$x_1(t)-\bar{x}(t)=\frac{m}{b}\left\{-\left(\dot{x}_0+\frac{k}{b}x_0\right)e^{-\frac{b}{m}t}+\dot{x}_0e^{-\frac{k}{b}t}\right\} \tag{1.53}$$

1）应注意，如果 m 充分地小，不是对于所有的 t 值，都能用不等式：

$$\left|\frac{x_1(t)}{x(t)}-1\right|<\varepsilon,\quad \left|\frac{\dot{x}_1(t)}{\dot{x}(t)}-1\right|<\varepsilon,\quad (\alpha)$$

来代替这些不等式的．但是，在给定的任意大的时间间隔上，选择充分小的 m，就可以使不等式（α）满足．

2）所谓完全系统与完全方程，是考虑了质量的振子及其方程的简称．

以及速度差：

$$\dot{x}_1(t)-\dot{\bar{x}}(t)=\left(\dot{x}_0+\frac{k}{b}x_0\right)e^{-\frac{b}{m}t}-\frac{mk}{b^2}\dot{x}_0e^{-\frac{k}{b}t}. \qquad (1.54)$$

因为现在我们仅讨论这样的运动，它们的初始状态和方程(1.47)是相容的(以某种精确度)，亦即，对这些初始值 $\dot{x}_0+x_0(k/b)=0$ 或接近于零，那末，立即可以从式(1.53)与(1.54)看出，差值 $x_1(t)-\bar{x}(t)$ 与 $\dot{x}_1(t)-\dot{\bar{x}}(t)$，以及 $x(t)-\bar{x}(t)$ 与 $\dot{x}(t)-\dot{\bar{x}}(t)$，当 m 选择得充分小时，可以任意地小，同时对 t（对所有 $0\leqslant t<+\infty$）一致. 解(1.48)和(1.51)相接近的条件，显然，就是下列不等式：

$$\frac{mk}{b^2}\ll 1 \text{ 或 } m\ll\frac{b^2}{k}.$$

换句话说，如果系统的初始状态和一阶方程(1.47)相容（或接近于和该方程相容的状态），那么，一阶方程就可以足够精确地(质量愈小愈精确)反映小质量振子的运动. 在此情况中，考虑质量只能得到不大的定量上的修正，而不会得出任何全新的现象；振子的质量如果甚小，它便不是主要的参数，因而，把小质量($m\ll b^2/k$)振子表示为1/2自由度的系统，表示为无质量的系统，是完全应该的.

2. 初始条件与理想化 现在讨论小质量振子的初始状态(给定 x_0 与 $\dot{x}_0$)与一阶方程(1.47)不相容的情况，亦即 $\dot{x}_0\neq-(k/b)x_0$，因而 $\dot{x}_0+(k/b)x_0$ 并不很小的情况. 在此情况中，当然，我们不能期待一阶方程能够完全反映这种振子的整个运动过程，因为这个方程在初瞬时必定不能满足. 尽管这种振子的质量甚小(质量可以任意小)，在研究这种运动时，我们还是应该利用与初条件相容的二阶方程(1.14).

为了研究现在这种情况中的小质量振子运动的特点，我们将方程(1.14)之解的近似式(1.52)与一阶方程的解进行比较. 由(1.53)我们可看到，和前面一样，当选择充分小的 m 时，差值 $x_1(t)-\bar{x}(t)$ 及 $x(t)-\bar{x}(t)$ 对于所有 $0\leqslant t<+\infty$ 可以任意

地小，尽管现在 $\dot{x}_0+(k/b)x_0$ 并不小．但是不难指出，对于速度，情况却不是这样．实际上，根据(1.54)，对于固定的小 m 与小的 t（当 $t \ll m/b$），差值 $\dot{x}_1(t)-\dot{x}(t)$ 接近于 $\dot{x}_0+x_0(k/b)$［这是完全应该的，因为 $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$ 并且 $\dot{x}(0)=-x_0(k/b)$］．这个值并不依赖于 m，所以通过选择小的 m 并不能使它变小．然而，研究一下表达式(1.54)的结构，并注意到，对于固定的 $t>0$，随着 m 的减小，$e^{-\frac{b}{m}t}$ 将迅速减小，便可以得到下面的结论：对于所有的 t，从某一任意小但完全确定的瞬时 $\tau>0$ 开始（对于所有的 $\tau \leqslant t<+\infty$），选取充分小的 m，总可以使得不等式

$$|\dot{x}_1(t)-\dot{x}(t)|<\varepsilon \text{ 或 } |\dot{x}(t)-\dot{x}(t)|<\varepsilon$$

满足(这里，和以前一样，ε 是预先给定的任意小的正量)．

这样，在运动的开始阶段中(当 $0 \leqslant t \leqslant \tau$)，小质量振子的速度迅速地从初值 $\dot{x}_0$ 变化到接近于由方程(1.47)之解所得的值(质量越小，变化越快)．在此时间间隔 τ 内，坐标的变化，当然也和 τ 一起趋近于零(或者说与 m 一起，亦是一样)[1]．十分明显，在此运动阶段上，有迅速速度改变的(因之，有很大加速度的)小质量振子的运动，不能用一阶方程(1.47)来描述，因为质量纵然很小，但它仍起着重要的作用(尽管 m 很小，$m\ddot{x}$ 并不比方程(1.14)中的其他项小得多)．只有经过时间 τ，在振子到达接近于和方程(1.47)相容的状态以后(这正说明 $m\ddot{x}$ 变得很小了)，振子的速度不再迅速变化，而其运动就可以用一阶方程(1.47)来描述了(mk/b^2 越小，越精确)．

为了解释以上所说的，我们讨论小质量振子在初始条件：$t=0$ 时，$x=x_0$，$\dot{x}=0$（这些初始条件当然和方程(1.47)是不相容）下的运动．在 $\dot{x}$ 很小的时候，$b\dot{x}$ 项不起作用，因而由完全方程(1.14)可知，加速度近似地决定于表达式

---

1) 运动开始阶段的长短 τ，也就是速度发生迅速变化的时间，是和 m/b 同量级的：在时间 m/b 内，式(1.54)的第一项，即主要项，减小成 e 分之 1 ($e\approx 2.7$)，而经过时间 $5\,m/b$，大约减小成 150 分之 1．

$$\ddot{x} \approx -\frac{k}{m} x,$$

并且因为m很小，所以系统的加速度很大——速度急剧地增大。阻力也随之增大，用来克服阻力的那部分弹簧力亦越来越大。因此，系统的加速度愈来愈小，最后，$m\ddot{x}$项不再起显著的作用。系统以后的运动，已经可以满意地用一阶方程(1.47)来描写了。此时速度具有这样的值，它和坐标的值满足方程(1.47)，因为当$m\ddot{x}$项消逝后，建立起了kx和$(-b\dot{x})$项间的近似等式。这样，从与方程(1.47)不相容的状态到与该方程相容的状态的急剧过渡就完成了。以上我们利用完全的二阶方程(1.14)及其解(1.52)，用分析方法研究了这个过渡过程。

同时，我们证实了，如果m充分地小，那末加速度起初很大，而且速度迅速地变化：系统在很短的时间间隔内，就过渡到与一阶方程相容的(当然在一定的精确度上)状态，并且这一时间间隔是那么小，尽管加速度很大，但系统的坐标还没有来得及有多少显著的改变。

3. 跳跃条件　　正如我们见到的，在向与一阶方程相容之状态的过渡中，系统的速度变化得很快，而系统的坐标几乎是保持不变的。但是如果过渡本身是很快的话，我们往往对它的细节就不感兴趣。我们可以把这种快的过渡，当作是一个瞬时跳跃来研究，并且仅仅限于确定系统所“跳”到的最终状态，也就是系统的性状开始由一阶方程(1.47)来描述的状态。因而，我们可以把系统看成是没有质量的，但是应该用别的方法来研究整个过程：除了一阶微分方程之外，应该补充以跳跃条件，用这个条件可以确定系统急速地、“瞬时地”过渡到的状态，亦即一阶方程开始生效的状态，从而这一条件将能代替前面对运动的那个暂短的初阶段所进行的讨论。这个跳跃条件，实质上，就是考虑那些在运动的初阶段起重要作用之小参数(在这里讨论的情况中即振子的小质量)的独特形式，这个条件，或者是在研究计入小的重要参数之系统的基础上建立的，或者是以某些物理概念或实验数据为基础而建

立的[1]．

在我们所讨论的情况中，跳跃条件显然可以叙述如下．如果系统的初始状态（给定 x_0，$\dot{x}_0$）不满足一阶方程（1.47），则系统跳跃地到达和该方程相容的状态，在跳跃中，系统的速度 $\dot{x}$ 作瞬时的改变，而坐标 x 保持不变．经过这样的跳跃，系统开始按方程(1.47)作连续的运动．应注意到，我们这里提出的跳跃条件，实质上，是根据对二阶方程（1.14）进行讨论所得到的结果建立起来的，我们的假设只是这些结果的一个简化的叙述而已．

研究"完全"系统在极限情况 $m\to 0$ 下的相平面被相轨线的划分，亦可以得到跳跃条件（图 33）．象往常一样，记 $\dot{x}=y$，"完全"系统的运动方程可写成形式：

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-\frac{kx+by}{m}. \tag{1.55}$$

在相平面 x, y 上，1/2 自由度系统（$m=0$）的相线是直线

$$kx+by=0. \tag{1.56}$$

显然，在这条直线以外相平面的任何点 (x, y) 上（$kx+by\neq 0$ 的点上），当 $m\to 0$ 时 $\dot{y}\to\infty$（而 $\dot{x}$ 仍有限），即在直线 (1.56) 之外，系统的状态将发生迅速的变化，其极限情况就是跳跃式的变化（速度 y 作跳跃变化）．然后，根据（1.55），有：

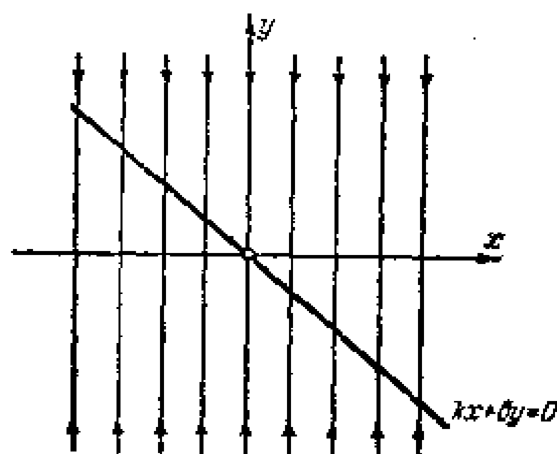


图 33

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{kx+by}{my}.$$

因此，在直线 $kx+by=0$ 以外，当 $m\to 0$ 时，$dy/dx\to\infty$，相轨线为铅垂直线（$x=$ 常数）．相点沿这些直线跳跃地（当 $m\to 0$ 时，具有趋近于无穷的相速度；跳跃时 x 不改变）走向 1/2 自由度系统

1）类似的方法——引入假设以代替对某种过程的详细讨论，是常常应用的方法．例如，在力学中讨论碰撞问题时，通常不研究物体相撞的过程本身，而代之以"瞬时"碰撞的概念，这时应附加某些假设，利用这些假设可以不必讨论相撞过程的细节，就能够求出物体在相撞后之瞬时所处的状态．

的相线(走向直线(1.56)),因为在这条直线的上部,$kx+by>0$且$m\to 0$时$\dot{y}\to -\infty$,而在这条直线的下部,$\dot{y}\to +\infty$. 因为所有作迅速跳跃运动的相轨线都走向直线$kx+by=0$,所以,相点以后的运动都是沿此直线进行的(沿趋向平衡状态的方向). 类似的求跳跃条件的方法,在今后研究"不连续"振动时,还常要用到.

下面利用图形来直观地阐明我们前面引入的跳跃条件的意义.因为在所讨论的情况中,速度跳跃地改变,那末,我们将把$m\neq 0$情况中(二阶方程)的速度-时间图,和$m=0$情况中(一阶方程加上跳跃条件)的速度-时间图加以比较.

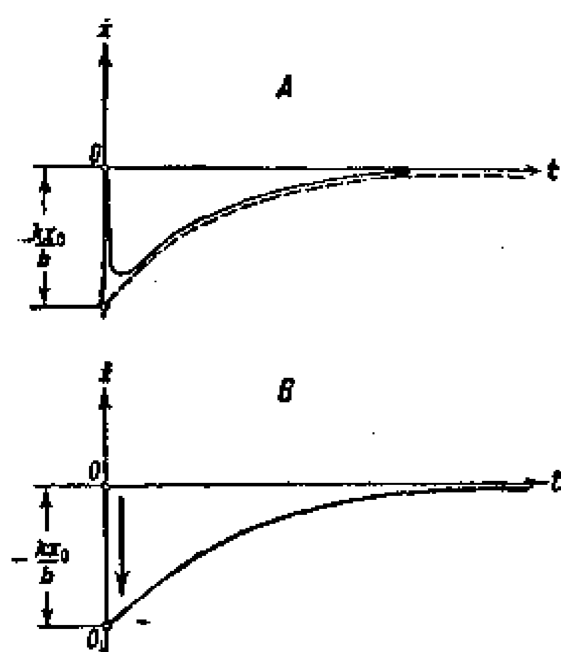


图 34

初瞬时可以任意给定x和$\dot{x}$. 例如,设$t=0$时$x=x_0$($x_0>0$),$\dot{x}=0$. 由二阶方程不难得出速度与时间的关系,如图34,A所示(作图时取$m\ll b^2/k$). 如果利用一阶方程,那么,初值$x=x_0$自动地给出初值$\dot{x}=-x_0(k/b)$,以后,速度随时间的变化如图34,B所示. 消除初始条件$x=x_0$,$\dot{x}=0$与一阶微分方程间的矛盾的跳跃,如图34,B中的线段OO_1所示.

很容易看出图34,A与B的相似性;这一相似性的物理意义,已在第2小节中说明了.

4. 其他例子 现在讨论RC或RL回路的振动,振动开始的状态不满足相应的一阶方程:

$$R\dot{q}+\frac{q}{C}=0 \tag{1.49}$$

或

$$L\frac{di}{dt}+Ri=0. \tag{1.50}$$

为了讨论这样的振动，我们应该，或者，采用相应真实电路的另一更"完全"的理想化，计入必需而重要的小参数[1]，或者，对方程(1.49)或(1.50)附加以相应的跳跃条件.

设在初瞬时 $t=0$，RC 回路中给定了这样的电量的初值 q_0 与电流的初值 $\dot{q}_0$，而在 RL 回路中——电流值 i_0 与 $(di/dt)_0$，它们不满足这些回路的一阶方程(例如，初始状态：$q_0\neq 0$，$\dot{q}_0=0$ 及 $i_0\neq 0$，$(di/dt)_0=0$，当图 35 及 36 所示之电路中的开关闭合时，就得到这样的初始状态). 为了得到和给定初始条件相容的系统，在 RC 回路情况中，计入电阻及连接导线所具有的小电感；而在 RL 回路情况中,计入自感线圈、电阻和联接导线所具有的小电容. 把这些小的寄生电感和电容视为集中的，便得到图 37 与 38 所示

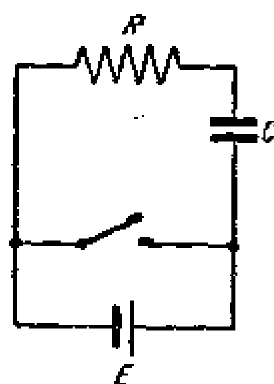


图 35

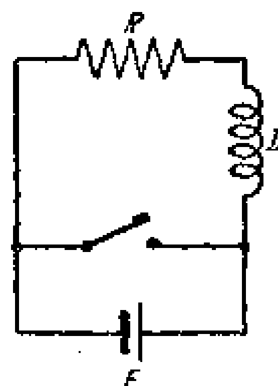


图 36

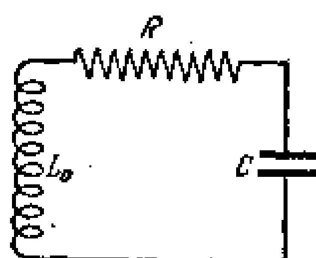


图 37

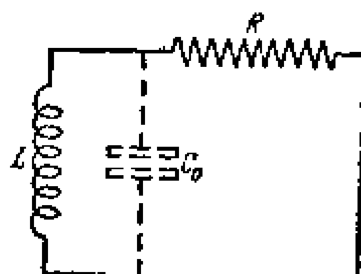


图 38

1) 怎样的小参数是重要的并且应予以考虑，取决于真实系统中给定的初始状态. 在一切情况中，考虑这些小参数而得到的理想模型，应该和给定的初始状态是相容的.

的线路（其中 L_0 与 C_0 是小的寄生电感与电容）. 现在图 37 中所示电路的振动方程可以写成：

$$L_0\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0,$$

而对图 38 所示的电路可以写为

$$C_0LR\frac{d^2i}{dt^2} + L\frac{di}{dt} + Ri = 0,$$

亦即最高阶导数具有小正系数的二阶线性方程的形式，它们和小质量振子的运动方程(1.14)完全相似，后者在本节第 2 小节中，已经进行了详细的分析.

在这一相似性的基础上，我们可以断言：在运动的初期，在 RC 回路（有小的电感 L_0）中，电流强度 $i = \dot{q}$ 将发生迅速的变化（电容器上的电量 q 在此期间几乎不改变），而在 RL 回路（有小的电容 C_0）中，di/dt 或自感电动势，将发生迅速的变化（此时电流几乎不变）. 电流（在第一情况中）或自感电动势（在第二情况中）迅速变化的结果，使得系统在量级与 L_0/R 或 C_0R 相同的微小时间间隔内，达到接近于和一阶方程（1.49）或（1.50）相容的状态. 一阶方程可以满意地描述其后的运动（在第一情况中的 L_0/CR^2 及在第二情况中的 C_0R^2/L 比 1 小得越多，则越精确）[1].

如果我们对这些迅速变化的细节不感兴趣的话，就可以不考虑 RC 回路中的小电感 L_0，以及 RL 回路中的小电容 C_0，引入相应的跳跃条件，以代替对运动开始阶段的详细分析.

对于 RC 回路，我们应该允许，当电容器的电量 q 不变时电流 i 可以有跳跃；而对于 RL 回路，当电流 i 不变时，自感电动势（或 di/dt）可以有跳跃.

如果在有自感的电路中，我们允许电流强度的瞬时变化，亦即，允许了在某瞬时 $d^2q/dt^2 = \infty$，那末，我们也就应该允许在自感线圈的二端，可以产生无限大的自感电动势 $L(d^2q/dt^2)$. 另一

1) 在同一相似性的基础上，可以断言：当初始条件和相应的一阶方程相容时，同一些小的寄生电容和电感，对回路中的振动来说，都是无关重要的次要参数.

方面，如果我们允许了电容器极板上电量可以有瞬时变化，那末，我们也就不得不允许在回路中可以产生无限大的电流（因为如果 q 跳跃地变化，则 $dq/dt = i = \infty$）. 所有这样的变化，都是我们对跳跃性质作的假设所不能允许的[1].

应注意到，在讨论过的三个例子中，我们遇到的都是保守的跳跃，亦即，跳跃时系统的能量不变. 事实上，在无质量振子的情况中，系统的全部能量都是弹簧的势能，且等于 $kx^2/2$（动能等于零，因假设了 $m = 0$）. 在跳跃时坐标 x 保持不变，因而能量也不变. 完全相同，在 RC 回路中，系统能量就是电容器中的电场能（能量等于 $q^2/2C$）；在 RL 回路中就是自感线圈中的磁场能（$= Li^2/2$）. 既然跳跃时，在第一情况中，电容器电量 q 不变，而第二情况中，电流 i 不变，能量当然也就保持不变.

但是，不能就此认为，保守性对于任何跳跃都是正确的必然的条件. 在力学里，研究碰撞时，就常常需要采用非保守碰撞的概念（碰撞时相撞物体的动能"瞬时地"减少）. 以后我们也会遇到类似的跳跃，在这些跳跃中，系统的能量会发生改变（在钟表理论中，以及有 Г-特性的电子管振荡器中）. 现在我们只举一个有非保守跳跃之系统的例子.

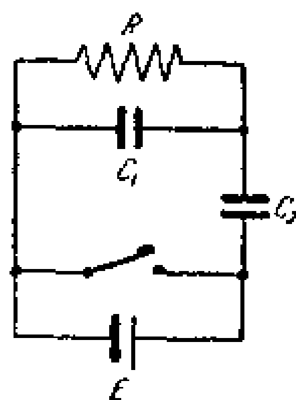


图 39

分析图 39 所示的线路. 在开关闭合后的那一瞬时，系统的状态（电阻上的电流与电容器 C_1 上的电压等于零，电容器 C_2 上的电压等于 E）显然是和电容为 $C = C_1 + C_2$ 的 RC 回路的方程（1.49）不相容的. 忽略开关（闭合时）和连接电容器 C_1 及 C_2 之导线的电阻与电感不计，我们应该假设，开关闭合后，沿联接电容的导线上有无限大的电流通过，因此电容器 C_1 及 C_2 上的电压和通过电阻的电流有跳跃式的变化. 在这个"瞬时"跳跃终了时，二电容上的电压应该相等（记此

1）显然，从回路的个别元件上之电流和电压的有界性的假设，亦可以得到以前提出的跳跃条件. 当然，这一假设不是一阶方程的推论，而是附加的物理假设.

电压为 v_0)，而通过电阻 R 的电流应等于 v_0/R. 为了求出 v_0，应注意到，在二电容器"瞬时"地交换充电的期间内，二电容上的总充电量应该不变，因为通过电阻 R 的电流总是有限的.
这样：

$$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot E = (C_1 + C_2)v_0,$$

由此

$$v_0 = \frac{C_2E}{C_1 + C_2}.$$

电流、电容器的电量和电压经过这样的跳跃之后，当两个电容器上的电压变成相等时，连续的运动便开始了，这个运动，显然，决定于方程 (1.49) (其中 $C = C_1 + C_2$). 很容易计算，在这样跳跃中，系统的能量**减少了**. 事实上，比较跳跃前系统的能量 $C_2E^2/2$ 与跳跃后的能量 $(C_1 + C_2)v_0^2/2$，显然有：

$$\frac{1}{2}(C_1 + C_2)v_0^2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot \frac{C_2E^2}{2} < \frac{C_2E^2}{2}.$$

我们已经讨论了系统中的跳跃，这一讨论是以跳跃时二电容器的电量和不变 (对于方程 (1.49) 的) 这个假设为依据的. 通过对和给定初始状态相容的更"完全"的系统进行讨论，也可以得到同样的结果；例如，取这样的一个系统，在其中计入了联结电容器之导线的小电阻 R_1 (图 40). 读者可进行这种分析，并在此基础上证明我们用过的跳跃条件.

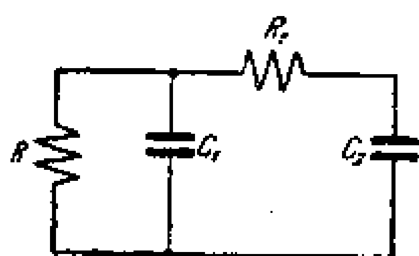


图 40

对于那些系统，其运动是由二阶线性微分方程(二阶导数具有小正系数)所描述，列举的例子已足以说明前面对它们所说的一切.

正象我们已看到的，在运动的最初阶段中，这些系统的状态可能发生迅速的变化(在相应的初始条件下)，其后，运动就可以相当满意地由相应的一阶方程来描述了. 当状态作迅速变化时，某些小参数起着重要的作用，只有计入这些小参数，亦即求解相应的二阶方程，才能对状态的迅速改变进行彻底的分析，虽然在状态的这

种迅速改变后，系统的运动用一阶微分方程来描述是相当精确的．但是，如果我们对运动的这个开始的、极短暂的阶段的细节并不感兴趣，就可以不研究二阶方程，而代之以假设：可以瞬时地、跳跃式地、建立起与一阶方程相容的状态．这时我们应引入新的假设(跳跃条件)，此假设可以确定系统跳跃后应达到的状态，且由这个状态开始，系统的运动将由相应的一阶方程来描述．

关于系统状态的跳跃式变化的概念，在以后研究“不连续”振动系统时(见第十章)，我们还将广泛地用到．

§6. 有“负阻尼”的线性系统

在一般的有阻尼的系统中(前面我们已经研究过这种系统的例子)，系数 $h = b/2m$ (或电系统中的 $h = R/2L$) 永远是正量，因为阻力总是阻碍运动的，因而 $b > 0$ (同样有 $R > 0$)．正阻力系数和正电阻意味着克服阻力(或电路中的电阻)要消耗能量．实际上，如果在运动方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{1.14}$$

中，将所有项上乘以 dx/dt，然后在某一由 0 至 τ 的时间区间上取积分，则得到：

$$m\int_0^\tau \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}\,dt + \int_0^\tau b\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt + \int_0^\tau kx\frac{dx}{dt}\,dt = 0.$$

积分后，便有：

$$\left|\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right|_0^\tau + \left|\frac{kx^2}{2}\right|_0^\tau = -\int_0^\tau b\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt. \tag{1.57}$$

左端各项表示在由 0 至 τ 的时间内系统动能与势能的变化；显然其和决定着系统总能量在这一时间间隔内的变化．如果 $b > 0$，则右端之积分是正的，能量变化为负，亦即，系统的能量在减少．这个能量的减少，取决于在克服阻力时能量的损失．

如果 b 以及它决定的 h 是负的，则系统的能量将会增加，在这

个情况中，"阻力"便是一个能源. 很明显，在本身不具有能源的系统中，这是不可能的，因而 b 以及 h 总是正的. 但是如果系统具有自己的能量贮备，那末一般说来，可以允许 $h<0$，并且系统的能量可以靠"阻力"或"电阻"而增加. 当然，这已经不是普通意义下的阻力或电阻了. 但是，既然它是由微分方程的、和普通阻力一样的项所表示的，也就是含 dx/dt 的项表示的，那末，在此 h 为负的情况中，我们仍将采用名词"阻力"和"电阻"，并且称之为"负阻力"和"负电阻"，总称为"负阻尼".

1. 机械系统的例子 图 41 表示的机构，是这种机械系统的最简单的例子，在此系统中，"摩擦"在某一范围内是负的. 在以等速 v_0 运动的皮带上，放着一个以弹簧 k_1 和 k_2 与二壁固连的质量 m. 皮带对重物的摩擦力，一般说来，是皮带和物体间的相对速度的、相当复杂的函数. 如果以 x 记重物的位移，$\dot{x}$ 记其速度，则作用于质量 m 上的摩擦力，是相对速度 $v=v_0-\dot{x}$ 的函数，并可以写作：$F(v_0-\dot{x})$.

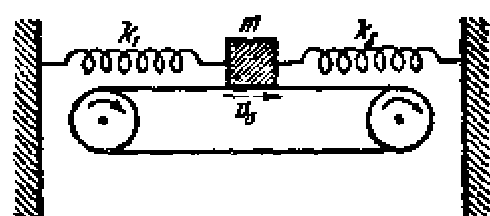


图 41

如果以 k 表示"总"的弹性系数，并假定作用在此系统上的所有其他阻尼（例如空气阻力与弹簧的内摩擦）都是和速度的一次方成正比的，则质量 m 的运动方程可写作：

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=F(v_0-\dot{x}), \tag{1.58}$$

其中，如已指出的，$F(v)=F(v_0-\dot{x})$ 是表征摩擦力和相对速度 v 之间关系的函数，换句话说，表征着摩擦的特性. 我们将不仔细地研究函数 $F(v_0-\dot{x})$ 的形状，而仅在 $|\dot{x}|\ll v_0$ 的区域中讨论此函数（例如，选取充分大的 v_0*），在这个区域里，于值 v_0 的近旁将函数 F 展开为级数，并且只取此级数的前二项**. 那末，$F(v_0-\dot{x})=F(v_0)-\dot{x}F'(v_0)$，且在此限制下，运动方程可写作：

$$m\ddot{x}+[b+F'(v_0)]\dot{x}+kx=F(v_0). \tag{1.59}$$

---

* v_0 的选择应满足：$F'(v_0)<0$——译者注.

** 原书为"前一项"——译者注.

右端的常数项只会引起平衡位置向皮带运动的方向有一位移 $F(v_0)/k$. 至于 $\dot{x}$ 的系数 $b+F'(v_0)$, 其符号和大小依赖于摩擦特性曲线的形状; $F'(v_0)$ 的大小就是摩擦特性曲线在 v_0 点的倾角, 并且当在摩擦特性有下降段的情况中: $F'(v_0)<0$. 如果摩擦特性曲线在 v_0 的邻域中有很陡的下降段时, 则 $b+F'(v_0)<0$, 而方程 (1.59) 将描述一个有"负摩擦"的系统. 实际上, 这个情况是很容易实现的,因为干燥表面的摩擦特性曲线通常具有图 42 所示的形状, 亦就是说, 当速度不大时, 起初几乎总有那么一个相当陡峭的下降段. 在这个区域内, 我们的机构便是一个有"负摩擦"的线性系统了. 但是不要忘记,我们只是在 $|\dot{x}| \ll v_0$ 的区域里,得到了有负摩擦的线性系统. 以后我们就会看到,这个限制是非常关键的,并且在讨论我们感兴趣的问题时,它亦起很重要的作用.

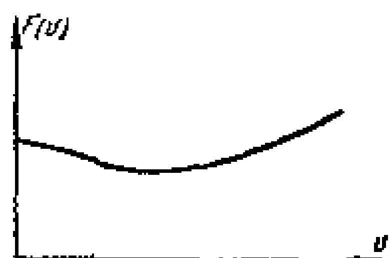


图 42

作为"摩擦"在一定区域内为负的另一个机械系统例子, 可以举出所谓的弗罗特 (Fraut) 摆[117,63,116]. 摆的结构是这样的: 在一根以角速度 Ω 等速转动的轴上, 悬挂着一个有摩擦的普通摆 (图 43). 这个摆的运动方程和普通摆的运动方程的区别仅仅在于: 在这个方程中, 还要计入旋转轴和挂有摆之轴承间的摩擦力矩. 因为摩擦力依赖于二滑动表面间的相对速度, 在我们的情况中, 就是轴与摆之间的相对角速度 $(\Omega-\dot{\varphi})$, 那么摩擦力矩就可以写成:

$$F(\Omega-\dot{\varphi}).$$

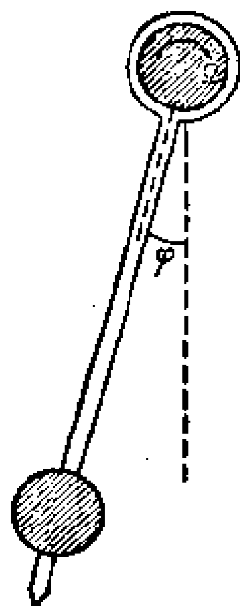


图 43

除了摆和轴间的摩擦外, 考虑空气阻力并假定它是正比于速度 $\dot{\varphi}$ 的, 则摆的运动方程具有下列形式:

$$I\ddot{\varphi}+b\dot{\varphi}+mgl\sin\varphi=F(\Omega-\dot{\varphi}). \quad (1.60)$$

平衡状态 $(\varphi=\varphi_0,\ \dot{\varphi}=0)$ 显然决定于方程:

$$mgl\sin\varphi_0 = F(\Omega).$$

我们研究摆在下平衡状态(即 $\cos\varphi_0 > 0$ 时)附近的运动. 令

$$\varphi = \varphi_0 + \psi,$$

其中 ψ 是小量(并且将假定速度 $\dot{\psi} = \dot{\varphi}$ 也是小量). 把非线性函数 $\sin\varphi$ 及 $F(\Omega - \dot{\varphi})$ 按 ψ 和 $\dot{\psi}$ 的幂次展为级数, 并只取线性项, 我们便得到摆的微振动的线性化方程:

$$I\ddot{\psi} + [b + F'(\Omega)]\dot{\psi} + mgl\cos\varphi_0\cdot\psi = 0. \qquad (1.61)$$

如果 $F'(\Omega) < 0$, 且其绝对值大于 b, 则 $\dot{\psi}$ 的系数将是负的. 在摩擦特性曲线下降相当陡峭的 Ω 值的某一区间内, 当 b 充分小时,就可以使 $b + F'(\Omega)$ 取负值,于是我们得到和普通有阻尼系统的方程

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

相似的方程,不同的是: 系数 h 将是负的,亦即,我们又得到了"负摩擦"的线性系统. 因此可见,在第一个系统中,适当地选取 v_0,而在第二个系统中,适当地选取 Ω, 就可以在某一有限区域中,把这些机械系统看成是有负摩擦的线性系统[1].

2. 电系统的例子 电阻在某一区域内取负值的电系统,亦是完全可以实现的. 电子管振荡器,即含有电子管、振荡回路和"反馈"的线路,可以作为这种系统的例子. 为确定起见,我们分析一个最简单的振荡器线路,它在栅路中具有电感反馈和振荡回路(图 44)[2],栅流将忽略不计. 选定电流正向和电容器的正极后,对于振荡回路可以(根据克希霍夫

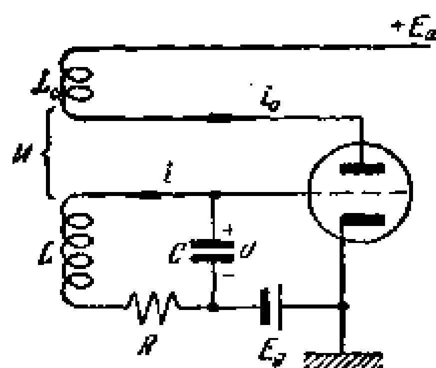


图 44

1) 具有单相异步马达的振动系统,也是有"负摩擦"的机械系统的例子[44].

2) 应指出,在屏路中具有电感反馈和振荡回路的振荡器,亦可作类似的讨论. 我们将不再讨论其他的电子管振荡器线路,因为,分析这些系统时,要么不会得出任何重要的新东西,要么将导出三阶微分方程,即一个半自由度的系统,因而超出了本书的范围.

定律)写出下列方程:

$$i = -C\frac{dv}{dt}, \quad Ri = v - L\frac{di}{dt} - M\frac{di_a}{dt}$$

$\left(-M\frac{di_a}{dt}\right.$ 是流过线圈 L_a 的屏流对回路的作用在回路中引起的反馈电动势$\left.\right)$或者

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v = M\frac{di_a}{dt}. \tag{1.62}$$

忽略屏极反应,即假定屏流 i_a 只和栅压 $u_g = v$ 有关(对于有高放大系数的三极管,这是相当精确的,而对于五极管,更精确),显然有:

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{di_a}{du_g}\cdot\frac{dv}{dt} = S(v)\frac{dv}{dt}, \tag{1.63}$$

其中 $S = di_a/du_g = S(u_g)$ 是电子管特性的互导,互导当然是和栅压 u_g 有关的. 图 45 给出了典型电子管特性曲线以及特性曲线的互导 S 对 u_g 的关系.

把式 (1.63) 代入 (1.62),得:

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + [RC - MS(v)]\frac{dv}{dt} + v = 0. \tag{1.64}$$

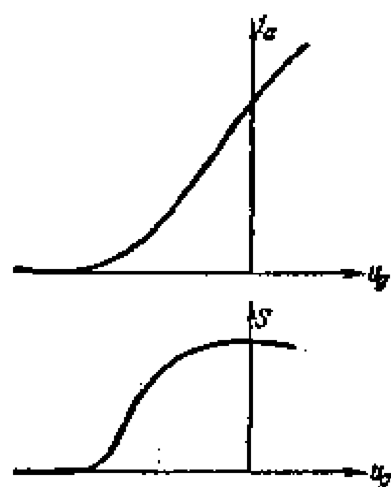


图 45

这是一个电子管振荡器的非线性振动方程,以后我们将对它作详细的讨论. 现在我们只在平衡状态 $v = 0$ 邻近,分析振荡回路中的微振动. 将电压 v 限制在充分小的区域内变化,我们可以认为 S 是常数. 对于充分小的 v: $S(v) = S_0$——工作点处特性的互导. 对于这样的微振动,于是便得到线性方程:

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + [RC - MS_0]\frac{dv}{dt} + v = 0. \tag{1.65}$$

互感系数 M 的符号(对于选定之电流 i 及 i_a 的正方向)决定于线

圈 L 与 L_a 的相对位置．设 $M>0$，即线圈 L 与 L_a 的耦合使得当电流 i_a 与 i 按图 44 所示的方向流动（$i>0$，$i_a>0$）时，在线圈 L 中产生的磁通相互增强．在这一情况中，当 M 的绝对值充分大时，就可能使 $RC-MS_0$ 为负．这样，我们得到了由线性方程

$$\frac{d^2v}{dt^2}+2h\frac{dv}{dt}+\omega_0^2v=0\quad\left(h=\frac{RC-MS_0}{2LC}<0,\quad\omega_0^2=\frac{1}{LC}\right)$$

描述的电系统，同时 $h<0$．于是，适当地选择 M 的大小和符号，就可以在一定的有限区域内，把这个电系统看成是有"负电阻"的线性系统．

对所有讨论过的系统，都导出了线性微分方程，其形式为 $\ddot{x}+2h\dot{x}+\omega_0^2x=0$，同时，与前面的情况不同，此方程中的 h 是负的（ω_0^2 仍然是正的）．为了讨论系统的性状，我们可应用前面所提出的方法．但是，由于此方法的应用与 h 的符号无关，我们就不再重复所有的推导，只简单地利用 §4 中对 $h>0$ 的情况所得的结果．

3. 相平面上的图象 为了说明在 $h<0$ 情况中，积分曲线在相平面上的性质，只要对前面研究过的线性振子的两种情况（大阻尼与小阻尼情况），看一下当 h 改变符号时，以前建立的图象有什么改变就够了．

对于 $h^2<\omega_0^2$ 的情况，即没有过大的"负阻尼"的情况，我们又得到一螺线族，它决定于方程

$$y^2+2hxy+\omega_0^2x^2=C^2e^{2\frac{h}{\omega}\operatorname{arctg}\frac{y+hx}{\omega x}},\tag{1.29}$$

或者，在 u，v 平面上以极坐标表示之，得

$$\rho=Ce^{\frac{h}{\omega}\varphi},\tag{1.28}$$

其中，象以前一样，

$$\omega=+\sqrt{\omega_0^2-h^2},\quad \varphi=-(\omega t+\alpha).$$

但是因为现在 $h<0$，故随着 φ 的减小（当 t 增加时 φ 减小）ρ 将增大（图 46），亦即，螺线的走向具有和有正 h 的系统相反的方向．因而，相点沿积分曲线运动时，将远离平衡状态（奇点 $x=0$，$y=0$）．

在这个情况中，奇点也是层层卷迭的螺线族的渐近点，即是焦点型的奇点（图 47）。

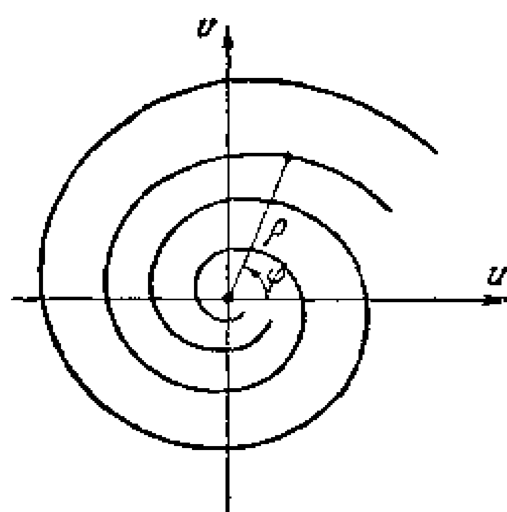


图 46

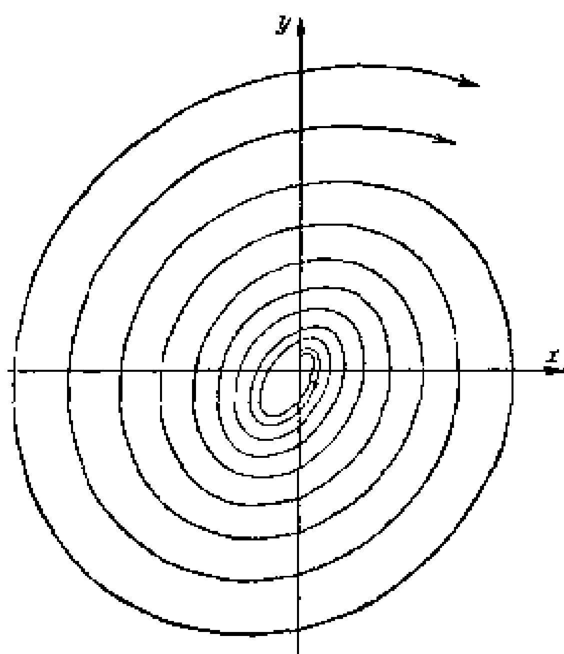


图 47

相点在相平面上运动的速度，和以前一样，仅在坐标原点等于零，并且随着相点远离坐标原点而增加。此外，因为这个速度处处都是沿着积分曲线且指向离开坐标原点的方向的，所以当系统对平衡状态有任何（但不为零）初偏离时，经过充分长的时间后，系统将离开此唯一的平衡状态任意远；因此，我们指不出这样一个区域 $\delta(\varepsilon)$，使得初瞬时位于其中的相点，永远不能越出给定的 ε 区域。因而，在此情况中，唯一的平衡位置是不稳定的：奇点是不稳定焦点。十分明显，这种焦点的不稳定性，正是 $h<0$ 所引起的。于是我们看到，在 $h^2<\omega_0^2$ 的情况中，系统的运动也是振动的过程，这和有正的小 h 的情况一样，不过过程不是衰减的而是**增长的**。系统的极大偏离随时间而增大（图 48），偏离对时间的关系决定于形如 $x=Ke^{-ht}\cos(\omega t+\alpha)$ 的表达式，其中 $h<0$。极大值的增大规律，是公比为 $e^{-hT}=e^{-d}$ 的几何级数，同时，由于 $h<0$，故 $d<0$ 且 $e^{-d}>1$。量 $d_1=-d>0$，在此情况中，称之为振动增长的**对数增长**。以前对缩减所作的附加条件亦完全适用于增长：对数增长的概念也只能适用于线性系统。

这样一来，由于我们只考虑系统的线性描述，我们就得到了无限增长的振动过程.

对于大"负阻尼"（$h<0$, $h^2>\omega_0^2$）的情况，亦可以用同样的方法来研究积分曲线的性状，这时，积分曲线族决定于方程（1.45）：

$$(y+q_1x)^{q_1}=C_1(y+q_2x)^{q_2},$$

其中

$$q_1=h-\sqrt{h^2-\omega_0^2}$$

且

$$q_2=h+\sqrt{h^2-\omega_0^2}.$$

因为 $h<-\omega_0<0$，所以 $q_1<q_2<0$，这就使得积分直线 $y+q_1x=0$ 及 $y+q_2x=0$ 的位置改变了；在此情况中，这两条直线都通过第一和第三象限，因为 x 与 y 同号（图 49）.

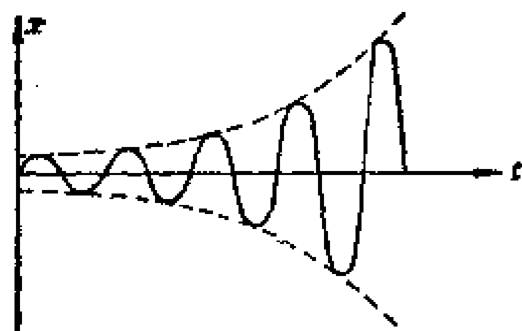


图 48

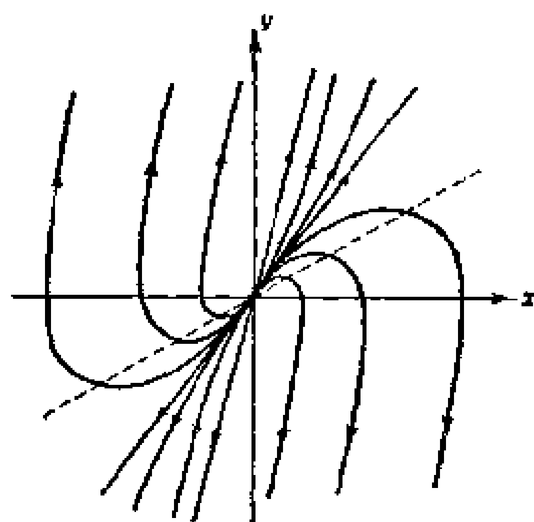


图 49

我们又得到了"抛物线"型的积分曲线族，并且所有曲线都通过位于坐标原点的唯一的奇点，这是一个结点型的奇点.

确定了相点在相平面上的运动方向后，我们不难确信，相点的运动方向如图中箭头所示，因而，相点沿任一条积分曲线的运动，都是远离平衡状态的. 关于相点运动的速度的讨论，和上面所述完全一样. 所以，无论系统离开平衡状态（$x=0$, $y=0$）的初偏

离怎样小，经过充分长的时间以后，系统将离平衡状态足够远，这表明，此平衡状态是不稳定的．在这一情况中，我们也指不出这样的一个有限的初值区域 $\delta(\varepsilon)$，使得相点可以不越出给定的 ε 区域．

我们所讨论的奇点是不稳定的结点，并且它的不稳定性也是 $h<0$ 所引起的．于是得到了非周期的过程，过程增长的规律为：$x=Ae^{\lambda_1 t}+Be^{\lambda_2 t}$，其中 λ_1 与 λ_2 是正数．并且由于我们把系统看成是线性的，那末这一增长将无限地持续下去．

将系统看成是线性的，在系统中我们求不到稳定的定态状态；系统不可能停留在和平衡状态邻近的区域里，线性系统中偏离应该是不断增长的*．同时，在描述属于这些情况的机械或电系统时，为了获得线性方程，我们应该仅仅在充分接近于平衡状态的区域（小的 x 与小的 y）里讨论所得到的线性方程．这就是说，一方面，我们应该仅限于讨论充分邻近平衡状态的区域；另一方面，在这一区域内讨论了系统的运动后，我们可确信，系统不会停留在此区域之内，它不可避免地要越出此区域的范围．换句话说，只有在相平面上邻近平衡位置的某一区域内线性描述才能正确地反映出相轨线的性状．但是，另一方面，所有相轨线都要越出这一有限区域的边界．为了研究其后系统的性状，显然，我们应该考虑某些到此为止还未曾考虑进去的系统的性质，并把系统看成是非线性的来研究．

于是，我们看到，在所讨论的情况中，对于许多关于系统性状的问题，例如，经过充分长时间后，系统将怎样运动的问题，线性描述原则上不能给出任何解答．

4．反馈改变时系统的性状　这样，我们得出下列结果（我们仅对电子管振荡器，叙述这些结果，至于对运动皮带上的重物和弗罗特摆，显然，结论是完全类似的）．

---

* "系统的偏离是不断增长的"，这样的叙述在本书中经常遇到，这仅是一个简化的说法，其实在偏离趋向无限大的过程中，不一定是单调的，有时可以减少——译者注．

当反馈充分小时[1](我们假定线圈的方向选得使$M>0$)，那末在回路中，或者有非周期的衰减，或者有衰减的振动，这决定于h^2是大于还是小于ω_0^2. 如果回路本身具有很大的电阻，以致产生非周期衰减，那末，选择充分强的反馈，我们就可以作到使这个反馈"能补偿"回路的大部分电阻，亦即，$h=(RC-MS_0)/2L$ 将是一小的正数. 那末，在没有过大初偏离(不使系统越出线性区的初偏离)的情况下，就将发生振动的而不是非周期的衰减. 再使反馈增加，只有通过 $RC-MS_0=0$ 的位置之后，才能进入到 $RC-MS_0<0$ 的区域，亦即，到达这样的位置，此时平衡状态已是不稳定的(因为$h<0$)，并且振动亦不再衰减而是增长的了. h 的绝对值越大，相平面上的螺线的螺距亦就越大，螺线展开得也越快，而在每一次振动中，系统的极大偏离也增加得越大. 最后，继续增加反馈，系统通过 $h^2=\omega_0^2$ 的位置，而过渡到 $h^2>\omega_0^2$ 的区域(现在 h 已是负的). 在这个区域中，又得到了非周期的过程，但是已经不是衰减的过程，(象 h 是大的正数那样)而是增长的过程了. 如果 $|h|$ 越大，即反馈越大，则特征方程的根 λ_1, λ_2 所表示的过程增长速度，也就越大.

总之，只要改变表征系统"电阻"的那个 h 的值(由大的正 h 值，变到大的负 h 值)，就可以使系统顺次通过五个不同的区域，这些区域对应着不同类型的运动和平衡状态，它们是：稳定结点，稳定焦点，中心，不稳定焦点，不稳定结点.

下一节里，我们还要介绍另一种类型的平衡状态，当系统中的阻尼改变时，这种平衡状态的类型并不改变. 而前面讨论过的五种平衡状态彼此间的差异，只是在于系统中阻力的大小与符号有

---

1) 在我们所讨论过的机械系统中，没有类似于可变反馈的元件. 因此，为了改变运动状态，必须改变其他某一参数，例如，阻尼特性曲线的坡度. 在电子管振荡器中，也可用改变电子管特性在工作点处的互导，即改变 S_0 的值，来代替改变反馈的值. 由于在讨论过的机械系统中，没有反馈，所以这类系统和普通的电子管振荡器之间，并不存在完全的类似. 弗罗特摆和所谓的负阻管振荡器相似，负阻管振荡器中没有反馈，自激是由于工作点位于特性曲线的下降段而引起的(见本章§7).

所不同．

但是并不是所有这五类平衡状态都具有相同物理意义的．所有的平衡状态，除中心（$h=0$）以外，都对应于系统参数的有限的值域*，作为特例，可以是参数M的有限值域．换句话说，包含在给定的有界区域**内的M值，可能和任一个的平衡状态对应，但中心除外，中心只对应于一个唯一的临界值$M_{кр}$，此值是由条件$MS_0-RC=0$给出的．纵然这一条件只受到一点点破坏，亦就是说，即便系统的某个参数只有一点点改变，系统就将进入到$h>0$或$h<0$的区域．这意味着，中心型的平衡状态，对于系统参数的微小改变来说，是不稳定的．其他的平衡状态，在系统参数变化不大时，将保持其类型不变，亦即，对于系统参数的微小改变是稳定的．因为系统参数的微小变化总是不可避免的，所以对参数变化不稳定的平衡状态，便不能反映真实物理系统的性状．因此，中心型平衡状态的物理意义仅在于：它是另外两类状态（稳定和不稳定焦点）之间的边界，同样地，$h^2=\omega_0^2$情况，只具有作为焦点与结点的边界的意义．但是，正象前面已说过的，这些边界不具有很大的物理意义．在真实的系统中，运动由一种类型到另一种类型的过渡是逐渐发生的，所以在振动衰减与非周期衰减之间的物理界线不是很明显的，因为当衰减增加时，系统并不是立即就丧失其振动性质，而是渐渐地失去振动性质的．换句话说，在真实系统中，我们不能分辨出"强"焦点，即h很大的焦点（这时h^2只稍稍小于ω_0^2），和"弱"结点（即h^2稍微大于ω_0^2的结点）的不同．同样，我们也不能区分出很弱的衰减和很弱的增长间的差异，因为，必须等待非常非常久的时间，我们才能发现两个过程之间的差别．

上面我们阐明了，适当地选择反馈的大小与方向，不仅能够减小系统固有振动的衰减，而且还能使得这些振动变为增长的．这个现象的物理意义是十分明显的．系统衰减的减少，显然，是由于

---

* "有限"二字应改为"某一"——译者注．

** "给定的有界区域"应改为"选定的有界区域"，因为任给一个有界区域，可能对应一种或几种或五种平衡状态——译者注．

从外界能源（在我们的情况中是屏路电池）取得一些能量，代替了回路中能量的部分耗散，取得的能量部分地补偿了回路中能量的损失，从而削弱了系统中的衰减．反馈愈强，每个周期里由电池馈入回路的能量亦愈多，耗散中被补偿的部分愈大，从而振动的衰减也愈弱．进一步增加反馈，流进回路的能量可能比损失的能量还要多，这时回路中的能量将要增长，在回路中亦将产生增长的振动，而再增大流进回路中的能量时，甚至会形成非周期形的增长．至于振动的增长会持续多久，会不会停止以及何时停止，这些问题，如前已指出的，如果只采用线性观点的话，我们将得不到解答．

研究线性的方程，我们亦不能回答以下问题：经过充分长的时间后，系统中究竟将建立起什么样的过程，特别是，在系统中能否有周期过程．我们只能断言，在我们讨论的线性系统中，不可能有周期过程．当系统越出我们讨论所限的区域时，要回答关于真实系统以后之情况的问题，显然，必须将系统当作非线性的来考虑．对这种非线性的研究，是我们今后的任务．目前我们只能指出，在平衡位置附近不存在周期振动，但绝不是证明了：在给定的系统中，周期振动是完全不可能的．特别是，如果平衡位置附近发生非周期型的增长（不稳定结点），那末，这完全不表示在系统中，以后亦不会有周期振动过程．我们将要看到，在结点型奇点情况中，完全可能存在周期过程（不衰减的振动）．

现在再回来探讨关于系统能量损失的补偿问题．不管对于电系统还是对于机械系统，从这一观点来看，情况是一样的．在振荡器的情况中，能量由屏极电池进入回路，电子管只是以必要的方式对进入回路之能量进行调节的机构．而在机械系统中，我们的结论亦全部适用，能源是带动皮带或轴的电动机，这一能量向振动系统的传递，则是由摩擦特性曲线的相应形式所决定的．就是说，摩擦特性曲线的形状应该是这样的，当皮带（或轴）与物体同向运动时，它对物体的“帮助”，比相对运动时，对物体的“阻碍”要大些．如果在振荡器中，选择了对应于负反馈（$M<0$）的线圈耦合，或在机械模型中，工作点不是在摩擦特性曲线的下降段上而是在上升

段上，那末电池或电动机的能量就不会输入到振动系统中去，而相反地，部分振动能量还要消耗在辅助机构中（在电子管中，消耗在屏极上，或者，在轴承中，消耗于克服阻力）．如果反馈的方向选择得不正确，系统中振动的衰减，不仅不会减少，相反地还要增加．

最后我们指出（虽然在本书中我们将不讨论这些问题），在有反馈的系统上作用着外力的情况中（例如，再生式接收机中），也可以在线性理想化的基础上，得到某些问题的答案．例如，在 $h<0$（即在欠激再生机的情况）以及弱信号（即这样的信号，在其作用下，系统不会越出可以把它当作线性系统来讨论的区域）的情况中，可以认为反馈仅仅使系统的衰减减小（增加其灵敏度与选择性），而不致改变系统的"线性"性质．然而对于相当强的信号，这个论断就不再正确了．

§7. 受斥力作用的线性系统

迄今为止，我们研究了受到准弹性力作用的线性系统，所谓准弹性力，即拉向平衡位置且和系统的偏离（对平衡位置而言）成正比的力．在讨论过的所有情况中，阻尼特性各不相同，但是力总是拉力．但是常常遇到这样的系统（从振动理论的观点而论，这些系统亦有很重要意义），其中作用着这样的力，它不是将系统拉向平衡位置，相反地，而是推离平衡位置，且推力的大小随系统位移的增加而增加．在讨论这种系统时，首先会产生这样的问题：推力和位移有怎样的关系呢？下面我们在研究某些特例时会看到（从将任意函数展开为级数的一般思想，亦可以看出），在偏离的充分小的区域中，可以认为推力与位移是成正比的．根据这样的假设，我们得到作用着斥力，而不是拉力的线性系统．这些系统的性状（运动特性），和上面讨论过的线性系统，有着本质上的不同．

作为受斥力的线性系统的第一个例子，我们讨论数学摆在上平衡位置（不稳定的）邻域中的性状．这时，为简单起见，我们先假定没有受到阻尼．在这一情况中，如果角 φ 由上平衡位置算起

(图 50)，则摆的运动方程为：

$$ml^2\ddot{\varphi} = mgl\sin\varphi. \tag{1.66}$$

我们仅限于讨论充分邻近平衡位置的区域，可以用 φ 代替 $\sin\varphi$. 这时方程可写成形式：

$$\ddot{\varphi} - \frac{g}{l}\varphi = 0. \tag{1.67}$$

我们又得到了二阶线性微分方程. 这个方程和在下平衡位置邻近区域中所得的方程一样，当然，它不能描述 φ 角可取任意值的摆的运动，而只有对充分小的 φ 值才成立.

图 50

1. 相平面上的图象 在我们所讨论的情况中，导出的方程可以写作如下的一般形式：

$$\ddot{x} - nx = 0, \tag{1.68}$$

其中 $n > 0$（对于摆，$n = g/l$）. 为了研究此方程所描述之系统的性状，可以任意选一个前面用过的方法，也就是说，或者先求出方程 (1.68) 的解，然后把求得的解 $x = f(t)$，$\dot{x} = f'(t)$ 当作积分曲线的参数方程来讨论，或者，不积分方程 (1.68)，从中消去时间，然后再积分之，并把积分所得方程当作积分曲线的方程来研究. 现在我们应用第二种方法. 令 $\dot{x} = y$，可以用两个一阶方程

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = nx, \tag{1.69}$$

来代替我们的二阶方程，消去时间，便得到联系 x 和 y 的一个一阶方程：

$$\frac{dy}{dx} = n\frac{x}{y}. \tag{1.70}$$

这个系统的平衡位置（由条件 $dx/dt = 0$ 与 $dy/dt = 0$ 决定的）只有一个，即点：$x = 0$，$y = 0$. 等倾线 $\kappa = 0$（$dy/dx = 0$）就是纵轴（$x = 0$）；而等倾线 $\kappa = \infty$（$dy/dx = \infty$）则是横轴（$y = 0$）. 为了精确地确定相点在相平面上的轨线的形状，必须积分方程

(1.70)．分离变数，积分之，得：

$$y^2 - nx^2 = C. \tag{1.71}$$

这是一个有公共主轴的等边双曲线族的方程．当 $C = 0$ 时，我们得到曲线族的两条渐近线：$y = -\sqrt{n}x$ 及 $y = \sqrt{n}x$，它们都通过坐标原点．坐标原点是此积分曲线族的唯一奇点．所有其余的积分曲线都是不通过原点的双曲线（图 51）．这种奇点，通过它的只有两条作为渐近线的积分曲线（其余的积分曲线都是不通过奇点的双曲线），称之为**鞍点**型奇点．

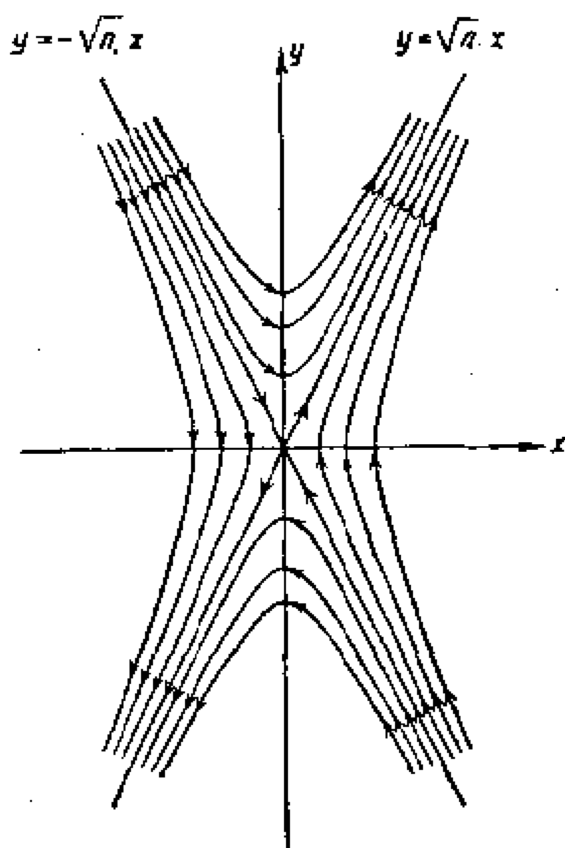


图 51

从所得之相平面上的图象，我们可以得到什么结论呢？首先，考虑到：当速度为正时坐标应该增加，为负时应该减少，我们得到的相点在相平面的四个象限内的运动方向，如图 51 中的箭头所示．分析一下相点运动的方向，很容易确信，无论相点于初瞬时位于何处（除了原点以及通过第二和第四象限的渐近线 $y = -\sqrt{n}x$ 上的点以外），它最后总将远离平衡状态，并且运动永远不会是振动的，而是非周期的．

在此情况中，相点运动的速度，也只有在奇点处才等于零，在相平面上的其他点上，相速度都不等于零．这样，即便是相点最初沿某一积分曲线向着奇点运动（第二和第四象限中的运动），在任何情况下，除了沿渐近线 $y = -\sqrt{n}x$ 运动以外，最后相点都将任意大地远离平衡状态．因而，在我们讨论的情况中，平衡状态是不稳定的，因为我们不可能选出这样的区域 $\delta(\varepsilon)$，使得初瞬时位于此区域内的相点，最后都不会越出给定区域 ε 的边界．显然，鞍点

型奇点总是不稳定的，并且这个不稳定性和奇点本身的类型，以及积分曲线的性质有关，而和相点沿积分曲线运动的方向是无关的（如果运动方向改为相反的方向，奇点仍是不稳定的）*.

至于沿渐近线 $y=-\sqrt{n}x$ 的运动，它们是某种特殊情况，这时系统仅能趋近于平衡状态. 相点以趋于零的速度趋向坐标原点，但在有限时间内不能到达坐标原点. 对于这种称为*有限*运动的情况，我们以后还要详细地进行讨论. 但是，这种趋向于不稳定平衡状态的运动发生的可能性如何，只要简单地考虑一下，就很清楚了. 实际上，当摆离开上平衡状态有某一初偏离时，总可以选择出这样的、完全确定的初速度，使得摆在初瞬时的动能恰好等于摆到达平衡状态所应作的功. 如果这个初速度是指向平衡位置的，那末摆将向这个位置运动，且应该到达平衡位置. 但是，象以后将看到的，如果能够完全精确地给定这样选好的初速度，摆也只有经过无限长的时间，才能到达平衡状态.

然而，向平衡位置运动的这一特殊情况，当然不会推翻我们的论断：在此情况中平衡状态是不稳定的. 因为，对于任意的初始条件，只要它和专门选定的、严格地符合渐近线方程 $y=-\sqrt{n}x$ 的状态不相同，系统总将远离平衡状态. 而沿渐近线的那个运动永远亦不会精确无误地实现，因为它对应于一个初始状态，而不是初始状态的一个有限区域. 这种初始状态（更正确地说，一条"初始状态线"）不构成初始状态的一个有限区域，也不可能在系统中完全精确地给定. 换句话说，如果假定所有的初始状态都是等概率的，那末这种对应于向着奇点运动的初始状态的概率就等于零. 因此系统的所有真实运动都将使系统远离平衡状态.

现在再来研究另一情况，在此情况中，系统内除斥力之外，还有阻尼存在，并且阻尼可以是正的，也可以是负的. 在上平衡位置邻近，对受到与速度成正比的阻力的摆的研究，便属于第一种情

---

* 如果在将二阶方程 (1.68) 写成 (1.69) 时，取：$\dot{x}=-y(\dot{y}=-nx)$，则将出现这里所指的方向改变. 二种化为一阶方程组的方法，原则上没有区别，只是本书上所取的形式更为大家所习用——译者注.

况．在此情况中，描述系统运动的方程是

$$\ddot{\varphi}+2h\dot{\varphi}-n\varphi=0, \qquad (1.72)$$

其中 $n=g/l$, $h>0$. 在上平衡位置邻域中的弗罗特摆的研究（当然是在线性理想化之下），便属于第二种情况，亦即方程（1.72）中 $h<0$ 的情况.

2. 电系统 在相应的假设下，对所谓的负阻管振荡器（图52）进行研究时，我们得到相同的方程（1.72）；在这个系统里，由于其中的四极管之屏极特性曲线 $i_a=\varphi(u)$（图 53）具有下降段 $\left(\frac{di_a}{du}<0\text{ 成立的那一段}\right)$[1)]，可能产生自振．对我们研究之系统的线路，根据克希霍夫定律，可给出

$$i=i_a+C\frac{du}{dt},\quad L\frac{di}{dt}+Ri=E_a-u$$

或者，消去电流 i 后：

$$LC\frac{d^2u}{dt^2}+\left[RC+L\frac{di_a}{dt}\right]\frac{du}{dt}+u+Ri_a=E_a. \qquad (1.73)$$

对于平衡状态有：$du/dt=0$, $d^2u/dt^2=0$, 因而

$$u+Ri_a=E_a. \qquad (1.74)$$

将所得的方程与四极管特性的方程 $i_a=\varphi(u)$ 联立求解（图 53 中

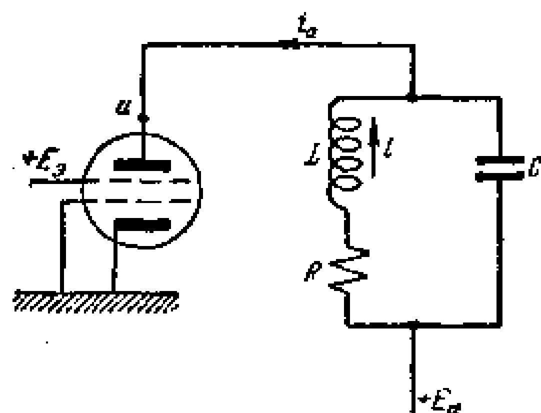


图 52

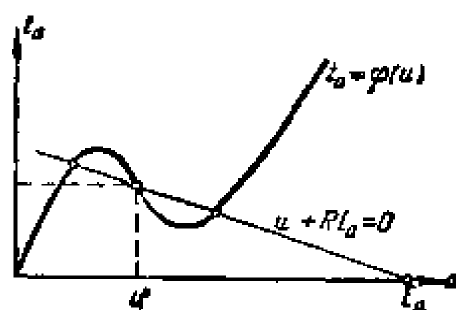


图 53

---

1) 电子管的屏极特性，如所周知，是指当其他电极（栅极）上的电压为常数（固定）时，屏流 i_a 和屏压 u 间的关系．四极管的屏极特性曲线（当屏栅极电压 E_3 是充分大时）有下降段，是由于在一定的屏压区间内，四极管中产生了所谓的负阻效应所致．

给出了图解法)，我们就求出所讨论之电路的平衡状态；显然，对给定的四极管特性，由于 R 及 E_a 的不同，可能得到一个或三个平衡状态*.

我们假设 R 与 E_a 是这样的，使得在特性曲线的下降段 $[\varphi'(u^0)<0]$ 上有平衡状态 $(u=u^0,\ i_a=i_a^0)$，仅限于在这个平衡状态附近的微振动区域中进行研究，令

$$u=u^0+v,$$

其中 v 充分小，可以把四极管的特性看成是线性的：

$$i_a=i_a^0-S_0v, \tag{1.75}$$

其中 $S_0=-\varphi'(u^0)$ 是四极管屏极特性曲线下降段上工作点处的互导的绝对值. 在这一微振动的区域内，我们显然可以得到下列二阶线性微分方程：

$$LC\frac{d^2v}{dt^2}+[RC-LS_0]\frac{dv}{dt}+(1-RS_0)v=0. \tag{1.76}$$

象以前各情况一样，这个线性方程，只有在屏压 u 充分接近 u^0 值(即 v 充分小)的有限区域中，才能描述系统的振动.

如果 $RS_0<1$，则我们得到“普通的”二阶微分方程，它是一个描述受“拉力”的系统，并受到或正或负的阻尼作用，这取决于 $RC-LS_0$ 的符号. 若 $RS_0>1$ (回路电阻充分大)，则得到和方程 (1.72) 相似的方程，它是一描述受“斥力”的系统[1].

3. 鞍点型的奇点　　总之，我们研究过的两个系统——在上平衡位置近旁的摆(普通摆或弗罗特摆)以及特性曲线下降段上之平衡状态近旁的负阻管振荡器(当 $RS_0>1$)，在相应的简化之下，都导出线性微分方程

$$\ddot{x}+2h\dot{x}-nx=0, \tag{1.77}$$

---

* 图 53 所示之情况给出三个平衡状态，当 R 及 E_a 变化时，直线 $u+Ri_a=E$ 亦改变位置，可能得到只有一个交点的情况，但是亦有可能得到有二个交点的情况(其中一个是切点)，这时系统处于临界情况，而临界情况在粗系统中不存在. 由于本书着重研究的是粗系统，所以往往这种可能情况不列入可能情况，今后常常有这种提法，其用意就是这样——译者注.

1) 应指出，在这个情况中，除了我们研究的那个平衡状态之外，负阻管振荡器还有两个平衡状态，它们是稳定的结点或焦点.

其中 $n>0$（对于摆 $n=g/l$，对于负阻管振荡器 $n=(RS_0-1)/LC$），而 h 可有任意符号。

微分方程 (1.77) 的特征方程

$$\lambda^2+2h\lambda-m=0$$

有实根，且此二根反号，这和系数 h 的符号无关，它们是

$$\lambda_{1,2}=-h\pm\sqrt{h^2+n}$$

（以下用 q_1 记正根，$-q_2$ 记负根；q_1 及 $q_2>0$）。因此，方程 (1.77) 的通解可写为：

$$x=Ae^{q_1t}+Be^{-q_2t}. \tag{1.78}$$

为了求出 x，y 平面上（$y=\dot{x}$，和以前一样）的积分曲线，从等价于方程 (1.77) 的一阶方程

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=nx-2hy \tag{1.79}$$

中，消去时间，即用第一个方程除第二个方程，得：

$$\frac{dy}{dx}=-2h+n\frac{x}{y}. \tag{1.80}$$

象以前一样，坐标原点（$x=0$，$y=0$）是唯一的奇点（唯一的平衡状态）。对于积分曲线斜率为 $dy/dx=\kappa$ 的等倾线，可得方程 $-2h+n\dfrac{x}{y}=\kappa$ 或

$$y=\frac{n}{\kappa+2h}x. \tag{1.81}$$

其中，等倾线 $\kappa=0$（亦即 $dy/dx=0$）是直线

$$y=\frac{n}{2h}x,$$

而等倾线 $\kappa=\infty$（$dy/dx=\infty$）是横轴（$y=0$）。在这个情况中，和结点型奇点的情况一样，有两条通过奇点的积分曲线——直线 $y=-q_2x$ 与 $y=q_1x$。为了确定其余积分曲线的性状，象以前一样，积分方程 (1.80)，得：

$$(y-q_1x)^{-q_1}=C(y+q_2x)^{q_2}. \tag{1.82}$$

这是以 $y=q_1x$ 及 $y=-q_2x$ 为渐近线的双曲线型曲线族的方程，

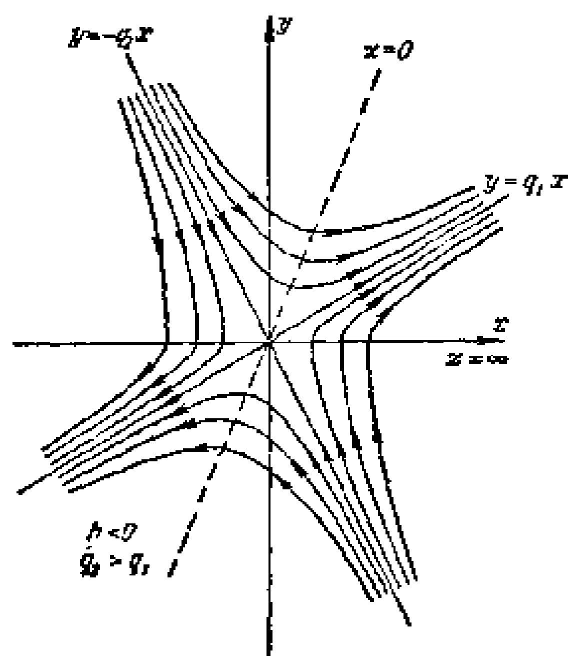


图 54

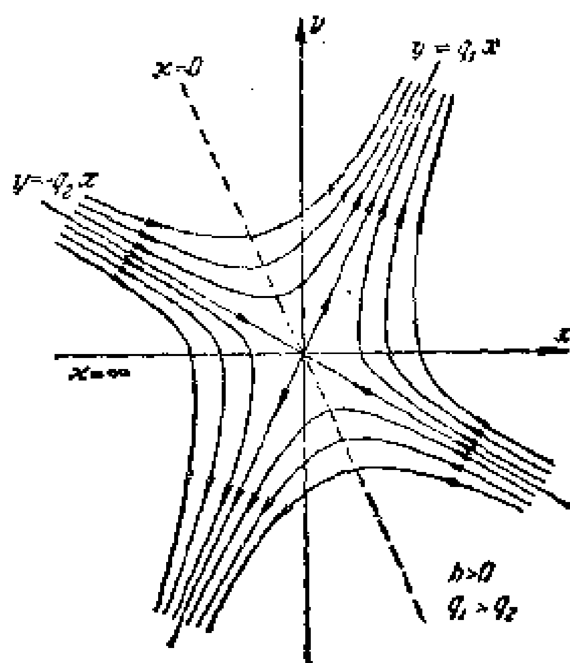


图 55

显然，二渐近线分别通过不同的象限．对所讨论的这一情况，积分曲线如图 54（对于 $h<0$）及图 55（对于 $h>0$）所示．

为了说明积分曲线的形状，可以象前面讨论结点型奇点的情况那样，引入新变数：

$$u=y-q_1x,\quad v=y+q_2x,$$

并把方程（1.82）化为

$$v=\frac{C}{u^{\alpha}},$$

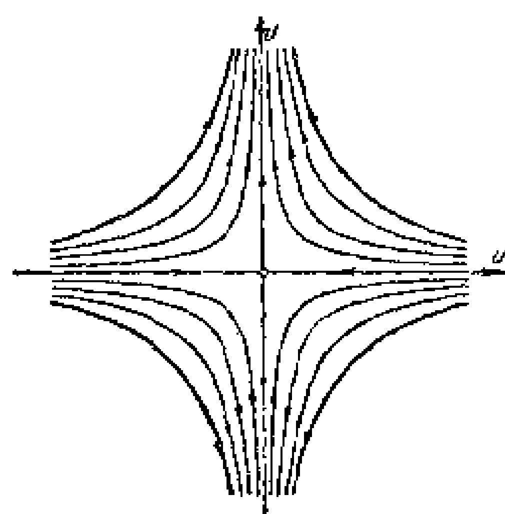


图 56

其中 $\alpha=q_1/q_2>0$．这个方程在 u, v 平面上确定一双曲线型曲线族，其渐近线为两个坐标轴（图 56）．因此，在 x, y 平面上，方程（1.82）也确定一双曲线型的曲线族，其渐近线为 $y=q_1x$ 与 $y=-q_2x$，它们是 u, v 轴经过逆变换而得到的直线．

这样，我们看到，正的或负的电阻的存在，原则上不改变受斥力的系统的图象．奇点仍然是鞍点，它总是不稳定的，并且系统中

所有的运动，最终都将使系统远离平衡状态．但是经过充分长的时间间隔后，系统将远离平衡状态任意地多远，因而，必定会越出我们限于讨论的区域（即系统可以看成是线性的区域）．就是说，在这个情况中，和负阻尼的情况一样（亦即，一般地在所有具有不稳定平衡状态的情况中），只有在一定的时间间隔内，且初偏离不大时，在系统还未越出“线性区域”之前，才能用线性的理想化来描述系统的性状．

我们以下述对以后极为重要的注记，来结束对线性系统的讨论．在我们讨论过的、各种线性系统在相平面上的图象中，除了无阻尼的谐振子以外（亦即除了保守的线性系统以外），在相平面上，都没有给出封闭的积分曲线，且所有的积分曲线，都有着趋向无限远的支线．同时周期过程应该对应于相平面上的闭积分曲线．因此，我们从对线性系统的研究，可得出下列重要的结论：**在线性非保守系统中，周期过程根本是不能存在的．**

第二章　非线性保守系统

§1. 引　　言

在进行宏观的研究时，我们总是遇到非保守系统，亦即，在运动中总能量不保持常值而有耗散的系统．但是在许多情况中，能量耗散的过程非常缓慢，它对系统运动性质的影响又是非常的小，以致不考虑这种影响，并假定系统的势能和动能之和是不变的，就可以说明一系列重要的问题．进行了这样的理想化，我们就得到关于保守系统的概念．

在另一些情况中，系统能量耗散非常地快，以致为了(在给定的精确度下)回答某些问题，即在第一种情况中把系统当作是保守的就可回答的问题，现在我们已经不能再忽略能量的耗散，而必须把系统看成非保守的来研究．我们不只一次地指出过，把系统划分为保守的与非保守的两种，是我们对真实物理系统进行理想化的结果，而且允许进行理想化的那些特性，不仅依赖于系统的性质，而且还和我们感兴趣的问题的特性有关．例如，为了解决受到微小阻力的摆的运动问题(摆支承在很尖锐的刀刃上，并放在真空的器皿里)，在不太长的时间(例如，几百个周期)内，可以相当精确地把系统看成是保守的，亦即，认为动能与势能的总和保持不变．如果我们感兴趣的是摆在非常长时间内的运动特性问题，那末，再把系统看成是保守的，便不能对这个问题作出正确的回答．尽管能量耗散得很慢，经过充分长的时间后，能量的耗散就会使系统中剩余的能量比它在初瞬时所具有的能量少得多．同样地，如果我们感兴趣的时间还是不太长的话，行星(如地球)的运动亦可以看作是保守的运动．在十分大的时间间隔内(包含若干地质时期)，为

了研究地球的运动，我们就应该计入所谓的潮汐阻力，当考虑了潮汐阻力以后，就不能假定系统是保守的了.

正象已指出过的，能不能理想化为保守的系统，是和问题的特点及系统的性质有关的. 对于同一个问题——关于摆在一百个周期时间内的运动问题，如果摆是在有很大阻力的介质中运动的话，采用保守的理想化，就不能作出任何回答. 在这一情况中，每一次摆动都要消耗掉初能量的相当大一部分，因而在等于 100 个周期的时间内，摆的动能与势能之和甚至不能近似地认为是常量了.

研究保守系统，除了可以直接给出一系列问题的解答之外，由于下列原因，对我们还有着特殊的意义. 第一，对保守系统的研究，能够相当深入地阐明一些概念（相平面，奇点，周期运动，稳定性动力学系统对参数的依赖关系等），这些概念对于研究我们的基本问题——自振系统理论，是必要的. 第二，研究保守系统所以必要，因为在某些情况中，所以能够研究自振系统，是由于它们和保守系统非常近似的缘故.

还应指出，对于整个物理学来说，保守系统理论有着非常大的独立的意义[1].

§2. 最简单的保守系统

我们来研究最简单的单自由度自治保守系统：质点在只依赖于距离的力的作用下沿直线的运动. 质点的位置完全确定于一个数——横坐标 x. 系统的力学状态可由给定点的位置 x 和点的速度 $\dot{x}=y$ 来确定. 点的质量，为计算简单起见，取为一单位；十分

1) 首先是对于物质结构理论. 远从拉普拉斯时代起，特别是在能量守恒定律发现以后，从那时起人们开始把热当作动能的一种形式来研究，物理学家们假定了在微观世界里作用着保守力. 沿着这一方向取得巨大成就的有：气体动力论、晶格理论等. 为了决定原子的定态状态，仅仅在求任意常数时假定一定的步骤，从而所谓的旧量子力学亦采用了保守模型. 甚至在量子力学里，虽然不承认对个别微粒运动的时-空描述，但在列薛定谔（Schrödinger）方程以前，还是需要知道“理想原子模型”的哈密尔顿（Hamilton）函数的. 从某种观点来看，全部原子力学的发展可以看作是哈密尔顿保守力学的发展.

明显，这个假设并不失一般性．这种系统的运动方程，根据牛顿第二定律，可写成一个二阶方程的形式：

$$\ddot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

其中 $f(x)$ 是力，或写成两个一阶微分方程的形式：

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = f(x). \tag{2.2}$$

以后除了有特殊的说明，我们都将假设 $f(x)$ 是在整个直线 $x(-\infty < x < +\infty)$ 上的解析函数，换句话说，$f(x)$ 在直线 x 的每一点上都是全纯函数[1]．

我们知道，确定相平面上积分曲线的微分方程是：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y} \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y), \tag{2.3}$$

其中 $\varphi(x, y) = f(x)/y$．相点在相平面上沿积分曲线将怎样运动呢？我们已经指出过，因为 y 是速度，所以当 $y > 0$ 时，即在上半相平面中，相点的运动使 x 增加；而当 $y < 0$ 时，即在下半平面中，使 x 减少．用这样的方法，就确定了沿相轨线的运动方向．相点运动的速度 v 可以表为：

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{y^2 + [f(x)]^2}.$$

我们再提醒一次，必须把位置改变的速度（质点的速度）和状态改变的速度（相点在相平面上运动的速度）区别开来．第一个速度 $dx/dt = y$ 等于纵坐标，而第二个速度

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{y^2 + [f(x)]^2} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{2.4}$$

等于所讨论的积分曲线在该点的法线长度*．由表达式 (2.4)，可以直接导出我们已经指出过的事实——相点在相平面的每一点

1）我们将采用这样的名词：如果函数 $f(x)$ 在 x 值的给定区域内的每一点上，都是全纯的，亦即，在每一点的邻域中，都可以展成收敛半径不等于零的幂级数时，我们将称函数是该区域内的解析函数．

* 一点的法线长度等于从该点起沿法线到与 x 轴的交点的距离——译者注．

上，都具有有限的、不等于零的速度，但应把平衡状态(奇点)除外，在平衡状态上同时有：

$$y = 0 \text{ 与 } f(x) = 0. \tag{2.5}$$

根据这些条件，所有平衡状态都位于相平面的 x 轴上，并且其横坐标满足方程 $f(x) = 0$.

设在相平面上给定了一个点 (x_0, y_0)，试问，是不是总能找到通过此点的积分曲线，并且这样的曲线是不是唯一的？除了 $y = 0$ 与 $f(x) = 0$ 的奇点以外，方程 (2.3) 在相平面的每一点上，都能确定出唯一的切线方向.

我们来证明，在我们的情况中，通过相平面的每一个常点，有一条且仅有一条积分曲线. 我们知道，如果满足科希定理的条件[1]，这样的曲线存在而且唯一. 我们把 y 当作 x 的函数，并将研究方程 $dy/dx = f(x)/y = \varphi(x, y)$；在这个情况中，$d\varphi/dy = -f(x)/y^2$，因此，$y = 0$ 是相平面上科希条件不成立的点的几何位置. 现在将 x 看成是 y 的函数. 这时，微分方程 (2.3) 可写成形式：$dx/dy = y/f(x) = \psi(x, y)$. 在这个情况中，$d\psi/dx = -yf'(x)/[f(x)]^2$，条件 $f(x) = 0$ 破坏了连续性的条件，因而，对于这个方程，科希定理在直线 $f(x) = 0$* 上不成立. 我们仅仅是从不同的观点出发，讨论同一个微分方程 (2.3) 的. 此时，我们所得的不同结果决不矛盾，因为科希条件只是唯一性的充分条件而非必要条件. 因而，我们可以断言，除了同时有 $y = 0$ 及 $f(x) = 0$ 的点，即奇点以外，通过相平面上的每一点，有一条且仅有一条积分曲线. 我们以后就会看到，在我们讨论的保守系统的情况中，奇点上的积分曲线，或者相交，且一般来说有不同的切线，或者退化为孤立点，根本没有切线. 相点的速度

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}y + \mathbf{j}f(x) \tag{2.6}$$

---

1) 关于微分方程(或微分方程组)解的存在性与唯一性的科希定理，可以参看下册附录 I.

* "直线 $f(x) = 0$" 的含义是这样的，设 $f(x) = 0$ 有实根 $x_1, x_2 \cdots$，则 $x = x_1$，$x = x_2, \cdots$ 就是这里所指的直线——译者注.

处处都可单值地确定，并且，象我们已见到的，只有在奇点上才等于零。由此，根据连续性可知，相点在奇点近旁将降低运动的速度.

设方程组 (2.2) 在某一区域中（当我们假设 $f(x)$ 在整个 x 直线上都解析时，这个区域就是全平面），满足科希定理条件. 由此可以推出，对于所研究的动力学系统，过去和将来都单值地决定于现在，因为初始条件的值单值地决定着运动，或者说，决定着方程组 (2.2) 的解.

对于沿交于奇点的积分曲线的运动，这是否还是正确的呢？或者（同样地），初瞬时位于通过奇点的积分曲线上的相点（但不在奇点上），能否在有限时间内到达奇点呢？我们将证明这是不可能的：初瞬时相点在相平面上的位置不是方程 (2.3) 奇点时，这一相点只可能随着 t 的无限增大而渐近地趋向于奇点.

首先，我们作以下的注记. 正象我们已经看到的，要描绘曲线在相平面上的图象，可以用一个方程 (2.3)，并且利用它来研究积分曲线，或者，亦可以用方程组 (2.2)，并且用它们来研究相轨线. 实质上可以说，在第二种情况中，求解后我们得到的不是那些积分曲线的方程，不过是由参数形式 $x = x(t)$，$y = y(t)$ 给出的，或者说，得到了相点在相平面上沿积分曲线运动的规律. 同一曲线族的这两种表示方法的差别，在下述情况中表现得特别明显. 设 $x = x_0$，$y = y_0$ 是方程 (2.3) 之奇点的坐标[1]，即单个方程 (2.3) 不满足科希定理条件的点的坐标；而在我们的情况中，$x = x_0$，$y = y_0$ 却是方程组 (2.2) 的满足科希定理条件的点.

不难由直接代入来证实：函数组 $x = x_0$，$y = y_0$ 是方程组 (2.2) 的解，亦即，点 x_0，y_0 是方程组 (2.2) 的平衡状态，这一点我们已经讲过了. 应指出的是，因为在这一情况中，方程组 (2.2) 的解（对应于平衡状态）不依赖于 t，所以给定初始值 $t = t_0$，$x = x_0$，$y = y_0$，对任意的 t_0，我们得到形式为 $x = x_0$，$y = y_0$ 的解.

---

1) 根据方程 (2.3)，x_0 是方程 $f(x) = 0$ 的根，而 $y_0 = 0$.

研究沿通过奇点之积分曲线且向着奇点运动的相点．此相点运动的速度，我们已说过，是减小的，并且随着无限趋近平衡状态而趋近于零．试问，相点能不能在有限时间内到达平衡状态，或者象我们已指出的那样，它只能渐近地趋向平衡状态，却永远也不能达到该点？假定第一情况成立，即相点按规律 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 运动，当 $t=t_0$ 时不在平衡状态，而在某确定的瞬时 $t_1(t_1>t_0)$ 可到达坐标为 $x=x_0$，$y=y_0$ 的平衡状态，亦即 $x_0=x(t_1)$，$y_0=y(t_1)$．但这时我们便得到了两个解，它们满足同一初始条件（当 $t=t_1$，$x=x_0, y=y_0$），一个解是 $x=x_0, y=y_0$，另一个解是 $x=x(t)$，$y=y(t)$．后者是不可能的，因为正象我们刚刚对方程组（2.2）所说的那样，在点 $x=x_0$，$y=y_0$ 上，科希定理条件是满足的．

应指出，以后我们还会遇到一些方程组（类似于（2.2）或更一般的形式），这些方程组在相平面的某些点上，不满足科希定理的条件，例如，将要遇到某些真实物理系统的这样的动力学模型，其运动方程的右端是不连续的（例如受到干摩擦及库仑摩擦的振动系统）．对于这种模型，我们的论断：现在可以决定过去，一般来说，是不正确的．同样地，在这些情况中，一般而论，我们亦不能肯定：系统在有限时间内不能到达平衡状态．还要指出，在这些情况中，单个方程（类似于（2.3））的奇点并不是永远对应于平衡状态的．

§3．平衡状态近旁的相平面的研究

任意一个动力学系统，如果我们知道了它在相平面上的全部积分曲线，那末，对于不同初始条件下系统的一切可能运动，我们就有可能立即获得一个总的完整图象．保守系统的积分曲线的研究非常简单，这是由于方程（2.1）可以积分出来，因为它的变数可以分离．得到的积分为：

$$\frac{y^2}{2}+V(x)=h, \tag{2.7}$$

其中 $V(x)$ 是这样的，它满足 $V'(x) = -f(x)$，而 h 是积分常数，在我们的情况中，这个方程表示着能量守恒定律．实际上，$y^2/2 = m\dot{x}^2/2$ 是动能，$V(x) = -\int_0^x f(x)dx$ 是系统中作用力之功的负值，也就是系统的势能，h 是所谓的能量常数，它依赖于初始条件．一定的 h 对应于一定的初始条件（当 $t = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$）．

如果我们给定 h，则同一个 h 值对应着无限多的系统状态 (x, y)——x, y 平面上的一整条曲线 $y = \phi(x)$（它可以有若干孤立支线），称之为**等能量曲线**，如果所讨论的运动的总能量等于 h，那末相点将沿这条曲线的一个支线运动．也可能发生这种情况，给定 h 以后，我们找不到满足方程 (2.7) 的实数值 x 及 y．这意味着，在系统的任何实际运动中，都不可能有这样大小的能量．

在今后的研究中，我们将假设 $f(x)$ 以及 $V(x)$ 是全部 x 直线上的解析函数（其后我们还要研究这个假设不成立的一些例子）．

假设函数 $V(x)$ 是给定的，这样便于进行研究．应该指出，使 $f(x)$ 等于零的值 $x = \bar{x}_1, \cdots, x = \bar{x}_i$（奇点的横坐标），同时也使 $V'(x)$ 等于零．因而，这些值对应于势能 $V(x)$ 的极值，亦即，或是极小、或是极大、或是有水平切线的拐点．根据奇点处势能极值的性质，可以把方程 (2.3) 的奇点进行分类．

在讨论分类问题以前，首先对相平面上的积分曲线的形状，作一些一般性的说明：

1）方程 (2.7) 在以 $-y$ 代 y 时保持不变．因此这个曲线族的所有曲线都和 x 轴对称．

2）积分曲线上有铅垂切线的点的几何位置（这很容易由 (2.2) 看出）是 x 轴，例外的可能是奇点．

3）积分曲线上有水平切线的点的几何位置是平行于 y 轴的直线，其方程为 $x = \bar{x}_i$，其中 $\bar{x}_i$ 是方程 $f(x) = 0$ 的根，但这些直线与 x 轴的交点应除外，这些交点就是奇点．

如果给定了势能 $V(x)$，这是今后假定成立的，那末就可以指出一个在相平面上构造积分曲线的简单方法．为此目的，利用一

个辅助的"能量平衡平面"，并以 x, z 为其直角坐标轴，在这个平面上作出势能 $z = V(x)$. 因为

$$\frac{y^2}{2} = h - V(x),$$

那末，如果给定 h（总能量）则动能可表为 h 与 $V(x)$ 之差的形式. 正象我们所说过的，如果动能是负的，那末就不可能有对应的运动.

图 57 上，对一特殊形状的曲线 $z = V(x)$，作出了能量平衡图的一段. 为了在相平面上作出积分曲线[1)]，为方便计，我们把此相平面放在能量平衡图的正下面，必须依次由求出差 $h - V(x)$ 的平方根，并按得到的值在相平面上 x 轴的上面及下面标出相点. 在作图时不要忘记，刚才曾经指出过，所有积分曲线，如果它们不是在奇点与 x 轴相交的，则在与 x 轴相交的点上就有铅垂的切线[2)].

利用已经不止一次采用过的想法，不难求出沿这样得到的曲线段的运动. 改变 h，就在相平面上得到相邻的曲线.

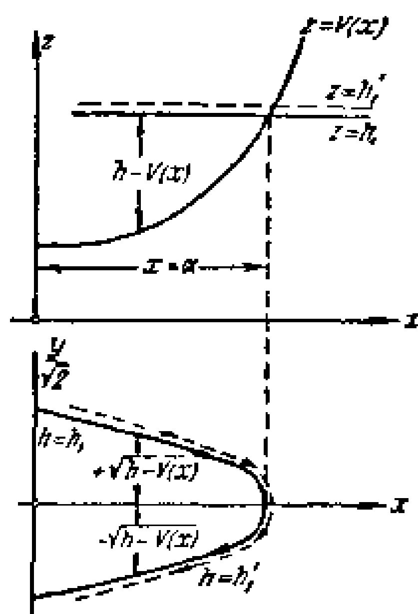


图 57

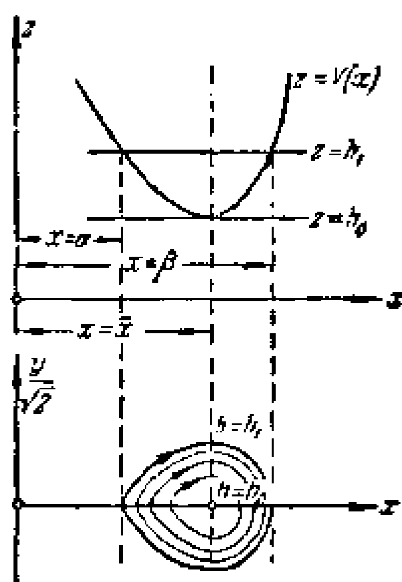


图 58

1) 为作图方便起见，在相平面上沿纵轴取了另一种比例尺，纵轴表示的不是 y，而是 $y/\sqrt{2}$.

2) 积分曲线与 x 轴之交点的横坐标 α，显然决定于方程 $V(x) = h$. 在所研究的情况中，点 $x = \alpha$ 不是奇点，因 $f(\alpha) \neq 0$.

以下利用这个方法来解决我们的问题——在相平面上作出平衡状态附近之积分曲线的图象．我们从对应于势能极小值的平衡状态开始．

设势能在 $x=\bar{x}$ 处有极小值，并且 $V(\bar{x})=h_0$．在 $x=\bar{x}$ 附近，能量平衡图的形状如图 58 所示．$h=h_0$ 的积分曲线退化成坐标为 $x=\bar{x}$, $y=0$ 的孤立点．对于邻近的值 $h=h_1(h_1>h_0)$，我们将得到闭积分曲线．沿这一闭曲线之运动的方向，很容易用普通的方法求出．

对于沿闭积分曲线的运动，真正速度，即质点的速度，有两次变为零：当 $x=\alpha$ 与 $x=\beta$ 时（图 58）；相点的速度无论在相平面上的那一点都不等于零，因为我们的曲线不通过奇点．沿闭曲线运动的相点，经过有限的时间后，又回到原先的地方．由此可知，这是一个周期运动．不难看出，对于中间的 $h(h_0<h<h_1)$ 值，也得出封闭积分曲线，并且它们也对应于周期运动．

我们在相平面上得到了闭曲线的一个连续统，这些闭曲线层层相套并且包围着退化为一点的积分曲线：$x=\bar{x}$, $y=0$．微分方程的奇点，其近旁的积分曲线具有这样的性状，我们已经在讨论线性保守系统时遇见过了．这种奇点，象我们已说过的，称之为**中心**．

我们在讨论特例时已经证实，中心型的奇点对应于稳定的平衡状态．现在求出这种奇点存在的解析条件，以及其邻近的闭曲线的近似方程．

在坐标为 $\bar{x}$ 的奇点附近，将 $f(x)$ 及 $V(x)$ 展开为级数，有：

$$f(x)=a_1(x-\bar{x})+\frac{a_2}{1\cdot 2}(x-\bar{x})^2+\frac{a_3}{1\cdot 2\cdot 3}(x-\bar{x})^3+\cdots, \tag{2.8}$$

$$V(x)=h_0-\left\{\frac{a_1}{1\cdot 2}(x-\bar{x})^2+\frac{a_2}{1\cdot 2\cdot 3}(x-\bar{x})^3+\frac{a_3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(x-\bar{x})^4\cdots\right\}, \tag{2.9}$$

其中 $a_1 = f'(\bar{x}) = -V''(\bar{x})$, $a_2 = f''(\bar{x}) = -V'''(\bar{x})$ 等等. 把坐标原点移到奇点, 令 $x = \bar{x} + \xi$, $y = 0 + \eta$, 再把级数形式的 $V(\bar{x} + \xi)$ 的表达式代入所研究的曲线族的方程(2.7)中. 于是所研究之曲线族的方程可以写作:

$$\frac{\eta^2}{2} + h_0 - \left\{\frac{a_1\xi^2}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{a_k\xi^{k+1}}{1\cdot 2\cdots(k+1)} + \cdots\right\} = h. \quad (2.10)$$

先讨论 $a_1 \neq 0$ 的情况. 在此种情况中, 在能量平衡图上, 直线 $z = h_0$ 和曲线 $V(x)$ 在点 $x = \bar{x}$ 处有简单(一重)切点. 因为 $V(x)$ 在 $x = \bar{x}$ 处有极小值, 所以 $V''(\bar{x}) > 0$ 且 $a_1 < 0$. 当 $h = h_0$ 时, 曲线 (2.10) 在点 $\xi = 0$, $\eta = 0$ 处有孤立的奇点.

对于充分小的 $\alpha = h - h_0 (\alpha > 0)$, 得到接近于椭圆的闭曲线, 因为此闭曲线近似地可以用方程

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 \quad (2.11)$$

来描述, 其中 $b^2 = 2\alpha$, $a^2 = 2\alpha/|a_1|$.

相平面上椭圆所表示的运动是谐运动. 这样, 对于充分小的初偏离, 运动将接近于谐运动. 当初偏离增大时, 一般来说, 运动将越来越不同于谐运动, 同时周期也将随着初偏离大小的不同而改变, 因为相点沿不同积分曲线转动时, 一般来说, 周期也是不相同的.

如果只有某个 $a_k \neq 0$ 而 $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $\cdots$, $a_{k-1} = 0$, 则在能量平衡图上, 直线 $z = h_0$ 与势能曲线在 $x = \bar{x}$ 点有 k 重切点. 因为 $V(x)$ 在 $x = \bar{x}$ 处有极小值, 所以 k 必定是奇数且 $a_k < 0$. 当 $h = h_0$ 时, 曲线(2.10)亦有孤立的奇点, 对于充分小的 $\alpha = h - h_0$ $(h > h_0)$, 我们得到闭积分曲线:

$$\frac{\eta^2}{2} + \frac{|a_k|\xi^{k+1}}{1\cdot 2\cdots k(k+1)} = \alpha. \quad (2.12)$$

围绕奇点的闭曲线, 即便在奇点的邻域中, 已经不再象椭圆了, 而对应的运动, 即便有极小的偏离时, 也不再近似于谐运动了.

但是, 运动在相平面上的一般拓扑图并不因此而改变: 任一

对应势能极小值的奇点，都为层层相套并对应于周期运动的闭曲线连续统所包围.

现在来讨论平衡状态对应于势能极大值的情况. 图 59 的上面是能量平衡图,下面表示了相平面. 在相平面上,对于 $h=h_0$ 的值,得到曲线的四条支线,它们有一公共点. 这些支线依次编号为 I, II, III, IV, 并为简单起见，称之为该奇点的"胡须". "胡须"在奇点邻近的特性很容易用分析方法进行研究，下面就是这样研究的. 对于接近于 h_0 的值 h($h_1>h_0$ 及 $h_2<h_0$), 将得到象双曲线的支线那样的积分曲线的线段（图 60). 在 h_1 与 h_2 之间改变 h, 得到中间曲线的连续统.

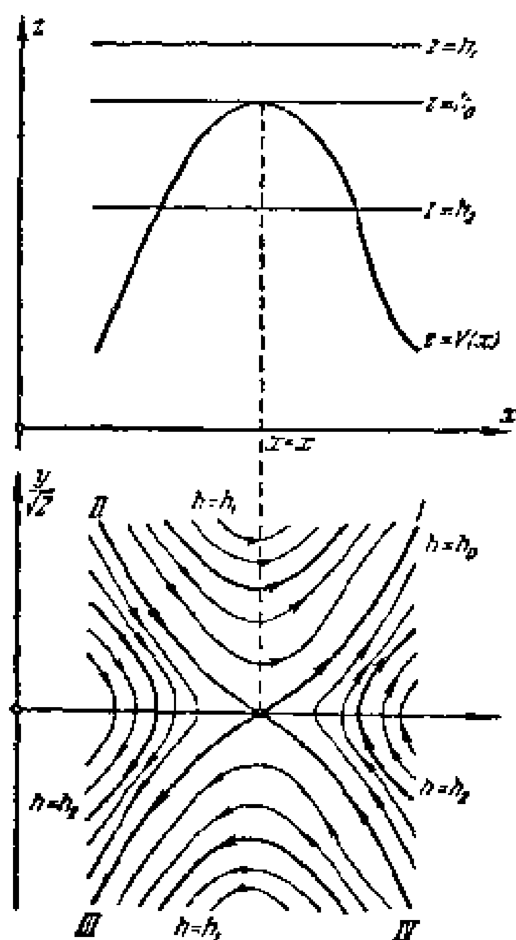


图 59

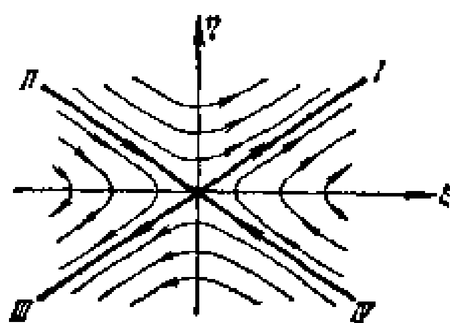


图 60

利用曾经多次采用过的方法，不难求出沿这些积分曲线的运动.

首先,研究沿胡须的运动（图 59). 相点一落到平衡状态附近的胡须 II 与 IV 上以后，就将渐近地趋近于平衡状态，而一落到胡须 I 与 III 上时,就将远离平衡状态(应指出,当以 $-t$ 代 t 时,胡须互换性质). 由其余积分曲线表征的运动具有这样的性质：如果相点落在任一条邻近平衡状态的这种曲线之上，它在有限的时

间内，走得离平衡状态充分地远.

微分方程的奇点，其邻近的积分曲线之性状具有这种性质，我们在讨论受斥力的系统时，已经遇到过了，这是鞍点型的奇点.

在讨论受斥力的线性系统时，我们已经看到，鞍点型的奇点对应于不稳定的平衡状态. 现在来求出有这种奇点存在的分析条件，以及在平衡状态邻域中积分曲线的近似方程. 完全象中心情况里的作法一样，我们又得到方程 (2.10)：

$$\frac{\eta^2}{2}+h_0-\left\{\frac{a_1\xi^2}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{a_k\xi^{k+1}}{1\cdot 2\cdots(k+1)}+\cdots\right\}=h.$$

这里也从直线 $z=h_0$ 与曲线 $V(x)$ 在 $x=\bar{x}$ 点有简单切点的情况开始，亦即从 $a_1\neq 0$ 的情况开始. 因为在 $x=\bar{x}$ 处 $V(x)$ 有极大值，所以 $V''(\bar{x})<0$ 且 $a_1>0$. 令 $h=h_0$，得胡须的方程. 不难看出，坐标原点 $(\xi=0,\eta=0)$ 是胡须的节点，并且在这个节点上，胡须的切线方程是

$$\eta=+\sqrt{a_1}\,\xi,\ \eta=-\sqrt{a_1}\,\xi. \tag{2.13}$$

对于小的 $h-h_0=\alpha$ 值，在奇点近旁我们得到和双曲线相似的曲线族，它决定于方程：

$$\frac{\eta^2}{2\alpha}-\frac{a_1\xi^2}{2\alpha}=1. \tag{2.14}$$

胡须的形状，以及积分曲线在奇点邻域中的性质如图 60 所示. 在前一章中，我们已经研究过相点沿这一双曲线族的运动特性. 显然，那里得到的结果，对于本情况中的沿奇点近旁的积分曲线的运动，亦近似地成立. 随着不断远离奇点，一般来说，用我们对线性系统所得到的结果来描述这里研究的运动时，其精确性也越来越差.

在直线 $z=h_0$ 和曲线 $V(x)$ 有 k 重切点的情况中，$a_1=0$，$a_2=0$ 等，直到某个 $a_k\neq 0$. 因为在 $x=\bar{x}$ 处 $V(x)$ 有极大值，所以 k 必定是奇数且 $a_k>0$. 令 $h=h_0$，我们又得到胡须的方程. 不难看出，坐标原点 $(\xi=0,\ \eta=0)$ 就是胡须的自切点 (图 61)，这些胡须在奇点近旁接近于曲线 $\eta^2=[a_k/1\cdot 2\cdots(k+1)]\times\xi^{k+1}$

且以 ξ 轴为公切线．对于小的 α 值 ($\alpha = h - h_0$)，我们得到邻近的积分曲线，它们在奇点近旁和曲线

图 61

$$\frac{\eta^2}{2} - \frac{a_k \xi^{k+1}}{1 \cdot 2 \cdots (k+1)} = \alpha \quad (2.15)$$

的性状相似．奇点周围的积分曲线已经和双曲线不同，且我们所研究的运动，即便是近似地，亦不能用受斥力的线性系统所得的图象来描绘了．但是相平面上运动的一般拓扑图还是和前述之情况一样，因而，运动的一般拓扑图，完全决定于势能有极大这一事实．

现在来讨论第三种，也就是最后一种情况，这时，势能曲线上的平衡状态对应于有水平切线的拐点．

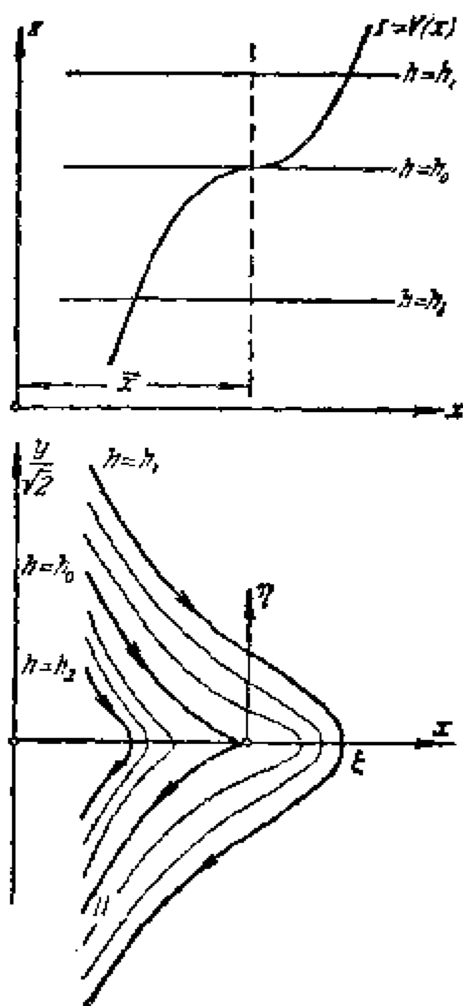


图 62

能量平衡图和相平面的形状如图 62 所示．除去 $h = h_0$ 以外，对于所有的 h 值，在相平面上建立积分曲线并无任何困难，当 $h = h_0$ 时，给出两条有公共点 $x = \bar{x}$，$y = 0$ 的支线．要说明这两条胡须在奇点近旁的特性，却有一些困难，为此需要进行解析研究．在进行这一和前面两种情况完全相同的研究之前，应指出，因为我们处理的是拐点，所以必定有 $a_1 = 0$ (因为 $a_1 = -V''(x)$，所以对第一个不等于零的系数 a_k，k 是偶数)．在此情况中，方程 (2.10)* 具有形式

* 原书是 (2.15)——译者注．

$$\frac{\eta^2}{2}-\left[\frac{a_k\xi^{k+1}}{1\cdot 2\cdots(k+1)}+\frac{a_{k+1}\xi^{k+2}}{1\cdot 2\cdots(k+2)}+\cdots\right]=h-h_0. \tag{2.16}$$

令 $h=h_0$，我们得到通过奇点的曲线．不难看出，这一曲线在点 $\xi=0$，$\eta=0$ 处有第一类尖点．落在胡须 I 上的相点，渐近地趋近于平衡状态，落在胡须 II 上的则离开平衡状态．平衡状态象鞍点的情况一样，显然是不稳定的，因为初瞬时在有限区域 $\delta(\varepsilon)$ 中的相点，经过充分长的时间后，必定越出有限区域 ε 的边界．沿胡须 I 向着平衡状态的运动，并不推翻我们关于平衡状态不稳定的论断，这也和鞍点情况中的相似运动一样．

我们讨论了系统势能极值的三种可能情况，并且分别指出了对应的奇点类型，和平衡状态的稳定性[1]．我们证实了，在势能极小的情况下，平衡状态是中心型奇点并且是稳定的；如果势能有极大值，则平衡状态是鞍点型奇点并且是不稳定的．在势能有拐点的情况中，平衡状态也是不稳定的．在这一基础上，对所讨论的最简单的保守系统的情况，可以提出两个关于稳定性的基本定理：

第一，拉格朗日定理[2]：

如果在平衡状态上势能有极小值，则平衡状态是稳定的；

第二，李亚普诺夫的逆定理：

如果平衡状态的势能不是极小，则平衡状态是不稳定的．

§4. 整个相平面上运动特性的研究

现在从局部地研究奇点近旁的运动，转到研究整个平面上的曲线．这时，我们仍将利用能量平衡平面，以及函数 $V(x)$ 在整个

1) 显然，微分方程 (2.3) 的每一个奇点，在微分几何意义下，亦是积分曲线

$$\frac{y^2}{2}+V(x)=h_0$$

的奇点．势能具有极小值的平衡状态对应于孤立的奇点；势能有极大值时对应于节点(亦即曲线的自交点)，或者对应于拓扑等价于节点的自切点；最后，势能有拐点的平衡状态对应于第一类尖点．

2) 这一定理有时亦称之为勒襄-第利赫 (Lejeune-Dirichlet) 定理，他是一位首先证明了此定理的数学家，对于多自由度保守系统，此定理亦成立．

直线 x 上解析的假设．以后，当我们研究实例时，我们也讨论某个 $V(x)$ 不连续的情况．

这样，假设在 x, z 平面上，我们给定了曲线 $z=V(x)$，它满足上面指出的要求[1]，并且给定直线 $z=h$．在相平面上，作出由给定的能量常数所表征的全部运动．可能遇到下列基本情况：

1) 直线 $z=h$ 不和曲线 $V(x)$ 相交．如果这时曲线 $z=V(x)$ 的点高于直线 $z=h$ 的点，那末，在整个相平面上，就不存在具有这样的总能量的运动，因为这种运动的速度是虚的．如果直线 $z=h$ 高于曲线 $z=V(x)$，那末，在相平面上，将有相轨线的二条对称分布的支线(图 63)．从上下支线上的任何位置开始运动的相点，都将沿一个方向运动，不停止地走向无限远．如果以 $-t$ 代 t，即令时间"倒流"，那末，相点的运动特性并不改变，只是运动的方向改变了．相点从任何初始位置开始都会走向无限远的这种运动和这种相轨线，我们称为逃逸运动和逃逸轨线．所研究的运动，当 $t\to+\infty$ 以及 $t\to-\infty$ 时，都是逃逸的．很容易看出，对于邻近的 h 值，我们得到同样的图象，也将有完全类似的相轨线．

2) 直线 $z=h$ 和曲线 $z=V(x)$ 相交，但不相切(图 64)．对

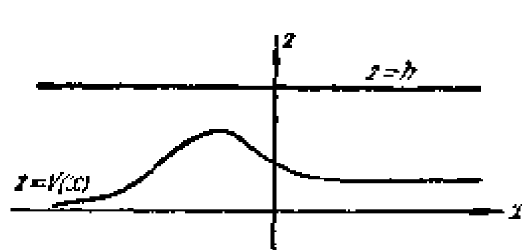


图 63

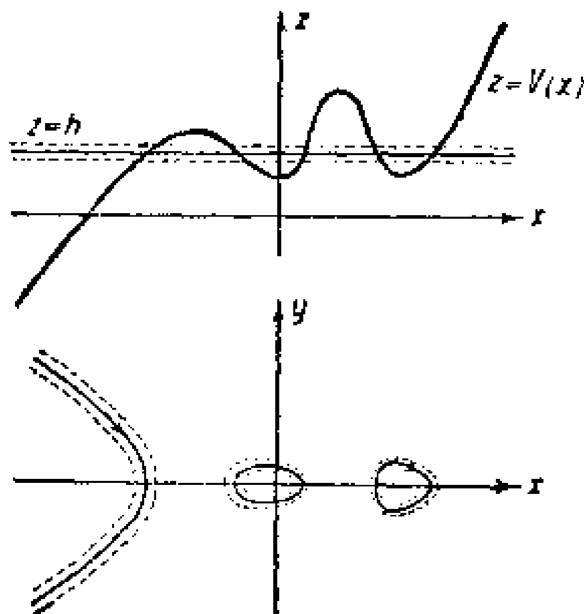


图 64

1) 为使讨论简单起见，我们设 $V(x)$ 没有切线平行于 x 轴的拐点．

于 $V(x)>h$ 的 x 值，没有相轨线，对于其余的 x 值则相轨线存在，同时可以将它们分为两种：或者是走向无限远的支线（这种支线不多于两条）；或者是闭支线（这种支线的数目可以是任意的）。走向无限远的支线仍然对应于逃逸运动，当 $t\to+\infty$ 亦好，当 $t\to-\infty$ 亦好。闭支线对应于周期运动。

对于邻近的 h 值，我们将得到同样的图象，而且，在闭曲线附近得到的还是闭相曲线，在无限支线附近还是无限支线。

3）直线 $z=h$ 和曲线 $z=V(x)$ 相切。这时所有相曲线可以分为以下几类：

a）孤立点，且在它的近旁（对于给定的 h）没有相曲线的支线。这是稳定的平衡状态，关于这些我们已经讲过了。如果我们改变 h，那末当 h 增加时，将得到包围该孤立点的闭曲线，当 h 减小时，在孤立点近旁我们将得不到曲线的实的支线。

b）孤立的有限大的相曲线段。它们可以分为两种：或者是简单的、对应于周期运动的闭曲线，关于这些我们已经讲过了，或者是自交的相曲线，它们是属于所谓的分界线（即通过奇点的曲线）之列的曲线。这些自交点或鞍点型奇点，正象我们已经知道的，在 x, z 图上，对应于直线 $z=h$ 和曲线 $z=V(x)$ 之极大值相切的那些点（图 65）。我们现在所谈的分界线，是由一个“环”构成

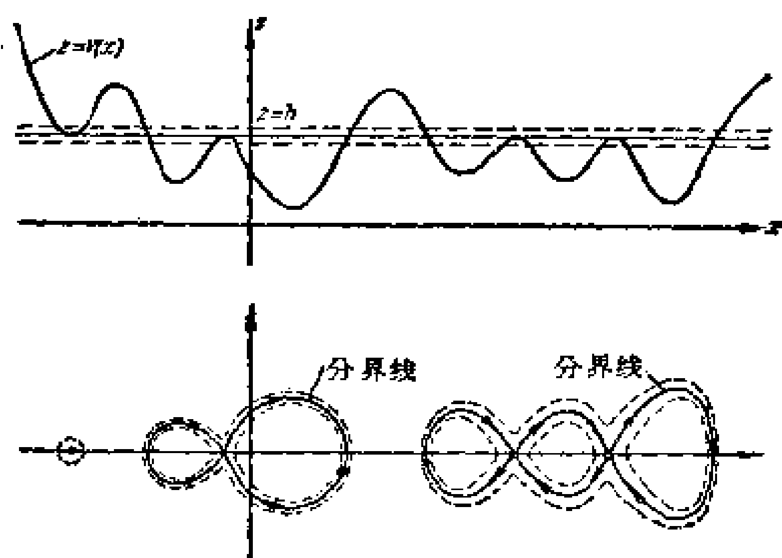


图 65

的(在退化的情况下),而一般来说,则是由几个环组成的．每一个环是一条单独的相轨线(如果它是边界的环),或由两条相轨线组成的(如果它不是边界的环)[1]．沿我们谈到的任一条轨线的运动,都是渐近地趋向于平衡状态的运动,这样的运动称为**有限**运动．在研究处于上平衡位的摆时,我们已经指出了这种运动的一个例子．现在所讨论的运动,当 $t\to+\infty$ 和 $t\to-\infty$ 时,都是有限运动．分界线,在某种意义下,是特殊的积分曲线,因为它在能量平衡平面上,对应于直线 $z=h$ 和曲线 $z=V(x)$ 的切点．知道分界线,对于说明积分曲线在相平面上的概况,有着非常重要的意义．

在改变 h 时,邻近曲线的特性,和我们是增加 h 还是减少 h,有着极大的关系．当增加 h 时,我们得到的积分曲线,包围着所有被研究的分界线,包含着有限轨线组成的整个"环链"．减小 h 时,我们在每个环节之内,得到闭积分曲线(图 65)．由此,**相平面上有一些区域,每一区域中充满着一定类型的轨线,而作为将这些区域分割开来的"分隔"曲线的分界线的作用,就十分明白了**．

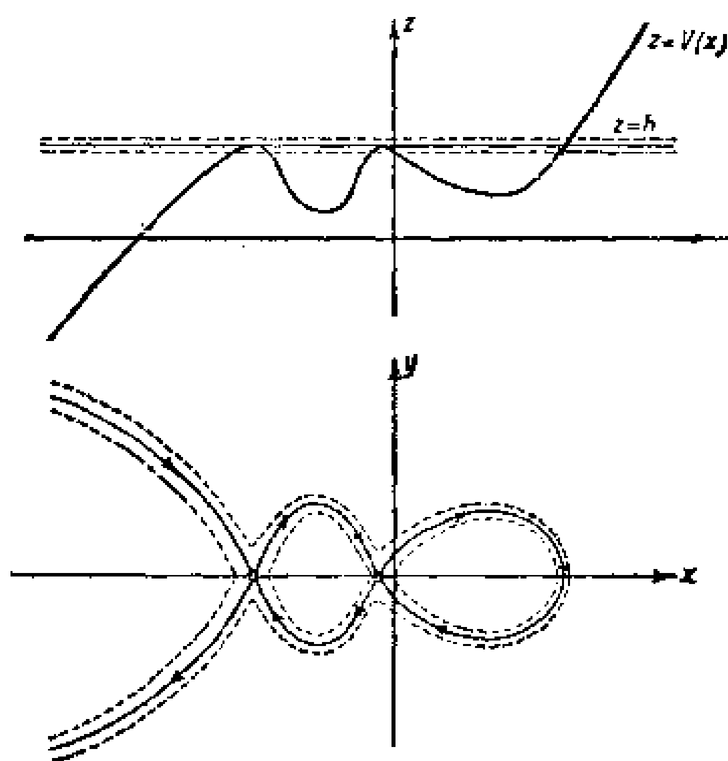


图 66

c) **无限大的相曲线段**．在此情况中,可能有几种类型的曲线．第一,可能是在第二点中讨论过的那种类型的逃逸轨线．第二,可能是无限环链形状的分界

1) 奇点也是单独的轨线,它们对应于平衡状态．

线，它可以向一边或两边延伸．这里，完全新型的轨线是这样的曲线，它当 $t \to +\infty$ 时是逃逸的，而当 $t \to -\infty$ 时，是有限的，或者与此相反（图 66）．这种轨线我们也称之为分界线，因为在其上一定有对应于直线 $z=h$ 和曲线 $z=V(x)$ 之切点的奇点，也因为，这是主要的，随着我们增加 h 或减少 h，邻近曲线的特性将有本质上的变化．

还应指出，当 $t \to +\infty$ 以及 $t \to -\infty$ 时都逃逸的运动有时也被看作是分界线．在我们讨论情况中，当直线 $z=h$ 是曲线 $z=V(x)$ 的渐近线时，就有可能出现这种运动，因为这时改变 h，就会使相轨线的特性发生本质上的改变．

为清楚起见，图 67 上表示了一个这种分界线的例子．当 h 减小时，逃逸轨线变成周期轨线．

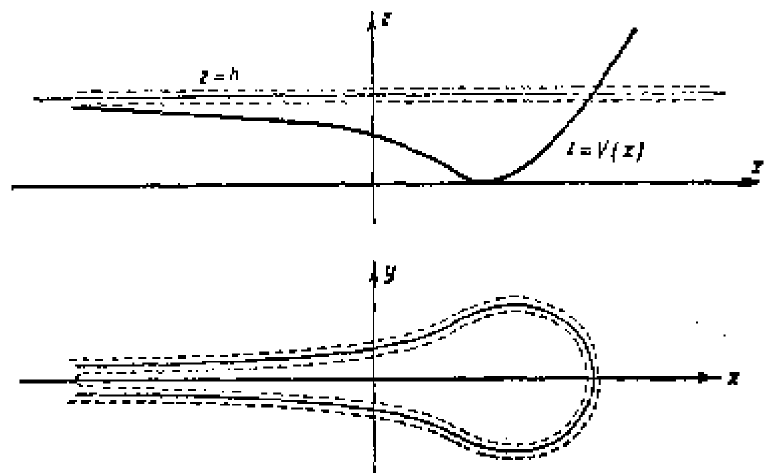


图 67

于是，总括得到的结果，将可能产生的运动列举如下：

1）平衡状态．

2）周期运动．

3）双面有限运动（当 $t \to +\infty$ 与 $t \to -\infty$ 时）．

4）双面逃逸运动（当 $t \to +\infty$ 与 $t \to -\infty$ 时）．

5）有限-逃逸运动（当 $t \to +\infty$ 时有限，当 $t \to -\infty$ 时逃逸，或相反）．

可以证明[163]（关于这个问题以后我们还要讲到），对于保守系统，几乎所有的运动或者是周期的，或者是双面逃逸的，亦即，如果我们假定相平面上所有的初值都是等概率的，那末，对应于 1），3），5）型的运动的初始条件出现的概率等于零（这种初始点在相平面

上分布得非常“稀少”)．但是，对应于这种运动的相轨线，在相平面上起着很大的作用：它们是分界线——它们在相平面上把不同类型的轨线分割开来．

在结束本节之前，须要研究一下奇点沿直线 $y=0$ 分布的规律，(在我们的情况中，奇点只能分布在这条线上)并研究奇点和闭相轨线共存的规律．对于非保守系统的一般情况，这两个问题都是庞卡莱解决了的，这些结果我们今后将要给出．对于这里研究的特殊情况，可以根据最简单的想法来回答这些问题．先回答第一个问题．显然，曲线 $z=V(x)$ 的极大值与极小值是彼此相间的．由此可知，鞍点型和中心型奇点在相平面上的横轴上，也是彼此相间出现的．

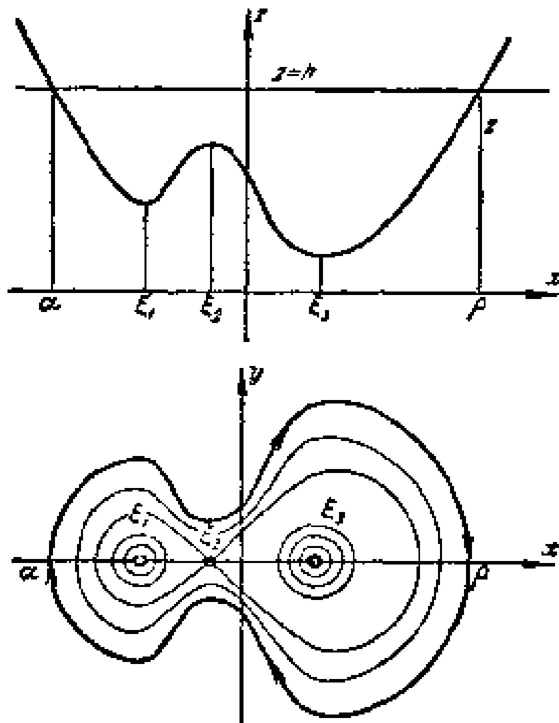


图 68

为了回答关于闭曲线和奇点共存的第二个问题，也须要利用能量平衡平面(图 68)．

设在相平面上有闭曲线 $\alpha\rho$．那末在能量平衡平面上，点 α, ρ 对应于直线 $z=h$ 和曲线 $z=V(x)$ 的交点．研究函数 $\Phi(x)=h-V(x)$．在我们的情况中，$\Phi(\alpha)=0$, $\Phi(\rho)=0$，且对于 $\alpha<x<\rho$ 有 $\Phi(x)>0$．因此，根据罗尔定理，我们可以确信，有这样的 $x=\xi(\alpha<\xi<\rho)$ 值存在，使得 $\Phi'(\xi)=0$，或者说使得 $V'(\xi)=0$ 亦是一样．于是，我们证明了，在闭相轨线之内，必定至少有一个奇点，或换句话说，周期运动必定是围绕平衡状态而进行的．从几何的考虑可看出，如果奇点是唯一的，那末它对应于势能的极小值，并且是中心型的奇点；如果这种奇点不只一个，那末中心和鞍点是彼此相间的，而且中心的数目永远比鞍点的数目要多一个．于是我们可以提出这样的定理：在保守系统情况

中，在闭曲线之内，必定有奇数个的奇点，而且中心的数目要比鞍点的数目多一个.

在结束本节时，我们研究普通的摆（单自由度的），忽略阻力，并且不再限制摆相对铅垂线的偏角是很小的．这个保守系统将稍稍越出以上阐述问题的范围，因为这时相面不能取为平面．事实上，摆的位置决定于一角度（记为 ϑ），并且彼此相差 2π 的所有 ϑ 值都确定摆的同一个位置．因此，如果摆的相面取为普通的平面，以 ϑ, $\dot{\vartheta}$ 为其笛卡儿坐标，那末平面上的点 $(\vartheta+2k\pi, \dot{\vartheta})$（其中 k 为任意整数），和点 $(\vartheta, \dot{\vartheta})$ 所对应的是同一个状态，亦即，破坏了系统状态与其相面间的连续的一一对应的要求．如果摆的相面不取为平面，而取为柱面（图 69）[1]，这个要求就满足了．摆的相面的柱面形式，显然和存在两种不同类型的摆的运动：不绕轴转动的运动和绕轴转动的运动，有密切的联系．

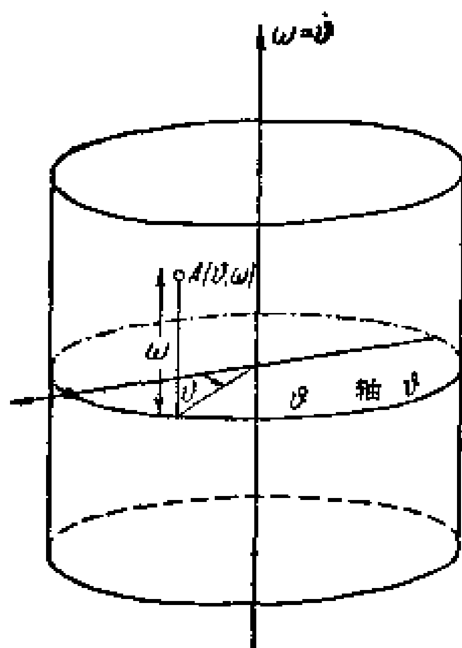


图 69

大家知道，摆的方程可以写为：

$$I\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+mgl\sin\vartheta=0, \tag{2.17}$$

其中 I 是惯性距，l 是重心到悬挂点的距离，$P=mg$ 是摆的重量（角度 ϑ 由向下的铅垂线算起）．方程（2.17）可以化为两个一阶方程的方程组：

1）将摆以及和它类似的系统的相轨线，不表示在柱面上，而表示在柱面在平面上的展开面上，即形为一宽 2π 的带状域中，是非常方便的．但是，在这个情况中，必须注意，柱面的同一个截开线在其展开面上表示成两条直线（边界线）；因此，把柱面的展开面当作相面时，应该把这两条直线上的点（ϑ 相同的点）视为同一点，亦即，认为它们对应于系统的同一个状态．

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\omega,\quad \frac{d\omega}{dt}=-\frac{mgl}{I}\sin\vartheta. \tag{2.18}$$

为了得到积分曲线在相柱面上（或其展开面上）的微分方程，将方程（2.18）的第二个方程除以第一个：

$$\frac{d\omega}{d\vartheta}=-\frac{mgl}{I}\cdot\frac{\sin\vartheta}{\omega}. \tag{2.19}$$

积分这个方程，我们就得到能量积分（或者，换句话说，得到方程（2.19）的积分曲线族的方程）：

$$\frac{1}{2}I\omega^2-mgl\cos\vartheta=h\,(=\text{常数}). \tag{2.20}$$

为了作出积分曲线，利用§3中所给出的方法．在辅助的 ϑ，z 平面上，作曲线

$$z=V(\vartheta)=-mgl\cos\vartheta, \tag{2.21}$$

并在其下面画出相柱面的展开面，根据（2.20）有

$$\omega=\pm\sqrt{\frac{2}{I}}\cdot\sqrt{h-V(\vartheta)},$$

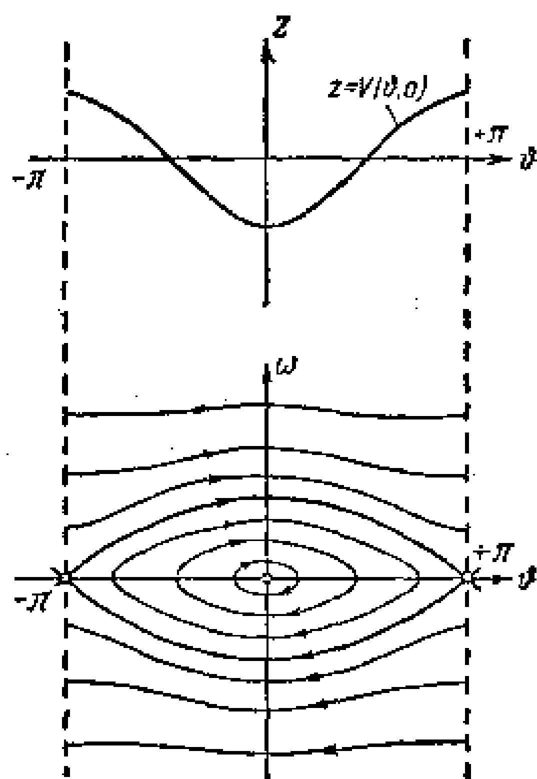


图 70

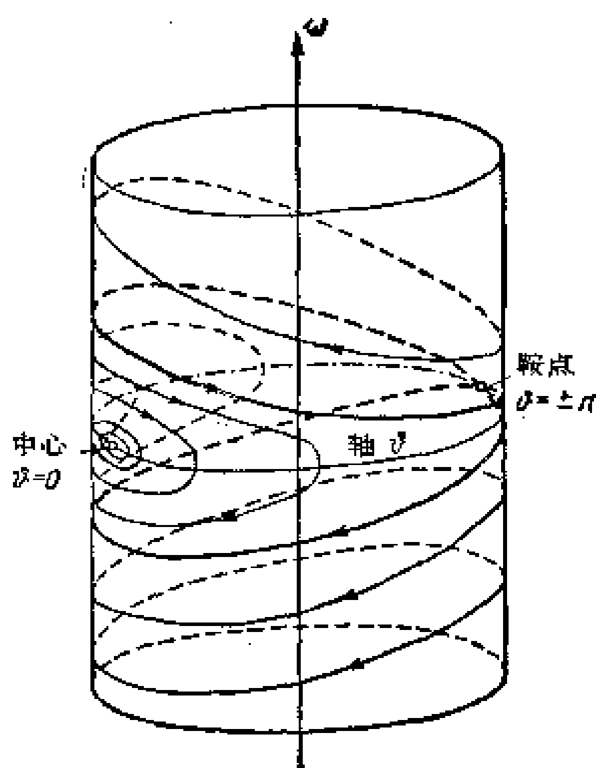


图 71

由此不难在展开面上作出积分曲线族. 作法如图 70 所示. 奇点 (0, 0) 是中心(对应于积分常数 $h=-mgl$). 它被积分常数满足 $-mgl<h<+mgl$ 的闭相轨线连续统所包围. 这些相轨线,显然对应于摆在下平衡位置附近的不绕轴转动的周期运动. 当积分常数 $h=+mgl$ 时,得到通过鞍点 $(\pm\pi, 0)$ 的积分曲线,亦即,由鞍点和它的分界线组成的积分曲线 (前者对应于上面的不稳定平衡状态,而后者对应于摆的有限运动,当 $t\rightarrow+\infty$ 时,作有限运动的摆渐近地趋向上平衡位置). 当 $h>+mgl$ 时,得到了分界线之外的、包围着柱体的轨线. 因为,对于每一条这样的轨线,当 $\vartheta\rightarrow+\pi$ 和 $\vartheta\rightarrow-\pi$ 时 ω 的值重合,所以我们可以断言,这些轨线也是闭的(它们对应于摆的周期转动). 沿截线 $\vartheta=\pm\pi$"粘合"柱的展开面,就得到摆的相图——被相轨线所划分的相柱面 (图 71)*. 这样,保守摆的全部相轨线,除奇点——中心和鞍点,以及鞍点的分界线以外,都是闭的,并且有两种性质上不同类型的相轨线: 围绕相柱的和不围绕相柱的.

§5. 最简单保守系统的性状和参数的关系

我们已经说过,保守系统是一个特殊的系统,所谓特殊是指它有能量积分而言的. 换句话说,如果我们任意地,虽然是充分小地改变运动方程的形状,那末一般来说,这些方程就不再满足保守性条件了. 但是,对于表征系统性质的参数,我们现在将只研究它们的这样的变化,在这些变化下,系统仍然是保守的. 为简单起见,假设我们只有一个变参数,而且只有系统的势能依赖于这个参数.

我们的任务在于研究参数改变时,相平面的形状是怎样改变的. 当参数作非常缓慢的变化时,有确定初始条件的某一确定的运动,将如何运动这一重要问题,我们将不涉及[1].

---

* 图 71 中,相柱上最高的那一个围绕相柱的闭轨线上的箭头方向画反了——译者注.

1) 对于保守系统来说,回答这一问题恰恰是特别困难的; 在这个情况中,所谓的绝热不变量理论就是研究这些问题的.

对于保守系统，确定积分曲线定性图象的基本元素为奇点和分界线. 如果我们知道了分界线的形状（鞍点型奇点是分界线的自交点），以及分界线和中心型奇点间的相对分布情况，那末，我们就可以概括地描绘出积分曲线的整个图象.

当参数变化时，积分曲线也将改变. 但是，正象我们假设的那样，势能是参数的解析函数，那末这种改变将是连续的. 积分曲线的一般形状，一般来说，只作定量的变化，仅仅对于参数的某些特殊的所谓的“分枝”值，积分曲线的特性才有定性的变化. 我们已经说过，在保守系统情况中，决定积分曲线在相平面上定性图象的基本元素是奇点和分界线. 因此，在这一情况中，参数的分枝值，就是使这些基本元素的特性或数目发生变化的那些参数值.

可以更精确、更一般地给出以下定义，这个定义不牵涉到系统的保守性：参数值 $\lambda = \lambda_0$ 我们称为普通的，如果存在这样的有限的 $\varepsilon(\varepsilon > 0)$，使得对所有满足不等式 $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ 的 λ，相平面的积分曲线划分*，有相同的拓扑结构；其他不满足这个条件的参数值称为**分枝值**.

我们比较详细地阐述由庞卡莱[182,183]所发展起来的关于平衡状态和参数的依赖关系的理论，因为我们在研究自振系统时要用到它；其他分枝情况：分界线和参数间之关系的情况，我们只举例说明.

设系统 (2.1) 的势能，当然力亦是这样，是参数 λ 的函数[1]，λ 可取不同的值. 平衡位置 $(x = \bar{x})$ 有这样的特征，在其上力等于零，亦即

$$f(\bar{x}, \lambda) = 0. \tag{2.22}$$

对 $\bar{x}$ 解这个方程，可以求出当参数 λ 取某值时，所研究的保守系统所具有的平衡位置，也可以看出当参数 λ 改变时，平衡位置是怎样

* “绘有积分曲线（相轨线或相迹）的相平面”，是本书中大量应用的一个短句，因此我们仿原著者，给予名词“相平面的积分曲线划分”（“相平面的相轨线划分”或“相平面的相迹划分”）——译者注.

1) 我们假设 $f(x, \lambda)$ 在整个 x 直线上是 x 的解析函数，并且在所研究之 λ 值区域上是 λ 的解析函数.

变化的.

利用所谓的分枝图——在 λ, $\bar{x}$ 平面上绘出的曲线 $f(\bar{x}, \lambda)=0$, 平衡位置和参数之间的关系，可以得到明晰的解说. 例如，假定这一曲线有图 72 所示的形状. 平行于纵坐标的直线 $\lambda=\lambda_0$ 和曲线 $f(\bar{x}, \lambda)=0$ 交于三个点；很明显，这意味着，对于所给定的参数值 $\lambda=\lambda_0$, 系统有三个平衡状态 $\bar{x}=\bar{x}_1$, $\bar{x}=\bar{x}_2$ 和 $\bar{x}=\bar{x}_3$. 当 λ 减小时，平衡位置 $\bar{x}=\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}=\bar{x}_2$ 逐渐接近，当 $\lambda=\lambda_C$ 时，它们重合在一起然后消逝(当 $\lambda<\lambda_C$ 时，只存在一个平衡状态: $\bar{x}=\bar{x}_3$). 这样，参数值 $\lambda=\lambda_C$ 就称为分枝值. 值 $\lambda=\lambda_A$ 与 $\lambda=\lambda_B$ 也是分枝值，这时平衡状态的数目亦发生变化.

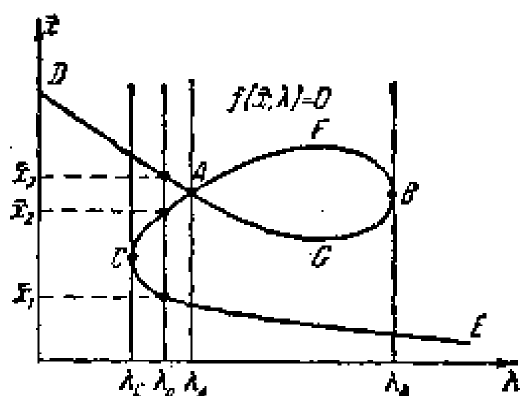


图 72

把方程 (2.22) 对 λ 微分之，得:

$$\frac{df}{d\bar{x}} \cdot \frac{d\bar{x}}{d\lambda} + \frac{df}{d\lambda} = 0$$

或

$$\frac{d\bar{x}}{d\lambda} = -\frac{f'_\lambda(\bar{x}, \lambda)}{f'_x(\bar{x}, \lambda)}. \tag{2.23}$$

由此可知，在曲线 $f(\bar{x}, \lambda)=0$ 上 $f'_x(\bar{x}, \lambda)\neq 0$ 之点的邻域中，$\bar{x}$ 是 λ 的连续可微函数. 因此，如果对于某个参数值 $\lambda=\lambda_0$, 方程组

$$\begin{aligned} f(x, \lambda) &= 0 \\ f'_x(x, \lambda) &= 0 \end{aligned} \tag{2.24}$$

对 x 没有实解，我们可以断言，在参数值 $\lambda=\lambda_0$ 的充分小邻域中，所有平衡位置的横坐标 $\bar{x}$ 都是参数 λ 的连续可微函数，并且平衡位置的数目不可能改变. 同时，这种 $\lambda=\lambda_0$ 值不是分枝值(其意义为，在 λ 穿过 $\lambda=\lambda_0$ 的变化中，平衡状态数目不改变).

现在设在曲线 $f(\bar{x}, \lambda)=0$ 的某点 $(\lambda, \bar{x})$ 上有 $f'_x(\bar{x}, \lambda)=0$. 如果 $f'_x(\bar{x}, \lambda)=0$ 而 $f'_\lambda(\bar{x}, \lambda)\neq 0$, 那末，曲线在这点上有铅垂的切线，并且当 λ (沿相应的方向)通过对应于该点的值时，$\bar{x}$ 的两个实根汇合，然后变成复根[1]. 这一点是平衡状态数目发生变化的分枝点(图 72 上的 B 点和 C 点). 如果在曲线 $f(\bar{x}, \lambda)=0$ 的点 $(\lambda, \bar{x})$ 上，有 $f'_x(\bar{x}, \lambda)=0$ 及 $f'_\lambda(\bar{x}, \lambda)=0$, 那末，我们遇到曲线(在微分几何意义下)的奇点. 这个点(图 72 中的 A 点)也是分枝点，因为对于和该点相对应的 λ 值，平衡状态的数目，和对于相邻参数值的数目，总是不相同的.

这样，曲线 $f(\bar{x}, \lambda)=0$ 上 $f'_x(\bar{x}, \lambda)=0$ 的点，都是分枝点，而相应的参数 λ 的值，都是分枝值. 除了这些分枝值以外，对应于曲线 $f(\bar{x}, \lambda)=0$ 趋向无限的那些 λ 值，也是分枝值(如果曲线具有铅垂渐近线的无限支线时，就会发生这种情况).

每一个平衡位置 $x=\bar{x}$, 对应于一定的平衡状态 $(x=\bar{x}, \dot{x}=0)$ ——相平面上某一奇点. 奇点的特性(或者说平衡状态的稳定性，亦是一样)，我们已经看到过，决定于导数 $f'_x(\bar{x}, \lambda)=-V''_{xx}(\bar{x}, \lambda)$ 的符号. 那就是，当

$$f'_x(\bar{x}, \lambda)<0 \tag{2.25}$$

(势能极小)时，平衡状态是稳定的(中心型)，而当

$$f'_x(\bar{x}, \lambda)>0 \tag{2.26}$$

(势能极大)时，平衡状态是鞍点并且不稳定.

仿照庞卡莱的工作，不难给出一个利用分枝图迅速确定平衡状态稳定性的简便步骤. 在 λ, $\bar{x}$ 平面上，标出(用阴影线) $f(\bar{x}, \lambda)>0$ 的区域(显然，$f(\bar{x}, \lambda)=0$ 为这一区域的边界). 如果所给的点 $(\lambda, \bar{x})$ 在阴影区的**上边界**上，则它对应于稳定的平衡状态[2]. 实际上，在这一点的邻近里，随着 $\bar{x}$ 的增加(λ 固定)函数 $f(x, \lambda)$ 从阴影区内的正值开始减小，到曲线 $f(\bar{x}, \lambda)=0$ 上时变为零. 因

---

1) 我们不研究曲线 $f(\bar{x}, \lambda)=0$ 在这点有拐点的情况. 为此我们只要假设，例如，在这点上 $f''_{xx}(\bar{x}, \lambda)\neq 0$ 就够了.

2) 我们假定坐标轴是按习惯的方式作出的: $\bar{x}$ 轴向上，λ 轴向右.

而，$f_x'(\bar{x}, \lambda) < 0$，这对应于中心型奇点和稳定的平衡状态．如果曲线 $f(\bar{x}, \lambda) = 0$ 的点位于阴影区的下边界上，则它对应于不稳定的平衡状态．因为根据类似的理由，可得不等式 $f_x'(\bar{x}, \lambda) > 0$．按照这个步骤，在图 73 上，立即可以看出，线段 DA，AFB，CE（带黑点的粗线）上的点对应于稳定的平衡状态，而线段 AGB，AC（带白点的细线）上的点对应于不稳定的平衡状态．

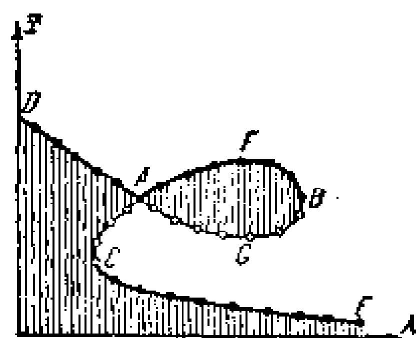


图 73

现在注意一下下面的事实．如果我们在分枝图上沿曲线 $f(\bar{x}, \lambda) = 0$ 移动，那末在到达分枝点以前，平衡状态的特性，即其稳定性或不稳定性，将保持不变．不难看出，如果我们还继续沿着曲线移动，并且总是顺着切线的方向（亦即，使切线作连续的转动），那末在分枝点上，稳定的平衡状态将变为不稳定的平衡状态，或作相反的变化．在图 73 上的点 A，B 和 C 处，稳定性就发生这样的变化．

总之，我们看到，当参数 λ 变化时，在相平面的有限部分里，平衡状态只能是成对地出现或消失，同时（这是保守系统独有的特点），一个平衡状态，只有在和另一平衡状态先行汇合以后，它的稳定性才会改变，例如，从稳定的变为不稳定的．

在稳定性相交替的意义下，保守系统的平衡状态构成一个封闭系统，当参数改变时，这个系统的性状可以和分界线的性状分开来研究．

使平衡状态汇合或走向无限远的参数值，当然都是参数的分枝值，但是一般来说，这些值并不是全部的分枝值，因为当平衡状态的数目和特性不变时，分界线可能有本质上的改变．

对于第二种类型的分枝值，我们将不作任何一般性的讨论，只在下面就要研究的个别实例中，作些介绍．上面对于分枝值（在这些值上，平衡状态的性质将发生变化）所讲的全部内容，亦将用这些例子加以解说．

1. 重质点沿绕铅垂轴旋转之圆环的运动 研究质量为 m 的重质点沿半径为 a 之圆环的运动，此圆环又以等角速度 Ω 绕自己的铅垂直径而转动(图 74). 在旋转平面上振动的摆，可以作为这种保守系统的例子.

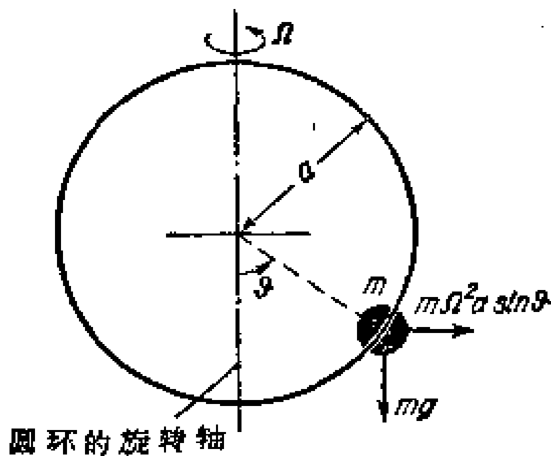


图 74

点(质量为 m)在和旋转圆环固连的坐标系中的位置，用角 ϑ 来确定. 为了以牛顿第二定律的形式，写出重质点在这个旋转的、非惯性的坐标系中的运动方程，如所周知，必须引入惯性力，在这一情况中即离心力. 重力对圆心的矩等于 $-mg\,a\sin\vartheta$；离心力等于 $m\Omega^2 a\sin\vartheta$，而其矩等于 $+m\Omega^2 a^2\sin\vartheta\cos\vartheta$. 因此，忽略摩擦力，我们得到所研究的系统的运动方程为:

$$I\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=m\Omega^2a^2\sin\vartheta\cos\vartheta-mga\sin\vartheta, \qquad (2.27)$$

其中 $I=ma^2$ 是重质点的惯性矩(对圆心的).

如果引入无量纲参数

$$\lambda=\frac{g}{\Omega^2 a}$$

及新的无量纲时间

$$t_{新}=\Omega t$$

(以下在字母上面加点以表示对新时间的微分)则方程(2.27)可化为只含有一个参数的形式:

$$\dot\vartheta=\omega,\quad \dot\omega=(\cos\vartheta-\lambda)\sin\vartheta. \qquad (2.28)$$

为了以保守系统(2.28)为例，来解说当改变参数而奇点数目不改变时，分界线特性的定性变化，我们将假定参数 λ 可以取任意值 $-\infty<\lambda<+\infty$，虽然对于所研究的物理系统来说 $\lambda>0$，而

$\lambda \leqslant 0$ 的值是没有物理意义的[1]。

由于重质点的位置单值地决定于角度 ϑ，所以该系统的相面亦是柱面（我们将在这个柱面的展开面上画出相轨线）。把方程 (2.28) 中的二式相除，便得到积分曲线的方程：

$$\frac{d\omega}{d\vartheta} = \frac{(\cos\vartheta - \lambda)\sin\vartheta}{\omega}. \tag{2.29}$$

其能量积分可写为：

$$\omega^2 - (\sin^2\vartheta + 2\lambda\cos\vartheta) = h \tag{2.30}$$

（由 (2.30) 立即可看出，积分曲线对称于 ϑ 与 ω 轴）。

平衡位置决定于方程：

$$f(\vartheta, \lambda) \equiv (\cos\vartheta - \lambda)\sin\vartheta = 0. \tag{2.31}$$

显然，对于任何 λ，系统都有平衡位置 $\vartheta = 0$，$\vartheta = \pm\pi$，此外当 $|\lambda| < 1$ 时，还存在两个平衡位置 $\vartheta = +\vartheta_0$ 和 $\vartheta = -\vartheta_0$，其中 $\vartheta_0 = \arccos\lambda$。图 75 表示出了平衡位置的分枝图（影线及黑白点的意义和上例相同）。这样，当 $\lambda > +1$ 时，系统有两个奇点：中心（$\vartheta = 0, \omega = 0$）及鞍点（$\vartheta = \pm\pi$，$\omega = 0$）；当 $-1 < \lambda < +1$ 时，有四个奇点：中心（$\vartheta = \pm\vartheta_0$，$\omega = 0$）及鞍点（$\vartheta = 0$，$\omega = 0$）和（$\vartheta = \pm\pi$，$\omega = 0$）；最后，当 $\lambda < -1$ 时，也有两个奇点：中心（$\vartheta = \pm\pi$，$\omega = 0$）及鞍点（$\vartheta = 0$，$\omega = 0$）。

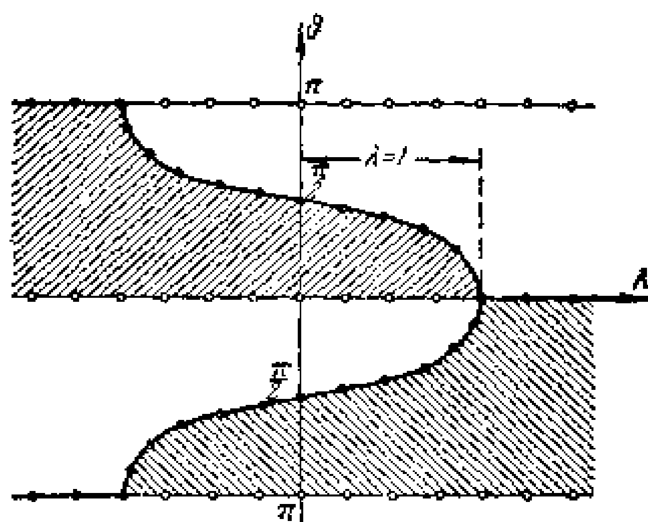


图 75

为了求出分界线，将利用以下情况：每条分界线都通过相应的鞍点型奇点，而鞍点上的能量积分常数 h 又可以很容易地算出

1）注意 $\lambda = 1$ 的值对应于 $\Omega = \sqrt{g/a}$，亦即，圆环旋转角速度和质点 m 在下平衡位置附近（当 $\Omega = 0$）作微振动时的圆频率相等的情况。

来．通过鞍点 ($\vartheta=\pm\pi, \omega=0$)（当 $\lambda>-1$ 时，它是鞍点）的分界线的方程是：

$$\omega^2=\sin^2\vartheta+2\lambda(\cos\vartheta+1). \qquad (A)$$

第二个分界线通过点 $(0,0)$，而此点当 $\lambda<1$ 时为鞍点，其方程为：

$$\omega^2=\sin^2\vartheta+2\lambda(\cos\vartheta-1). \qquad (B)$$

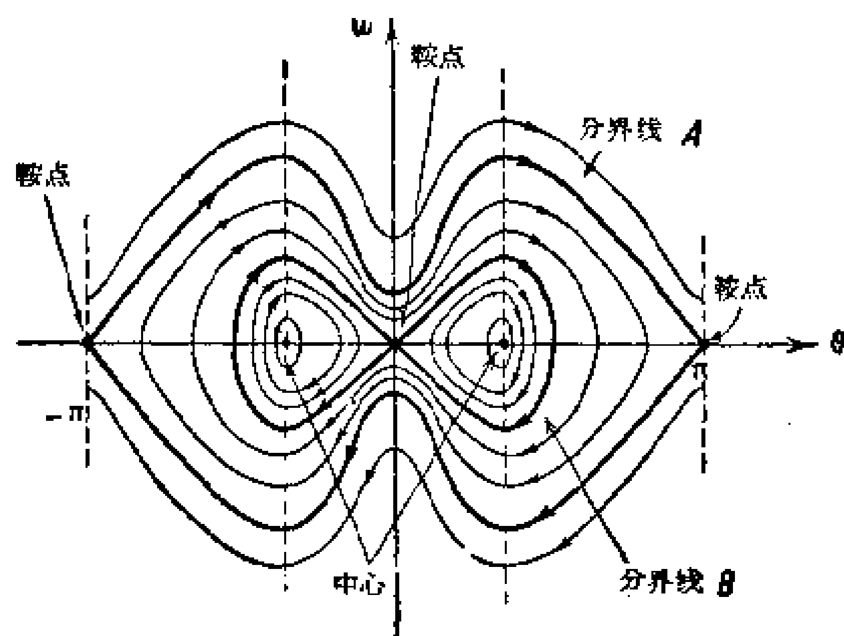


图 76

对 $0<\lambda<1$ 的情况，这两根分界线都是“8 字形”的，如图 76 所示．当 $\lambda=0$ 时两根分界线汇合成如图 77 所示的形状；当 $-1<\lambda<0$ 时得到与 $0<\lambda<+1$ 时相同的图形，不过沿 ϑ 轴平移了一个 π（图 78）．在 $0<\lambda<+1$ 的情况中（图 76），在外分界线（分界线 A）的内部有三个周期运动区，两个单连通的（其中的闭相轨线包围二个中心之中的一个）

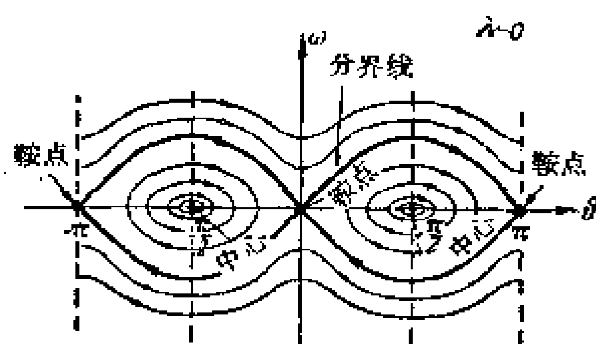


图 77

和一个双连通的（其中的闭相轨线包围两个中心和有分界线 B 的

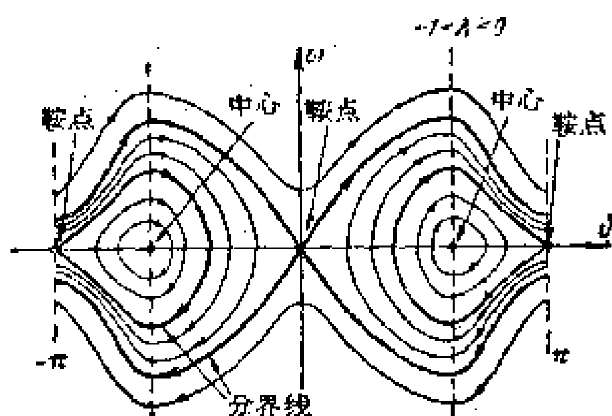


图 78

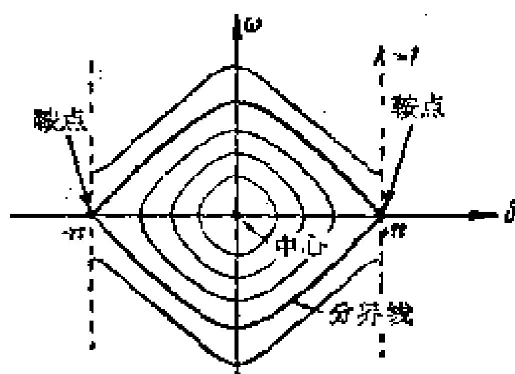


图 79

鞍点 $\vartheta=0, \omega=0$). 在外分界之外的相轨线，总是闭的并且包围着柱体（对任何 λ 都是这样）；显然，这些轨线对应于重质点沿整个圆周的周期运动．因为当 $\lambda=0$ 时，分界线汇合，所以对于这个 λ 值刚才说过的双通连区域就不存在了．积分曲线的定性拓扑图象发生改变，因而 $\lambda=0$ 是分枝值．同样地当 $|\lambda|>1$ 时，得到了新的积分曲线图（图 79 与80)，所以 $\lambda=+1$ 和 $\lambda=-1$ 的值也是参数 λ 的分枝值．

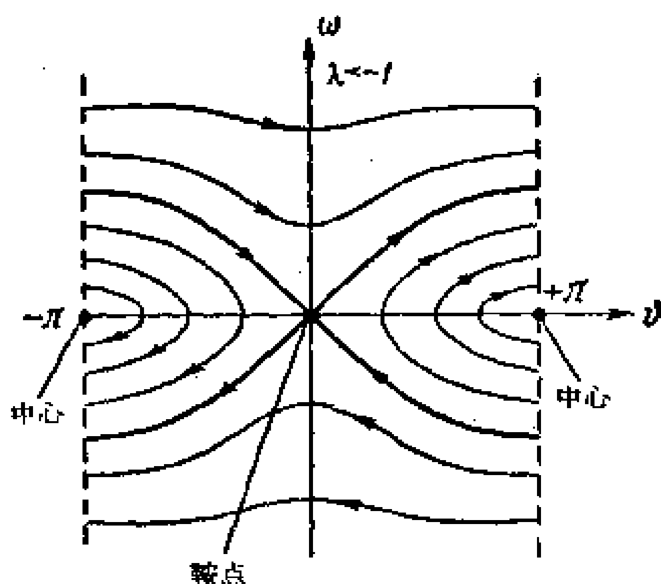


图 80

2. 重质点沿绕铅垂轴旋转的抛物线的运动 作为第二个例子，研究以下问题．假设质量为 m 的重质点可以沿抛物线自由运动，抛物线的方程为 $x^2=2pz$，并以等角速 Ω 绕轴 z 转动(图 81)．著名的表演模型——重球在旋转抛物体形之碗内的运动，可以作为这个问题的模型*．为了建立点的运动方程，也可以象上例一样，

* 这句话应去掉，因为这是完全不同的两个力学问题——译者注．

引入惯性力(即离心力)，然后对于平面 x、z 上的运动，用牛顿第二定律建立运动方程. 但是，我们将采用另外的方法，以便通过这个特例，使读者复习一下拉格朗日第二类方程，因为下面就要用到它了.

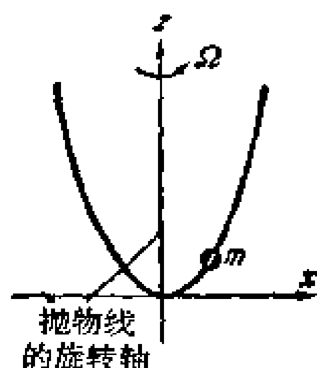


图 81

拉格朗日第二类方程的形式为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \qquad (2.32)$$

其中 L 是拉格朗日函数，在力学的一般情况中，等于动能与势能之差，亦即

$$L = T - V. \qquad (2.33)$$

系统的势能就是质点 m 在重力场中的能量，亦即:

$$V = mgz. \qquad (2.34)$$

动能包括物体绕铅垂轴转动的能量和在 x、z 平面内运动的能量(因为两个运动方向相互垂直). 因而，

$$T=\frac{m\Omega^2x^2}{2}+\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{z}^2). \qquad (2.35)$$

以 $x\dot{x}/p$ 代 $\dot{z}$ (由抛物线方程)，并作出拉格朗日函数(2.33)，得:

$$L=\frac{m}{2}\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)\dot{x}^2-\frac{m}{2}\lambda x^2, \qquad (2.36)$$

其中 $\lambda=(g/p)-\Omega^2$，而拉格朗日方程可写作*:

$$m\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)\ddot{x}+m\frac{\dot{x}^2}{p^2}x+m\lambda x=0$$

或者

$$\ddot{x}=-\frac{\left(\lambda+\frac{\dot{x}^2}{p^2}\right)x}{\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)}.$$

令 $\dot{x}=y$，得

* 本例子是单自由度的，所以式(2.32)中的 $i=1$，x 取作广义坐标 q——译者注.

$$\frac{dx}{dt}=y;\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{\left(\lambda+\frac{y^2}{p^2}\right)x}{\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)},$$

二者相除：

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(\lambda+\frac{y^2}{p^2}\right)x}{\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)y}.$$

方程(2.32)的首次积分，即所谓的能量积分，为：$(\partial L/\partial \dot{x})\dot{x}-L=$ 常数（这不难由直接代入来证明）．由 T 与 V 的表达式可以看出，能量积分可写为：

$$\frac{m}{2}\left[\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)y^2+\lambda x^2\right]=\text{常数}.$$

在所研究的情况中，方程 $f(x,\lambda)=0$ 可写作：$m\lambda x=0$；因而，$\partial f/\partial x=m\lambda$，这意味着 $\lambda=0$ 是参数的分枝值．对于 λ 的不同值，得下列不同类型的运动和平衡状态：

1) $\lambda>0(\Omega^2<g/p)$——有一个中心型的稳定平衡状态 $x=y=0$．积分曲线在相平面上的形状（层层相套的闭曲线）如图 82 所示，在这个情况中，点绕平衡状态 $x=0$，$y=0$ 振动．

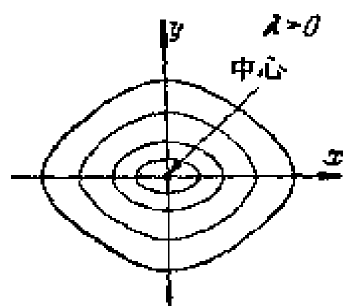


图 82

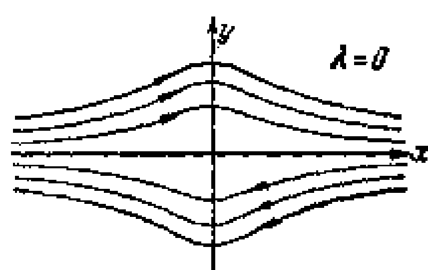


图 83

2) $\lambda=0(\Omega^2=g/p)$——有和直线 $y=0$ 各点相对应的无限多个平衡状态．相平面上积分曲线的形状如图 83 所示．质点或者将在抛物线的任意位置上静止，或者将向着初速度所指的方向单调地运动．当 t 趋向无限时，速度趋于零；速度在抛物线的顶点

上达到极大.

3) $\lambda < 0(\Omega^2 > g/p)$——有一个鞍点型的不稳定平衡状态 $x = 0$, $y = 0$, 由能量积分立即可见,直线 $y = \pm\sqrt{-\lambda}\,p$ 满足运动方程, 因而它们亦是积分曲线. 这些积分"曲线"对应于点沿旋转抛物线上某些运动, 在这些运动中, 速度在 x 轴上的投影保持不变. 这个情况的积分曲线的一般形状如图 84 所示. 如果初速度相当大 (大于$\sqrt{\lambda}\,p$), 那末运动的特性便和 $\lambda = 0$ 的情况相同;当点的初速度较小时,点或者单调地沿一个方向运动, 且在顶点处速度具有极小值,或者在达顶点以前就返回;后两种类型的运动是由两条通过奇点的积分曲线分隔开的,同时沿其中的一条曲线,相点将向着平衡状态运动, 渐近地趋向平衡状态.

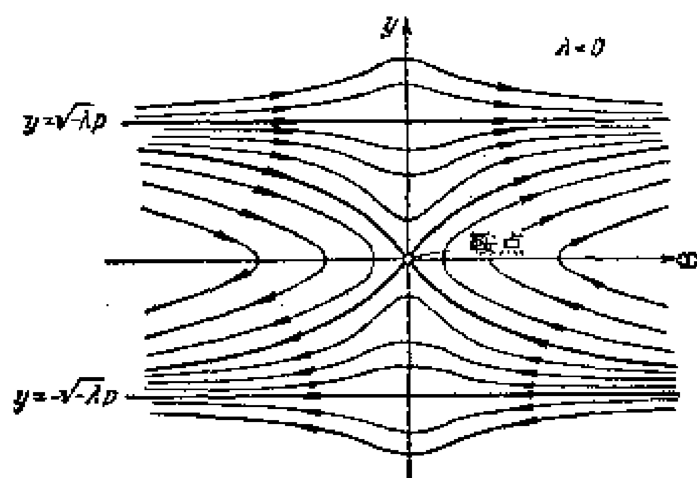


图 84

3. 载流导线的运动 研究最后一个例子: 长 l 质量为 m 的导体 AB 上有电流 i 流过, 它受到载有电流 I 的无限长导体之吸引,此外,导体 AB 由弹簧 C 拉着(图 85). 取弹簧未变形时导体 AB 的位置 A_0B_0 为 x 轴的原点,并以 a 记载有电流 I 的导线的坐标. 将设二导体恒保持相互平行, 并且导体 AB 两端的引出线上的电流和电流 I 是垂直的. 那末, 可取导体的相互作用力等于

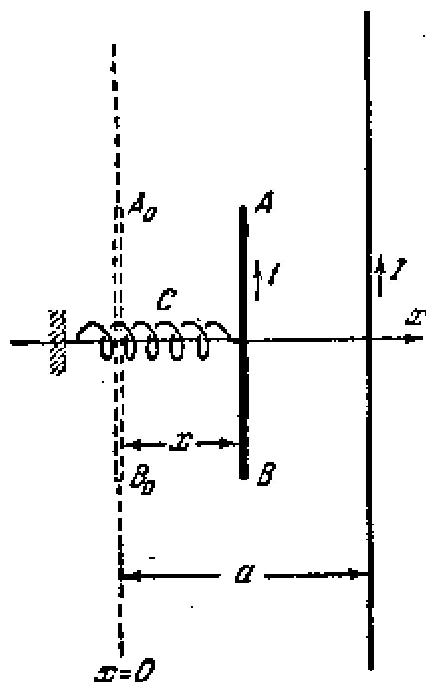


图 85

$$f_1 = \frac{2I \cdot il}{d},$$

其中 $d = a - x$（这里各量的单位均采用 CGSM 单位制）. 假定弹簧作用力等于 kx，其中 k 是弹簧的弹性系数，我们得到作用在导体 AB 上的所有的力为

$$f(x, \lambda) = -kx + \frac{2Iil}{a-x} = k\left(\frac{\lambda}{a-x} - x\right), \qquad (2.37)$$

其中 $\lambda = 2Iil/k$. 联系参数 λ 与平衡位置坐标 $\bar{x}$ 的方程是*

$$f(x, \lambda) \equiv k\left(\frac{\lambda}{a-x} - x\right) = 0$$

或

$$x^2 - ax - \lambda = 0.$$

分枝图如图 86 所示. 当 $\lambda = a^2/4$ 时，方程 $f(x, \lambda) = 0$ 有重根. 这意味着，当 $x=a/2$ 及 $\lambda=a^2/4$ 时，函数 $f(x, \lambda)$ 及其导数 $f'_x(x, \lambda)$ 同时等于零. 因此 $\lambda = a^2/4$ 是参数的分枝值. 运动方程为：

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{\lambda}{a-x}\right) = \frac{k}{m}\left\{\frac{x^2 - ax + \lambda}{a-x}\right\},$$

由此得：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{m}\frac{x^2 - ax + \lambda}{(a-x)y}. \qquad (2.38)$$

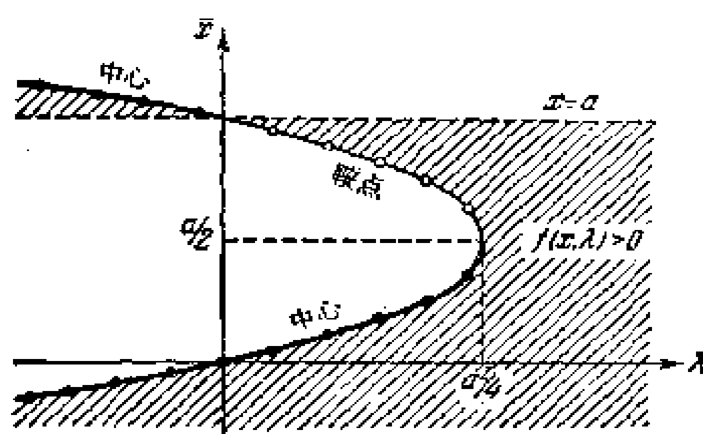


图 86

---

* 以后的方程 $f(x, \lambda) = 0$，即指前面所讲的方程 $f(\bar{x}, \lambda) = 0$——译者注.

对于所讨论的系统，除了奇点以外，还存在有“奇”直线 $x=a$，在这条直线上力 $f(x,\lambda)$ 等于无限大[1]. 能量积分为:

$$\frac{my^2}{2}+\frac{1}{2}kx^2+k\lambda\ln|a-x|=C. \tag{2.39}$$

1) 先研究 $\lambda<a^2/4$ 的情况(图 87). 在此情况中有两个奇点，一个是中心: $x=(a/2)-b$，其中 $b=\sqrt{(a^2/4)-\lambda}$; 另一个是鞍点 $x=(a/2)+b$; 当然,对于这两个奇点都有 $y=0$. 在 $y=0$ 轴上，积分曲线的切线都是铅垂的(在直线 $x=a$ 上亦是这样,但是,我们将不考虑这个情况)*,而在通过两个奇点的铅垂线上都是水平的. 奇直线 $x=a$ 是积分曲线，同时亦是其余积分曲线的渐近线. 把 $y=0$ 和 $x=(a/2)+b$ (即分界线通过鞍点的条件)，代入能量积分,从此定出积分常数;得

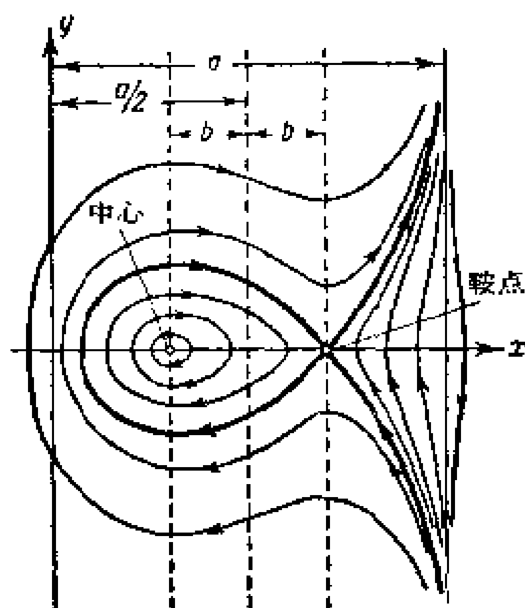


图 87

$$C_0=\frac{k}{2}\left(\frac{a}{2}+b\right)^2+k\lambda\ln\left(\frac{a}{2}-b\right),$$

因而分界线的方程为

$$\frac{my^2}{2}+\frac{k}{2}\left[x^2-\left(\frac{a}{2}+b\right)^2\right]^{**}+k\lambda\ln\frac{a-x}{\frac{a}{2}-b}=0.$$

这个方程当 $y=0$ 时的第二个根 x，亦即,分界线与 x 轴的交点坐

---

1) 显然,我们应该从讨论中排除直线 $x=a$ 及其邻域，因为和该区域对应的系统的状态,就是导体 AB 位于载流导体位置上时的状态,而这在物理系统中是不可能实现的.

* 在 $y=0$ (即 x 轴)上,应除去鞍点,因为在鞍点上积分曲线的二个分支(分界线)的切线都不是铅垂的——译者注.

** 原书小括号中为 − 号——译者注.

标，可以用图 88 所示的图解法求出．为此，我们作两条曲线：

$$\xi=\left(\frac{a}{2}+b\right)^2-x^2 \text{ 及 } \xi=2\lambda\ln\frac{a-x}{\frac{a}{2}-b},$$

或 $x=a-[(a/2)-b]e^{\xi/2\lambda}$，除去点 $x=(a/2)+b$，$y=0$ 以外，由此便可求出这些曲线的第二个交点 A．看一下所讨论系统的相图（图 87），立即可以得出下列的结论：如果初始条件是这样的，使得相点于初瞬时位于分界线环的内部，则导体 AB 将作振动．特别地，当初速度等于零时，如果导体 AB 离开平衡位的距离不太大时，它将要振动．

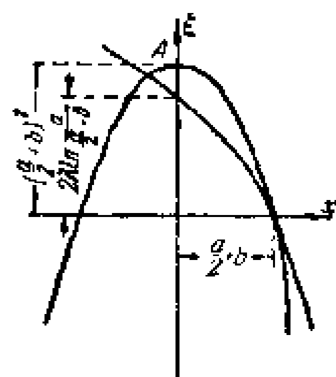


图 88

2）现在讨论第二情况，$\lambda>a^2/4$．在这一情况中，方程 $f(x,\lambda)=0$ 没有实根，因而系统没有奇点（平衡状态）．这时积分曲线的走向如图 89 所示．在任何初始条件下，最后导体 AB 都将以无限增大的速度接近直线 $x=a$，即向无限长的导线靠近（$x\geqslant a$ 时，我们已经说过，问题是没有意义的）．在这个情况中，振动显然是不可能的．

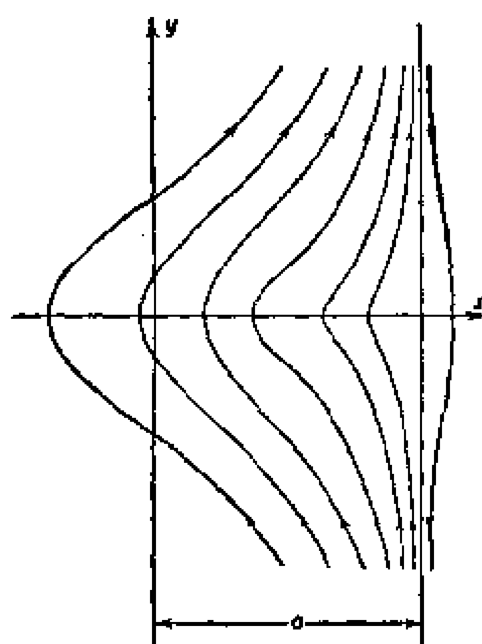


图 89

3）第三情况（第一情况到第二情况的过渡情况）对应于参数值 $\lambda=a^2/4$．不难看出，第一种情况的两个奇点，随着 λ 增加逐渐接近，而当 $\lambda=a^2/4$ 时汇合一起．奇点的这个接近过程如图 90 所示．当 $\lambda=a^2/4$ 时显然只有一个奇点（图 91），它对应于势能有拐点之情况中的奇点类型．这样，奇点的这一类型可以看成是中心与鞍点汇合的结果．这样的奇点对应于不稳定的平衡状态．在这个（第三种）情况中，周期

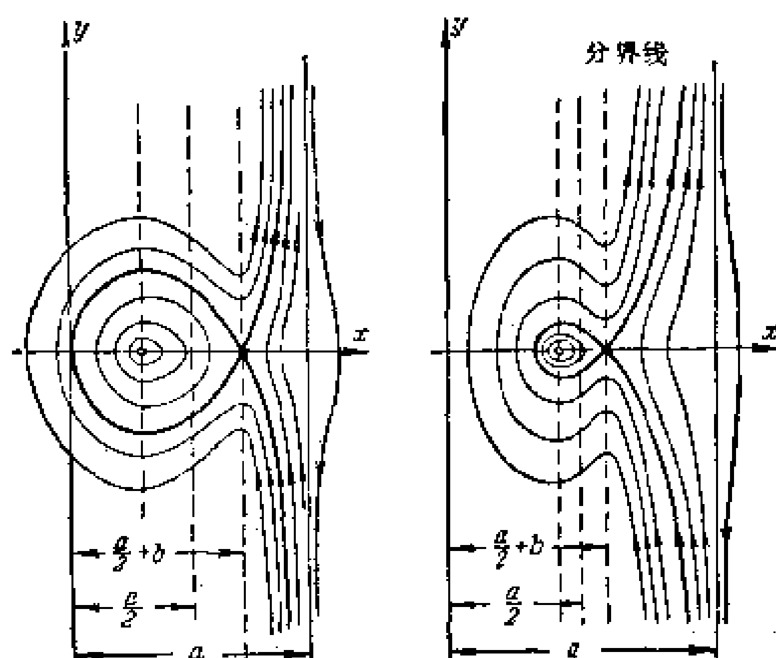


图 90

运动也是不可能的．在任何的初始条件下，导体都将以不断增大的速度向无限长导线接近．通过奇点的胡须 I 与 II 把所有运动分隔为两种类型，它们的差别在于：在作第一种运动时（初瞬时系统处在直线 $x=a$ 及胡须 I 与 II 之间的区域中），导体 AB（图 85）向着直线 $x=a$ 运动，而不通过平衡位置；而作第二种运动时（初瞬时系统在胡须 I 与 II 和直线 $x=a$ 所围之区域以外），导线 AB 总是要通过平衡位置的．

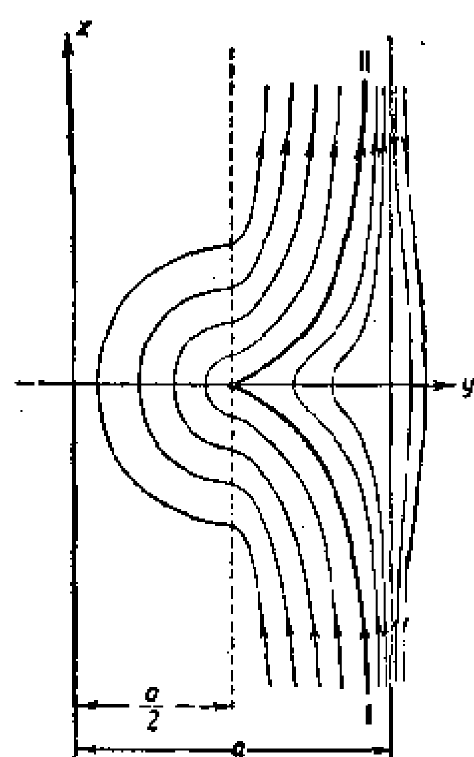


图 91

4）最后研究下面的情况，$\lambda<0$（可以用改变电流 i 或 I 的方向来使 λ 改变符号）．这时方程 $f(x,\lambda)=0$ 永远有两个实根．这两个根 $\bar{x}_{1,2}=(a/2)\pm\sqrt{(a^2/4)-\lambda}$ 之中，有一个永远是负的，另一个大于 a．两个平衡状态（$\bar{x}_1<0$，$\bar{x}_2>a$）都是中心而且稳定；其余的积分曲线都是

闭的，它们包围着第一个或第二个平衡状态，同时分隔这两类闭曲线的就是"奇"直线 $x=a$（图 92）。于是，在 $\lambda<0$ 的情况下，导体 AB 的所有运动都是周期的振动。

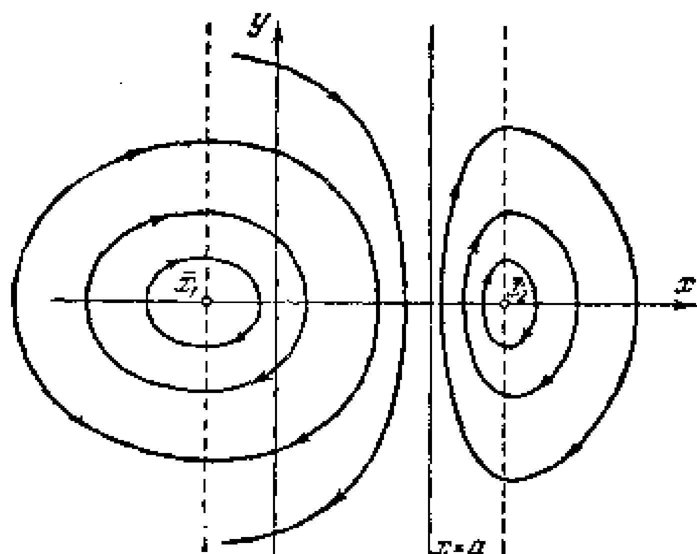


图 92

所举的这些例子已足以说明保守系统运动的特性和参数的依赖关系，现在我们就可以转入研究保守系统中出现的进一步的问题。

§6. 运 动 方 程

到现在为止，我们仅研究了最简单的保守系统。现在我们开始研究一些更复杂的系统。

要建立较复杂的保守系统的运动微分方程，利用拉格朗日第二类方程比较方便。以 $L(q, \dot{q})$ 表示拉格朗日函数（假定它是坐标 q 和速度 $\dot{q}$ 的单值函数），我们得到拉格朗日方程的形式为：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0. \tag{2.40}$$

这个方程对任意的坐标(q)变换具有不变性，换句话说，这意味着，令 $q=f(\varphi)$，我们仍将得到 (2.40) 型的方程，亦即：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0.$$

拉格朗日方程的这种不变性具有很大的优点，因为，如果知道了系统的拉格朗日函数，就可以对任选的坐标，立即写出运动方程来．对于普通的保守机械系统（在参考系是惯性系的条件下），拉格朗日函数是动能与势能之差；同样地，在最简单的电系统中，如果选独立回路电流的积分 $q=\int i dt$（在包含电容器的回路中，q 显然就是这个电容器上的电量）为广义坐标的话，拉格朗日函数亦是电能与磁能之差．利用拉格朗日方程列写机电系统的运动方程最为方便[1]．

但是必须指出，拉格朗日函数并不是永远可能写成两种能量之差的形式；在这些情况中，事先指出一个建造拉格朗日函数的"物理"的步骤，并不是永远可能作到的，只有以纯解析的方式，利用专门选择函数 L 的方法，才能把运动方程化为所需要的形式．大家知道，在自治保守系统情况下，对于拉格朗日方程，可以写出所谓的"能量积分"，它具有形式：

$$\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-L=h. \tag{2.41}$$

不难用简单的微分证实，等式左端对时间的导数由于拉格朗日方程而等于零．但是，从物理意义而论，表达式(2.41)并不总表示系统的能量．除坐标 q 以外，引入第二个变量 $p=\partial L/\partial \dot{q}$，所谓的冲量，并作函数

$$H=p\dot{q}-L=H(p,q), \tag{2.42}$$

即所谓哈密尔顿函数，我们可将运动方程(2.40)化为二个一阶微分方程：

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p};\quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q}, \tag{2.43}$$

这些方程我们称为**哈密尔顿方程**．哈密尔顿形式的运动方程，在

---

1) 以拉格朗日第二类方程的形式写出的电系统或机电系统的运动方程，常称为拉格朗日-马克斯威尔方程．

研究一系列的数学、天文学和物理学的问题时，有着突出的优点．运动方程的一些积分方法，正是和这种形式有关的．

哈密尔顿方程不仅对于变数变换是不变的，这我们已经说过了，并且对于所谓的正则变换也是不变的，正则变换在对多自由度保守系统的研究中，起着很重要的作用．

应指出，哈密尔顿方程的"能量积分"可以立刻写出：

$$H(p, q) = h = \text{常数}. \tag{2.44}$$

现在进一步讨论两个例子，以说明拉格朗日方程与哈密尔顿方程的应用：

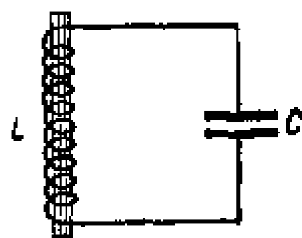


图 93

1. 有铁芯的振荡回路 作为非线性保守系统的第一个例子，我们研究一个电振荡回路，其中有一个带铁芯的自感线圈[197]（图93）．为了能够把系统当作是保守的系统来研究，我们应该忽略回路电阻和磁滞损耗．如果忽略线圈中的损耗，即假定所有的磁通 Φ 都通过自感线圈的所有 w 匝，那末，根据克希霍夫定律，对于回路的电流强度可以写出下列方程：

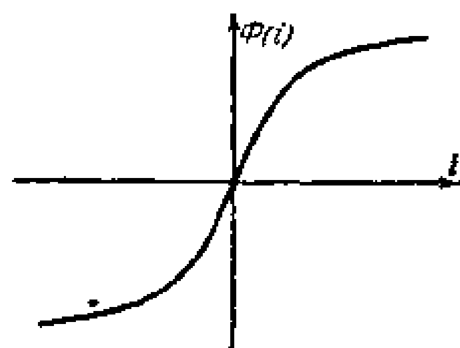


图 94

$$\frac{1}{C}\int i\,dt + w\frac{d\Phi}{dt} = 0, \tag{2.45}$$

并且 Φ 是 i 的某一函数，由于线圈中有铁芯存在，此函数是非线性的．有铁芯时函数 $\Phi(i)$ 的大概形状如图 94 所示．

方程 (2.45) 很容易化为拉格朗日方程的形式．为此以 $\dot{q}$ 代 i，此处 q 是电容器极板上的电量，引入符号

$$L = L(q, \dot{q}) = w\int \Phi(\dot{q})d\dot{q} - \frac{q^2}{2C}. \tag{2.46}$$

在这样的情况中，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = w\Phi(\dot{q}) \text{ 及 } \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{q}{C},$$

而方程 (2.45) 取拉格朗日形式:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0.$$

我们说过,拉格朗日方程有"能量积分":

$$\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-L=h.$$

在所研究的情况中,这一能量积分具有形状:

$$h=w\Phi(\dot{q})\dot{q}-w\int\Phi(\dot{q})d\dot{q}+\frac{q^2}{2C}=\text{常数}. \tag{2.47}$$

这里 h 真正地表示系统的总能量. 事实上,电容器中的静电能为 $V=q^2/2C$,自感线圈中的磁能等于反抗自感电动势的功,亦即可表为:

$$T=w\int\frac{d\Phi(\dot{i})}{dt}\dot{q}dt=w\int\dot{q}\,d\Phi(\dot{q}) \tag{2.48}$$

或由分部积分,得:

$$T=w\Phi(\dot{q})\dot{q}-w\int\Phi(\dot{q})d\dot{q}. \tag{2.49}$$

因此 $H=T+V$. 但是在此情况中 $L\neq T-V$,所以我们有了一个拉格朗日函数不等于动能与势能之差的例子.

引入新变量 $p=\partial L/\partial\dot{q}=w\Phi(\dot{q})$,可以把我们的方程化为哈密尔顿型的. 哈密尔顿函数可写作:

$$H(p,q)=\int\Psi(p)dp+\frac{q^2}{2C}, \tag{2.50}$$

其中 $\Psi(p)$ 是由表达式 $p=w\Phi(\dot{q})$ 解 $\dot{q}$ 时所得到的函数. 函数 $\Phi(\dot{q})$ 的特性可由图 94 所示的曲线看出,它使得变换 $p=\Phi(\dot{q})$ 是相互连续、相互单值的变换. 哈密尔顿方程可写为:

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q}=-\frac{q}{C};\quad \frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}=\Psi(p).$$

积分曲线在相平面上的性状可由能量积分确定,根据 (2.47)—(2.49),能量积分可写作:

$$w\int\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}}\dot{q}\,d\dot{q}+\frac{q^2}{2C}=\text{常数}. \tag{2.51}$$

这个表达式，和在§5中研究保守系统的例子时，所得到的很相似，仅有的差别是，q 与 $\dot{q}$ 改变了地位．因此我们可以对积分曲线的特性作出的论断，和对最简单的保守系统曾作过的完全一样．因为被积式永远大于零，所以 $\int(\partial\Phi(\dot{q})/\partial\dot{q})\dot{q}d\dot{q}$ 是正函数，其导数只有在点 $\dot{q}=0$ 上才为零．因而，$\dot{q}=0$ 对应于能量的极小值，故奇点 $q=0$，$\dot{q}=0$ 是中心；它对应于稳定的平衡位置．所有的积分曲线都是闭曲线，层层相套且包围着奇点．给定了函数 $\Phi(i)$ 的确定的分析表达式后，我们还可以更精确地确定出积分曲线的特性．当没有漏磁时，这个函数可以充分精确地由表达式

$$\Phi(i)=A\operatorname{arctg}\frac{wi}{S}+B\frac{wi}{S} \tag{2.52}$$

来逼近，其中 A，B 与 S 均为正常数．取了这个表达式，我们得：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}}=\frac{Aw}{S}\frac{1}{1+\dfrac{w^2\dot{q}^2}{S^2}}+B\frac{w}{S},$$

且进一步便得到：

$$w\int\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}}\dot{q}\,d\dot{q}=\frac{Aw^2}{S}\int\frac{\dot{q}\,d\dot{q}}{1+\dfrac{w^2\dot{q}^2}{S^2}}+B\frac{w^2}{S}\int\dot{q}\,d\dot{q}.$$

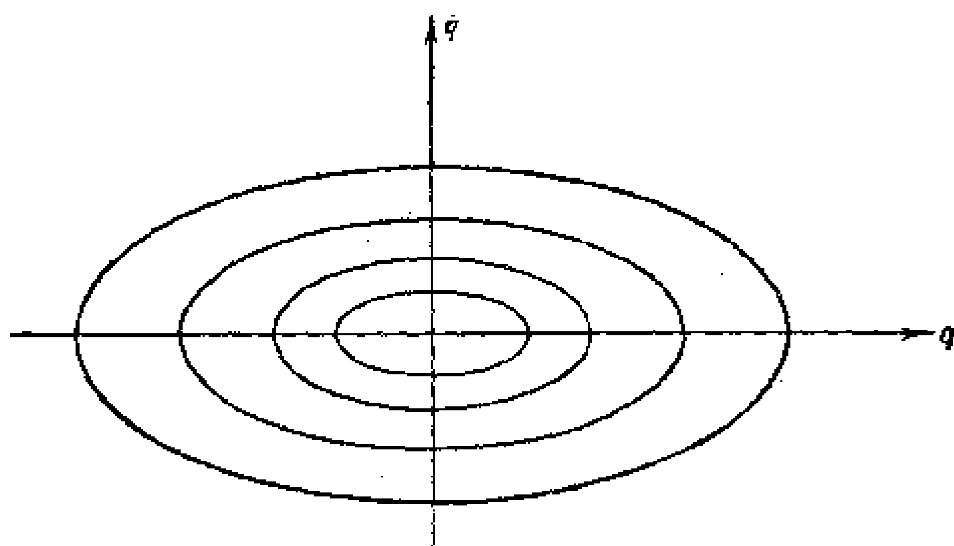


图 95

作代换 $\dot{q}^2 = z$，可算出第一积分，最后得到：

$$\frac{AS}{2}\ln\left(\frac{\dot{q}^2}{2}+\frac{S^2}{2w^2}\right)+\frac{Bw^2}{2S}\dot{q}^2+\frac{q^2}{2C}=\text{常数}. \qquad (2.53)$$

这个方程确定椭圆型的曲线族．对某些特殊的参数值，图 95 上作出了这一曲线族．

2. 电容器中有色格涅盐的振荡回路　作为第二个非线性保守系统的例子，我们研究电容器中的电介质为色格涅盐的振荡回路(图 96)，色格涅盐的电性质和铁的磁性质很相似，色格涅盐使电通密度 D 与电场强度 E 间存在着非线性的关系(图 97)，由于这种关系，有色格涅盐电介质的电容器的电容将依赖于电量或电压．

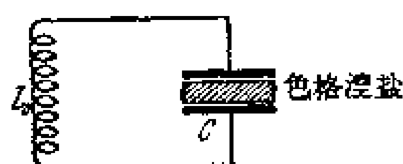


图　96

电容器极板上的电量和由电量引起的电势差的比，我们称之为这种电容器的电容 $C(q)$．这样定义的电容器电容 $C(q)$ 和其极板上的电量间的依赖关系，大致地如图 98 所示．

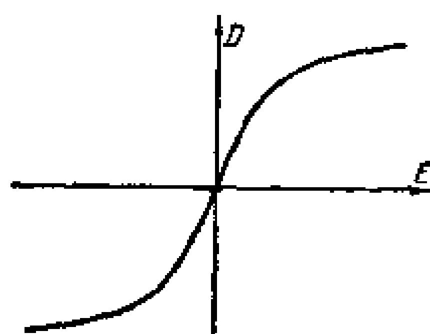


图　97

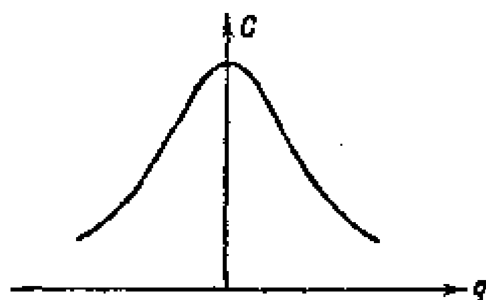


图　98

忽略欧姆电阻和磁滞损失不计，由于 C 是 q 的函数，我们得到了非线性保守系统．对于所研究的回路，根据克希霍夫定律，我们可以写出[1]：

---

1) 应注意，电容也可以用另一形式定义，例如：$C_1(q)=dq/du$，其中 u 是电势差．这时包含有色格涅盐电介质的电容器之回路的微分方程，将有另一种形式：

$$L_0\ddot{q}+\int\frac{dq}{C_1 q}=0. \qquad (2.54a)$$

不管采用方程 (2.54) 还是 (2.54a)，没有什么不同，因为二者给出 $\dot{q}$ 和 q 间的同样的关系．看来，对于非自治系统，第二种定义 $C_1=dq/du$ 更为合适．

$$L_0 \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C(q)} = 0. \tag{2.54}$$

这个方程也很容易化为拉格朗日的形式．引人系统状态的函数

$$L = L(q, \dot{q}) = \frac{L_0\dot{q}^2}{2} - \int \frac{q\,dq}{C(q)}. \tag{2.55}$$

在这个情况中

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = L_0\dot{q}, \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{q}{C},$$

而方程 (2.55) 可写为拉格朗日形式：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

能量积分可写作：

$$\frac{L_0\dot{q}^2}{2} + \int \frac{q}{C(q)}\,dq = h = \text{常数}. \tag{2.56}$$

不难看出，在这一情况中 h 也是系统的总能量，因为电容器电荷的能量等于使电容器充电之电流的功：

$$V = \int \frac{q}{C(q)}\,\dot{q}\,dt = \int \frac{q\,dq}{C(q)}. \tag{2.57}$$

但是，这个情况和上一情况不同，拉格朗日函数 $L = T - V$，亦即，等于系统的磁能和静电能之差．在方程 (2.55) 中，代入 $p = \partial L/\partial \dot{q} = L_0\dot{q}$，很容易将它化为哈密尔顿形式，和前一例类似．

方程 (2.56) 是积分曲线族在相平面 $q, \dot{q}$ 上的方程．因为函数 $\int q\,dq/C(q)$ 在 $q = 0$ 时有极小，所以 $q = 0$，$\dot{q} = 0$ 是中心型奇点，它对应于稳定的平衡状态．

为了更精确地确定积分曲线的形状，我们应该以某种方法精确地确定函数 $C(q)$ 的形状．在一般情况下，如果除交变电压外在电容器的极板上还有常值电压（和附加磁化相似，我们称之为“附加电化”），那末，电容器的电容在点 $q = 0$ 的两边就不再有相同的变化．考虑到这种情况，我们就可以把 C 与 q 之间的关系，在 q 值

的某个有限区域内，用下述表达式

$$C(q)=\frac{C_0}{1+C_1q+C_2q^2}$$

来逼近（这个函数 $C(q)$ 的图形如图 99 所示），把 $C(q)$ 的表达式代入 (2.56) 式，得

$$\frac{L_0\dot{q}^2}{2}+\frac{q^2}{2C_0}+\frac{C_1q^3}{3C_0}+\frac{C_2q^4}{4C_0}=\text{常数}^*. \tag{2.58}$$

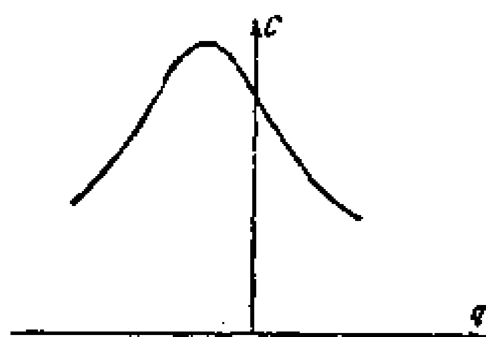


图 99

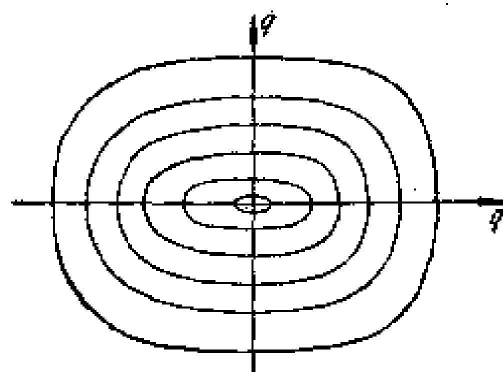


图 100

这个方程决定一个层层相套的闭曲线族（图 100）．这些曲线对 $\dot{q}$ 轴的不对称性，是由曲线族方程中的 $C_1q^3/3C_0$ 项所引起的．但是这一项是由于附加电化才产生的．在没有附加电化时 $C(q)=C(-q)$，积分曲线的不对称性也就消失了．积分曲线族是椭圆型的，只有当 q 很大而 q^4 项起显著作用时，这些积分曲线才与椭圆有显著的差别．

§ 7. 保守系统的一般性质

从振动理论的观点来看，在单自由度的保守系统中，我们感兴趣的首先是定态状态——也就是平衡状态和周期运动．所有其余的运动，正象我们在研究最简单的保守系统时已经见过的那样，或

* 原书有误——译者注．

者走向无限远，或者趋向鞍点型的平衡状态（有限运动）. 在最简单的保守系统中，我们已经详细地研究了平衡状态. 现在我们应该更详细地来阐明，在最简单的保守系统中可能发生的周期运动的特性.

1. 周期运动及其稳定性 首先，保守系统中的周期运动的最大特点是，它们无论何时都不是孤立的. 如果对于 $h=h_0$，在相平面上得到了闭轨线，即周期运动，那末，正象我们所见到过的，在这条闭轨线近旁，一定环绕着一些对应于邻近 h 值的相邻的闭轨线. 周期轨线是以连续统的形式出现的，它们充满相平面的整片区域，同时闭轨线也是一个包围着一个的. 在物理意义上，这意味着，如果可能有一个周期运动，那末就可能有它们的一个无限集合，并且最大的振幅和最大的速度，在某个有限的或无限的范围中随着初始条件的改变而连续地变化.

除了周期运动本身的存在以外，我们始终应该注意这些运动是否稳定的问题. 因此，在研究周期运动时，应该严格地提出运动稳定性的概念，象我们对平衡位置所提出的稳定性概念一样. 我们采用李亚普诺夫所给出的运动稳定性的定义，这个定义，和第一章 §3 中的平衡状态稳定性的一般定义是完全相对应的.

周期运动对应于相点沿某一闭相轨线的运动. 取一个包围相点并随同它一起运动的小区域 ε. 如果对于给定的任意小的区域 ε，我们可以指出这样的区域 $\delta(\varepsilon)$，使得初瞬时位于区域 $\delta(\varepsilon)$ 内的任一相点，永远不会越出区域 ε 的边界，那末，所研究的运动是按李亚普诺夫稳定的. 按下列说法给出这个稳定的条件，将会更清晰些. 假定运动受到某个扰动——系统在任意方向受到某种瞬时的冲击. 这时相点有了位移，并且将沿另一条轨线继续运动. 设想相点在受冲击时“变黑了”（图 101）. 我们要研究其稳定性的原来的、未被扰运动，亦即，

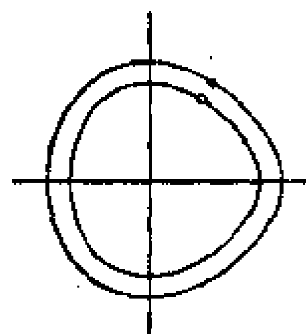


图 101

如果没有冲击时发生的运动，我们用白相点的运动来表示，而冲击

后的运动——被扰运动，用黑相点的运动来表示. 现在运动稳定性的条件可以叙述如下. 如果黑点在初瞬时（刚刚受到冲击之后)充分地接近于白点（亦即，如果扰动充分小)，其后亦永远地和它相当地接近，那末白点所表示的运动是按李亚普诺夫稳定的[1].

不难看出，一般地说，保守系统的运动都是按李亚普诺夫不稳定的，因为在一般情况中，相点沿不同的积分曲线运转的周期是不同的. 由此，尽管白点和黑点的初始距离甚小，但是它们越来越离开，而且在一定数目的周期之后，将得到如图102所示的图象. 当然以后它们还会重新开始接近，但对于任意小的(不为零的)初始距离，它们之间的距离毕竟永远不能小于任意给定的值. 在特殊的情况中，即黑白点均沿同一条轨线运动时，和初始距离相比，黑白点间之距离并不增加*，也就是说，扰动是这样的，它使得相点在冲击中沿本身的轨线有一个跳跃(顺便指出，这种特殊类型的扰动，只有当坐标的改变与速度的改变之间有某一完全确定的关系时，才可能存在). 不过这种情况绝对不是和我们关于运动的不稳定性的论断相矛盾的，因为我们说的是 $\delta(\varepsilon)$ 区域，而一段轨线并不构成这种区域.

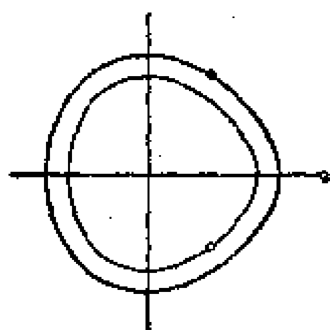


图 102

只有在有等时性的特殊情况中，即对不同轨线的旋转周期相同时，保守系统的周期运动才是按李亚普诺夫稳定的. 即便在这种情况中，还是不会有绝对稳定的闭轨线的，(即这样的闭轨线，相点受到充分小的扰动后，将重新渐近地向它趋近). 这种类型的轨

1) 参看第五章§§6、7中给出的周期运动按李亚普诺夫的稳定性的意义，其中阐述了研究稳定性的分析方法(当然只对非保守系统才适用的方法).

* 这个特殊情况，并不是这样简单的. 假定黑白点的初始距离为 S_0，因为它们一般地说都不是在作等速运动(沿闭曲线)，所以在其后的运动中，距离亦将是时间的函数：$S(t)$，显然 $S(t)$ 是一周期函数. 从而黑白点间的距离 S 可以大于 S_0（除非起点上的 S_0 是 S 的极大值)，但是 S 随着 S_0 同时地趋近于零. 所以以下的讨论是正确的——译者注.

线，在单自由度保守系统中，是完全不可能的．只有在研究非保守系统时才会遇到这种运动．正象刚才我们说过的，虽然保守系统的周期运动一般说是按李亚普诺夫不稳定的，但是，它们还是具有某种形式的稳定性的．那就是，和所研究之轨线充分接近的轨线，将永远位于它的邻域之内．这种形式的稳定性，称为轨道稳定性；这种稳定性，在关于积分曲线性状的一般理论中，起着重要的作用．

2. 单值解析积分和保守性　到现在为止，我们研究的保守系统都是满足哈密尔顿方程的．其实从相平面特性的观点，或在更一般的情况中，从相曲面特性的观点，以及从系统中可能的运动之特性的观点来看，将某些不满足哈密尔顿方程的系统归入保守系统，亦是很自然的．因此，我们给保守系统一个更一般的定义，并且根据这个定义建立保守系统的一些性质．

每一个动力学系统都拓扑地、完全单值地对应于一个布满相轨线网的相面，因而，相面上每一点对应于系统的一个完全确定的状态，反之亦然；这种对应是相互连续和相互单值的．我们将认为单值积分的存在

$$F(u, v) = C, \tag{2.59}$$

是保守系统的必要标志，其中 u, v 是决定点在相平面上的位置的坐标．为使叙述简单起见，假设函数 $F(u, v)$ 是单值的解析函数；就问题的本质而论，它不可能恒等于常量．将 C 看成是沿相面法向的第三个坐标，我们可以把方程 (2.59) 解释为建立在相面之上的某个新曲面的方程．如此作出的曲面具有这样的性质，它的等高线（对 C 轴而言）是积分曲线．当相面是平面时，等高线，即积分曲线，就是曲面 $F(u, v) = C$ 和平行于相平面的平面的交线，这个平行平面是由方程 $C = C_0$ 所确定的，式中 C 是坐标，C_0 是常数（图 103）．

知道一个这样的曲面，就可以作出这种曲面的一个无限集合．实际上，我们除了对等高线本身感兴趣之外，对等高线的相对高度毫无兴趣．因此，我们可以随意地改变 C 轴的"比例"，在它的不同段上任意地将它拉长或压短．我们将得到一批又一批的曲面，并

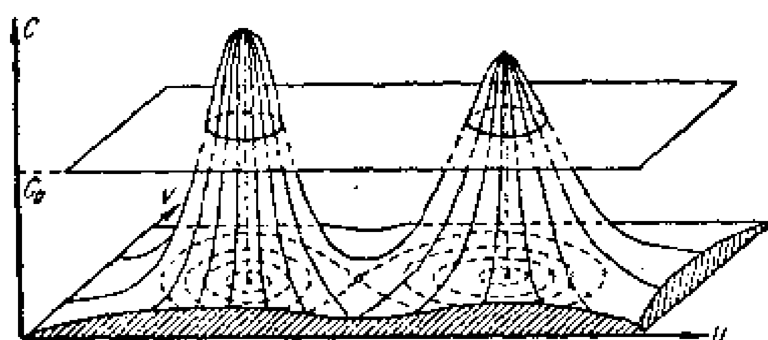


图 103

且他们都具同一性质：等高线都是积分曲线．用解析的语言来说，这说明一件明显的事实，那就是：如果 $F(u, v)=C$ 是某方程的积分的话，那末 $\Phi[F(u, v)]=C$ 也是该方程的积分．

等高线的奇点对应于积分曲线族的奇点：这样，等高线的孤立点对应于中心；节点对应于鞍点；尖点对应于中心与鞍点汇合而成的奇点．积分曲线的微分方程，根据方程（2.59），有以下形状：

$$\frac{dv}{du}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}}{\dfrac{\partial F}{\partial v}}. \tag{2.60}$$

奇点对应于使 $\partial F/\partial u$ 及 $\partial F/\partial v$ 同时为零的 u, v 值．也可能遇到这种情况，$\partial F/\partial u$ 与 $\partial F/\partial v$ 不仅在一个孤立点上，而且沿某条解析曲线同时为零．我们将证明，这样的曲线必定是积分曲线，该曲线上的点都满足方程 $F(u, v)=$ 常数．设我们所说的曲线具有参数形式：

$$u=u(s), \quad v=v(s).$$

这时

$$\frac{dF}{ds}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{ds}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{ds},$$

或者，因为 $\partial F/\partial u=0$ 及 $\partial F/\partial v=0$，则

$$\frac{dF}{ds}=0,$$

由此

$$F = 常数,$$

亦即，$F(u, v)$ 沿曲线保持常值. 不难看到，如果对应的等高线*是由这样的点组成的，其上之切平面都平行于相面，此时就出现这种情况，例如，当曲面 $F(u, v) = C$ 有火山口的形状，而火山口的边缘在同一等高面上时，就是这样（图 104）. 不可能有这种类型的奇点，通过它的积分曲线无限多、且充满平面的某一部分，因为，在此情形中，全部曲线都应位于同一等高面上；这时由于 $F(u, v)$ 的解析性，它应该等于常数，

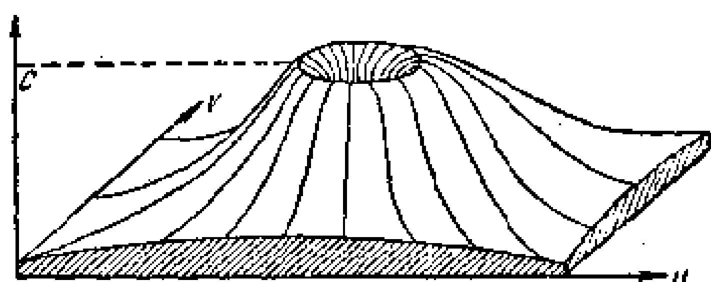


图 104

而这和所提的条件是矛盾的. 由此我们可以得出结论，保守系统中的奇点，不可能是结点也不可能是焦点. 由完全相似的讨论可以证明，保守系统中亦不可能有其他积分曲线都向它盘旋接近的闭积分曲线. 还可以证明，如存在有一条闭轨线，那末必定存在它们的一个连续统，完全地充满着平面的某一部分；从相轨线是连续的曲面 $F(u, v) = C$ 的等高线的事实，就可以直接地得出这个论断. 因此，不可能存在一条孤立的闭轨线，因为，如果连续曲面的一条等高线是闭的，那末所有邻近的等高线也应该是闭的.

再来研究相点沿这些轨线随时间的运动. 由于方程(2.60)是从运动方程中消去时间而得到的，那末，为了返回到一般形式的运动方程，我们应该注意到，在消去时间时可能同时亦消去了某一函数 $S(u, v) = 1/Q(u, v)$（它是以乘子的形式出现在两个方程的右端的）. 因此运动方程的一般形式可以写为：

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial v}\frac{1}{Q(u, v)} = U(u, v), \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial u}\frac{1}{Q(u, v)} = V(u, v). \end{aligned}\right\} \qquad (2.61)$$

* 原书为“等斜线”——译者注.

这个更一般的保守系统方程，我们称为普法夫(Pfaff)方程．对于 $S(u, v)$ 我们假设，它在整个 u, v 平面上是单值的解析函数，且对于任何有限的 u, v 值都不为零．

对函数 $S(u, v) = 1/Q(u, v)$ 还可以作更一般的假设，例如，允许这个函数沿某条孤立曲线等于零或丧失全纯性．在实际中，作为真实系统的理想模型，我们常常遇到这样的方程，这种模型，在许多情况中(例如上述的孤立曲线与相轨线重合的情况)，无疑应该归入保守系统的类型．但是对于这种"病态的"情况，我们这里将不进行研究和分类，而只对有关的术语作些解释，并研究它的一个例子(本节第6小节)．

不难看出，在特殊情况

$$Q(u, v) = 1$$

中，我们得到哈密尔顿型的方程

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial u}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v}.$$

这里按一般习惯以 H 代替了 F．我们已见到过，哈密尔顿方程有单值积分 $H =$ 常数，它通常是能量积分(但是已经指出过，并不永远如此)．

方程(2.61)等价于方程

$$V(u, v)du - U(u, v)dv = 0,$$

我们知道，这个方程总是有积分因子的．所以形式上而论，所有由两个一阶微分方程描述的动力学系统，都可以化为(2.61)的形状．但是，并不是所有的由这些方程所描述的系统都是保守的．其原因在于，当保守系统是用(2.61)型的方程所描述的时候，对函数 F 与 Q 加了一定的条件(单值性，解析性等)．在古典力学中研究哈密尔顿方程时，H 是能量，因而这些条件通常是自动满足的．

应指出，如果动力学系统是由一般型式的微分方程

$$\frac{du}{dt} = U; \quad \frac{dv}{dt} = V$$

所给定的，那末，并不存在能够确定这些方程所描写的系统是否是

保守系统的一般方法. 例如, 在证明了系统有绝对稳定或不稳定的平衡状态存在时, 系统的非保守性常常可以立刻得到判定. 一般地说,只有当用某一方法求到了系统的单值积分以后,才能确定积分曲线的保守性.

3. 保守系统和变分原理 具有变分的起源, 是保守系统的突出特点.

大家知道,哈密尔顿方程可以从哈密尔顿变分原理导出:

$$\delta \int_0^{t_1} L dt = \delta \int_0^{t_1} (p\dot{q} - H) dt = 0. \tag{2.62}$$

利用当 $t = 0$ 与 $t = t_1$ 时 δq 为零,表达式 (2.62) 可以化为

$$\int_0^{t_1} \left\{ \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p + \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right\} dt = 0,$$

由此根据所谓的变分法的"基本引理", 我们就得到了哈密尔顿方程:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

现在来研究更一般的变分原理,亦就是将假设,在被变分的积分中,被积函数取更一般的线性组合的形式:

$$\delta \int_0^{t_1} \{ X\dot{x} + Y\dot{y} + F \} dt = 0$$

其中 X, Y 与 F 仅仅是 x 和 y 的单值解析函数.

在这个更一般的情况中, 变分方程, 或换句话说, 运动方程的形式是

$$Q(x, y) \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \text{ 及 } Q(x, y) \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial y}$$

其中 $Q(x, y) = X'_y - Y'_x$.

这就是我们已知道的普法夫方程, 它是描述保守系统的方程的最一般的形式.

4. 积分不变量 现在引入积分不变量的概念. 我们首先以一般形式来研究相应的问题,暂不管问题是否具有保守性,以便以后能把得到的结果用到保守系统上去.

设某动力学系统决定于一般形式的方程

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y). \tag{2.63}$$

我们将相平面上的点解释为某个二维"液体"的微粒，而相轨线解释为这种"液体"在相平面上作定态流动时的流线，并假设，"液体"到处都无源、无汇．令$\rho(x, y)$表示设想液体的"密度"．研究于某瞬时$t=0$充满相平面上某一区域（"二维体积"）$G(0)$的相点集合——"液体微粒"的集合．所研究的"液体体积"的"质量"，显然可以表为积分

$$I(0) = \iint\limits_{G(0)} \rho(x_0, y_0) dx_0 dy_0$$

（x_0, y_0是相点在$t=0$时的坐标）．我们的"液体"沿着由方程(2.63)或其解

$$x = x(t; x_0, y_0), \quad y = y(t; x_0, y_0) \tag{2.64}$$

（因为x_0, y_0是相点坐标的初值，那末显然有$x(0; x_0, y_0) = x_0$及$y(0; x_0, y_0) = y_0$）所决定的流线在相平面上运动．在$t=0$的瞬时充满"体积"$G(0)$的液体"微粒"，也将沿这些轨线运动．以$G(t)$表示这些"微粒"的集合在t瞬时所占有的区域．"液体质量"在这个新的"体积"上等于

$$I(t) = \iint\limits_{G(t)} \rho(x, y) dx dy, \tag{2.65}$$

如果我们把相点在相平面上的运动，解释为密度是$\rho(x, y)$并且是无源无汇的"液体"的定态运动是正确的，那末$I(t)$就应该等于$I(0)$，因为"液体"应该服从"质量"守恒定律．更精确些说，如此地解释相点的运动，只有当我们可以选择这样的函数$\rho(x, y)$——液体的"密度"，使得"液体质量"，任一"微粒"集合的"质量"，在运动时间内，保持不变的情况中，才有可能．我们将说，在这个情况中，运动方程(2.63)有二维的正积分不变量．这样，如果对于任意初区域$G(0)$，都有$I(t) = I(0)$，或者，对于任意的积分区域$G(t)$都有

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{G(t)}\rho(x, y)dxdy \equiv 0, \tag{2.66}$$

那末，表达式(2.65)就是积分不变量(函数 $\rho(x, y)$ 称为积分不变量的相密度[1])。

我们来求出，为了使表达式(2.65)成为方程(2.63)的积分不变量，函数 $\rho(x, y)$ 所应满足的条件。在将积分(2.65)对时间微分时，主要困难在于，积分区域 $G(t)$ 是随时间而改变的。要克服这个困难，利用雅可比式[2]

$$D=\frac{\partial(x, y)}{\partial(x_0, y_0)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0}\\ \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0}\end{vmatrix}=D(t; x_0, y_0)\neq 0, \tag{2.67}$$

在积分号下把变量 x, y 变换为变量 x_0, y_0。

换用新变量 x_0, y_0 后，得：

$$I(t)=\iint\limits_{G(0)}\rho(x, y)\frac{\partial(x, y)}{\partial(x_0, y_0)}dx_0dy_0. \tag{2.68}$$

---

1) 下面我们将假定函数 $\rho(x, y)$ 是正值确定的和有界的函数：

$$0\leqslant\rho(x, y)<M,$$

其中 M 是某一常数；此外，这个函数在任何有限区域中，都不恒等于零。

2) 我们证明雅可比式 D 不等于零(只有在这一情况中，我们采用的变数变换才是相互单值的)。将 $D(t; x_0, y_0)$ 对时间微分，得：

$$\frac{\partial D}{\partial t}=\begin{vmatrix}\frac{\partial \dot{x}}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0}\\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_0}\\ \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y_0}\end{vmatrix}=D\{P'_x(x, y)+Q'_y(x, y)\},$$

因为，按运动方程(2.63)把 $\dot{x}, \dot{y}$ 看成是 x, y 的函数，而按方程(2.63)的解(2.64)而把 x, y 看成是 $t; x_0, y_0$ 的函数；便有

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x_0}=\frac{\partial P(x, y)}{\partial x_0}=P'_x(x, y)\frac{\partial x}{\partial x_0}+P'_y(x, y)\frac{\partial y}{\partial x_0},$$

以及对于 $\partial\dot{x}/\partial y_0$, $\partial\dot{y}/\partial x_0$ 和 $\partial\dot{y}/\partial y_0$ 的类似表达式。对时间积分(对给定的 x_0, y_0)之，得：

$$D(t; x_0, y_0)=D(0; x_0, y_0)e^{\int_0^t\{P'_x(x, y)+Q'_y(x, y)\}dt},$$

其中 $x=x(t; x_0, y_0)$, $y=y(t; x_0, y_0)$。但是

$$D(0; x_0, y_0)=\frac{\partial(x_0, y_0)}{\partial(x_0, y_0)}=1,$$

因此

$$D(t; x_0, y_0)=e^{\int_0^t\{P'_x(x, y)+Q'_y(x, y)\}dt}\neq 0.$$

同时，这里的 x, y 应理解为函数 $x(t;\ x_0,\ y_0)$ 与 $y(t;\ x_0,\ y_0)$——微分方程 (2.63) 的解，而且

$$\frac{dI(t)}{dt}=\iint\limits_{G(0)}\frac{\partial}{\partial t}[\rho D]dx_0dy_0,$$

因为现在积分区域和时间无关了. 既然这个导数在任意的积分区域 $G(0)$ 上都应该恒等于零，那末被积函数也应该恒等于零（对于任意的 x_0, y_0），亦即[1]

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho(x,\ y)\cdot D(t;\ x_0,\ y_0)\}\equiv 0. \tag{2.69}$$

因为

$$\frac{\partial D}{\partial t}=D\{P'_x+Q'_y\},$$

那末，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}[\rho D]&=D\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial D}{\partial t}\\&=D\left\{\frac{\partial\rho}{\partial x}P+\frac{\partial\rho}{\partial y}Q+\rho\frac{\partial P}{\partial x}+\rho\frac{\partial Q}{\partial y}\right\}\\&=D\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\rho P)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho Q)\right\},\end{aligned}$$

又因为 $D\neq 0$, 条件 (2.69) 就可以化为对任意的 x, y 都成立的条件：

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho P)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho Q)\equiv 0. \tag{2.70}$$

不难证明，对于哈密尔顿方程，总是存在着常相密度的积分不变量（不失一般性，可令其等于一）的. 实际上，对哈密尔顿方程的情况，令 $x=q$, $y=p$ 及 $\rho=1$, 条件 (2.70) 可化为条件：

$$\frac{\partial}{\partial q}\left\{\frac{\partial H}{\partial p}\right\}+\frac{\partial}{\partial p}\left\{-\frac{\partial H}{\partial q}\right\}=0, \tag{2.71}$$

根据微分的可交换性，这个条件恒等地满足.

---

1) 我们把对时间的导数写成偏导数的形式，因为 x, y 和 $D(t;\ x_0,\ y_0)$ 都不仅依赖于时间而且依赖于 x_0, y_0.

这样，相面积（“二维的相体积”）就是哈密尔顿方程的积分不变量. 这个论断首先为刘维勒证明，因而被称为**刘维勒定理**.

为了把有些抽象的刘维勒定理解说清楚，我们研究几个例子，在这些例子中，相面积的不变性是不难直接地建立的.

例 I. 谐运动：

$$\frac{dp}{dt} = -q, \quad \frac{dq}{dt} = p,$$

$$p = a\cos(t+\varphi), \quad q = a\sin(t+\varphi).$$

不难想象，随着时间的变化，每一个表征系统状态的向径

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}a\sin(t+\varphi) + \mathbf{j}a\cos(t+\varphi),$$

都转过相同的角度. 任一图形都只作不变形的单纯转动，因而图形的面积也不改变（图 105）.

例 II. 常力作用下的运动：

$$\frac{dp}{dt} = -g, \quad \frac{dq}{dt} = p,$$

$$p = p_0 - gt, \quad q = q_0 + p_0 t - gt^2/2.$$

如果在瞬时 $t = 0$，我们在相平面上取出一个正方形，其顶点为：1) q_0, p_0; 2) (q_0+a), p_0; 3) q_0, (p_0+a); 4) (q_0+a), (p_0+a)，那末，随时间的增加正方形会变得越来越歪斜（图 106），但是图形的面积仍将保持不变，因为平行于 q 轴的两条边，亦即连接具有相同初速度 p_0 之顶点的两条边，作平行的移动且保持等距，它们的

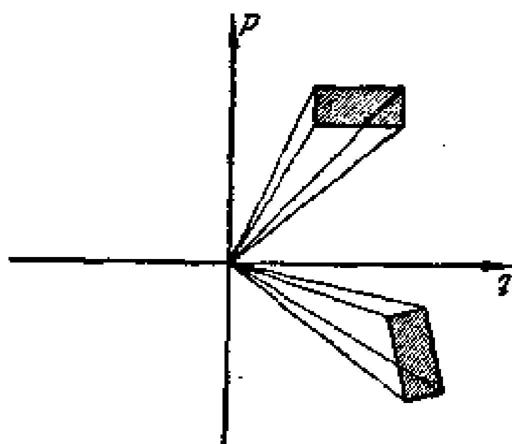


图 105

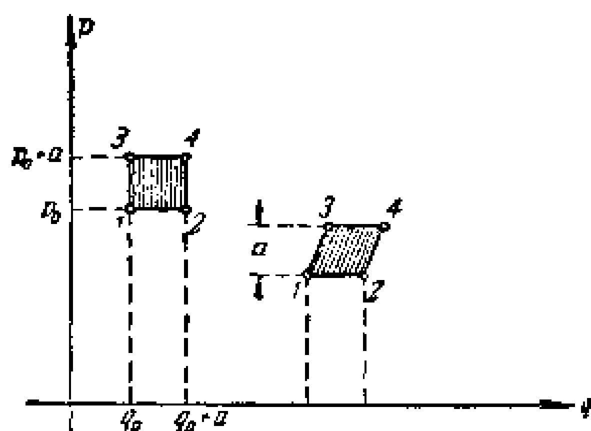


图 106

长度也始终等于 a. 边长为 a 的正方形变成了底边长为 a、高也等于 a 的平行四边形，亦即，和正方形面积大小相等的平行四边形.

如果我们不是用变量为 q 与 p 的相平面，而是用变量为 q 与 $\dot{q}$ 的相平面，亦即，我们不从哈密尔顿方程出发，而从拉格朗日方程出发，那末刘维勒定理就不成立了. 但是，一般说来，积分不变量还是存在的. 实际上

$$\iint_G dp\, dq = \iint_{G^*} \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial \dot{q}} & \frac{\partial p}{\partial q} \\ \frac{\partial q}{\partial \dot{q}} & \frac{\partial q}{\partial q} \end{vmatrix} dq\, d\dot{q} = \iint_{G^*} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\, dq\, d\dot{q}.$$

这样，对于变量 q, $\dot{q}$, 相密度不再是常数，而等于 $\partial^2 L/\partial \dot{q}^2$. 因此，为了使拉格朗日方程具有积分不变量，只要使 $\partial^2 L/\partial \dot{q}^2$ 有限且不变号，例如，始终为正就够了. 在真实情况中，这个条件通常是满足的.

更一般的保守系统的方程——普法夫方程 (2.61)，也有积分不变量，也就是有相密度为 $Q(u, v)$ 的不变量:

$$I = \iint_{G(t)} Q(u, v)\, du dv,$$

因为，使这个表达式成为方程 (2.61) 的积分不变量的条件

$$\frac{\partial}{\partial u}(QU) + \frac{\partial}{\partial v}(QV) = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\partial F}{\partial v}\right\} + \frac{\partial}{\partial v}\left\{-\frac{\partial F}{\partial u}\right\} = 0,$$

根据微分的可交换性，恒等地满足. 不难看出，可以应用表达式 $Q\Phi(F)$ 作为构成积分不变量的相密度，其中 Φ 是任意的函数，而 F 是保守系统的积分 (2.59) 的左端. 实际上，$\Phi(F)$ 是运动常数；所以十分明显，如果 $\iint Q du\, dv$ 是积分不变量，那末 $\iint Q\Phi(F)\, du\, dv$ 也将是积分不变量. 可以证明，这就是积分不变量的一般形式. 换句话说，令积分不变量之相密度的两个不同表达式之比等于常数，那末这个比值永远是系统的积分.

我们现在给予作为“二维液体微粒”的相点，以及作为这种“液体”的定态流(无源无汇)的相点运动，一个明晰的解释. 在本小节

开始已经说过，仅当存在积分不变量时，这种解释才是可能的：积分不变量的相密度 $\rho(x, y)$ 可以取为"液体的密度"，而积分不变量将表示"液体质量"的守恒定律。

研究夹在两条充分接近的相轨线间的"液体"的流动——和水动力学中流管相似的"流带"（图 107）。根据"液体质量"的守恒定律，通过这个流带的一个截面（例如，通过线段 l_1）的"液体"的流量，应该等于通过这个流带的任何其他截面（例如，通过线段 l_2）的流量。如果以 w_1 与 w_2 表在这些截面上的相速度[1]，即"液体"在流带的这些截面上的流动速度，那末显然[2]

$$\rho_1 w_1 l_1 = \rho_2 w_2 l_2,$$

其中 ρ_1 与 ρ_2 是"液体"在流带的第一和第二截面上的密度。

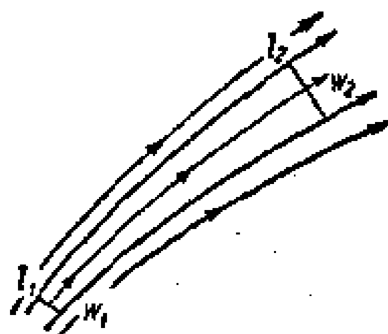


图 107

这样，如果我们知道了相轨线和相密度，就可以确定相速度沿轨线的相对分布，换句话说，亦即，如果已知相轨线上某一点的相速度，那末就可以确定在该轨线上任一点的相速度。

如果相密度符号不变、有界，则从具有这种相密度的积分不变量的存在，我们再一次地得出结论，在保守系统中，不可能存在结点型和焦点型的平衡状态，亦不可能有这样的相轨线（即极限环），其相邻的相轨线都渐近地向它趋近。实际上，假定不是这样，那末，在相平面上我们将有这样的"流带"，当这"流带"接近结点型或焦点型平衡状态时，或接近极限环时，其截面将无限地减小（更严

---

1) 所研究的"流带"的截面应该是那样的小，使得相速度在每个截面上可以认为是相等的。

2) 不难看出，通过任何闭回路的液体流量等于零。实际上，流入闭回路 Γ 的液体流量，如所周知，决定于积分

$$\oint_\Gamma \rho(\dot{y}\,dx - \dot{x}\,dy) = \oint_\Gamma \rho Q\,dx - \rho P\,dy = \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho P) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho Q)\right] dx\,dy,$$

并且根据条件 (2.70)，这个积分等于零（后一积分是利用格林 (Green) 公式从前一积分得到的）；S 表示回路 Γ 所围的二维区域。

格地说，趋向于零）．但是相速度在那里仍然保持有限值（当接近平衡状态时甚至要趋近于零），因而随着向平衡状态或向极限环的接近，相密度应该无限地增加，而这是不可能的．

5. 保守系统的基本性质 现在我们更详细地来研究保守系统的运动．从研究平衡位置开始，平衡位置决定于由方程（2.61）的右端等于零得到的条件

$$\frac{\partial F}{\partial u}=0 \text{ 及 } \frac{\partial F}{\partial v}=0.$$

这些平衡位置或者对应于系统的奇点，或者构成一条平衡线（当 $\partial F/\partial u$ 及 $\partial F/\partial v$ 有公因子时），这条平衡线，我们已见过，必然也是积分曲线．

我们已经知道，奇点不可能是充满部分平面的无穷多轨线的汇合点，换句话说，平衡位置不可能是绝对稳定的．

闭轨线对应于周期运动：我们已经见到过，如果有一个这样周期解，那末其他运动不可能向着它盘旋地趋近（也不可能离开它盘旋而去）．

换句话说（我们已经指出过），在保守系统中也不可能有绝对轨道稳定的轨线．如果保守系统中有一条闭轨线，那末必定有闭轨线的无限集合，充满相平面上某个区域，并且是层层相套的．在物理上，这意味着，如果可能有一个周期运动，那末就可能有无限多个，并且最大振幅与最大速度可在某一范围内取任意值，至于取什么值这决定于初始条件．不难看出，振动的周期对于不同的最大振幅，一般说来是不同的，亦即，也依赖于初始条件．允许等时振动（即周期不依赖于最大振幅的振动）的系统是特殊的情况；在第一章中讨论过的谐振子就是一例．如果相面拓扑地等价于平面，那末在此情况中，在闭轨线之内，必定有一个或几个奇点（如果奇点只有一个，那末必然是中心）．系统的振动只可能是环绕一个或几个平衡位置进行的，这些平衡位置之中，一定有一些是稳定的．假如相面是柱面，那末就可能存在不包围奇点的闭轨线，它们是环绕柱体的轨线；在这种系统中，可能沿着不包围平衡位置的闭轨线

产生周期运动. 作为例子,可以指出无阻尼的摆,当初速度很大时所作的旋转. 还可能有具有一个或几个奇点的闭积分曲线: 第一种对应于双面有限运动,即当 t 趋于 $+\infty$ 及趋于 $-\infty$ 时,都趋向同一平衡位置的运动. 第二种亦对应于双面有限运动,但是此运动是这样的,当 t 趋于 $+\infty$ 时趋向一个平衡位置,而当 t 趋于 $-\infty$ 时趋向另一平衡位置. 亦可能存在有限-逃逸运动,当 t 向一个方向趋于无限时,运动趋向平衡位置,而 t 向另一个方向趋于无限时,运动却趋向于无限远; 最后,还可能存在双面逃逸运动,运动向两方面都趋向无限远.

以后我们要使用下面的术语. 如果系统(为两个自治的一阶方程所确定的)的运动方程有单值的解析积分,那末我们就说这种系统在相平面上的积分曲线的结构具有保守的性质. 这种有单值解析积分的系统,如果它具有满足下列要求的积分不变量: 1) 积分区域 $G(t_0)$ 可以任取,只要不和某些孤立的曲线相交; 2) 当 t 进一步变化时,且当 $G(t)$ 仍然在相平面上的有限部分上时,它不趋向于零,我们就称之为保守系统.

最后我们还要指出曾经简单提及的一个性质,即保守系统对微分方程的变形的不稳定性. 可以证明,微分方程的最微小的变形,一般来说,也会使相平面上的整个图象发生本质上的改变,从而破坏了系统的保守性. 为了说明这种情形,当然以后还要就一般情况作严格的叙述和解释,可以列举下面的例子. 谐振子的方程 $\ddot{x}+\omega_0^2x=0$ 可以看成是线性振子方程

$$\ddot{x}+h\dot{x}+\omega_0^2x=0$$

的特殊情况. 当 $h=0$ 时,我们就得到保守系统——有中心型奇点及层层相套的椭圆族形状的积分曲线. 当 $h\neq 0$,但是任意小时,实质上亦是微分方程有任意小的变形时,系统就不再是保守的了,奇点变成焦点,闭轨线消失而出现了螺线. 还可以换一种说法,保守系统是动力学系统的非常特殊的情况,只有当系统的参数有完全确定的值时才存在(因而实际上这种情况是不可能实现的). 这些参数的改变,一般来说会使微分方程的形状随之改变,

并破坏系统的保守性[1].

6. 例子. 两个种族的共存问题 到现在为止，我们所研究过的例子不是机械系统，便是电系统，对于这些系统，关于保守性的问题，都是直接从物理概念得到解决的：因为系统中没有阻力或电阻，我们立刻就得到系统是保守的结论. 但是可能有这样的情况，此时，这种简单的概念对于解决系统是否保守的问题，已经不适用了. 那末，就要利用上节所导出的存在单值解析积分 $F(u, v) = C$ 的标志，作为保守性的必要判据. 作为保守性问题不能用前面方法解决之系统的例子，我们引用动物学中的沃耳特拉的例子[175,199,45]，也就是研究两种生物(例如，两种鱼类)的共存问题. 第一种鱼的食物是水中生产的，我们假设它的数量永远是充分的. 第二种鱼却只吃第一种鱼. 每种鱼的尾数当然都是整数，因而只可能作跳跃式的变化，但是为了能够利用微分方法，我们把鱼数看成是时间的连续函数. 以 N_1 表示第一种鱼的尾数，N_2 表示第二种的尾数. 我们假设，如果第一种鱼单独地活着，那末其尾数将连续地增加，同时我们假设其增加的速度和现存的尾数成正比，这时便有：

$$\frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 N_1,$$

而且 $\varepsilon_1 > 0$. 这个增长率 ε_1 依赖于死亡率与出生率. 如果第二种鱼单独地活着，那末它们将逐渐地死亡（设其减少的速度与 ε_2 成比例，$\varepsilon_2 > 0$）*，因为已经没有什么可吃，因此对第二种鱼可得：

$$\frac{dN_2}{dt} = -\varepsilon_2 N_2.$$

现在假设两种鱼共同生活，这时 N_2 越大，则第一种鱼的增长率就越小，因为第二种鱼以第一种鱼为食物. 我们再作一个最简单的假设，即，增长率 ε_1 减少的量正比于 N_2；类似地假设，由于第一种

1) 提醒一下，在 §5 中，我们曾研究过系统参数的某种特定的变化，这种变化不破坏系统的保守性.

* 此括号原书没有，当然这两个假设都是人为的，即都是真实性质的理想化——译者注.

鱼的存在(食物的存在)，第二种鱼的减少率 ε_2 改变的量亦正比于 N_1，在这些假设下，我们得到下列微分方程组：

$$\frac{dN_1}{dt}=N_1(\varepsilon_1-\gamma_1 N_2);\quad \frac{dN_2}{dt}=-N_2(\varepsilon_2-\gamma_2 N_1),\quad (2.72)$$

同时 ε_1, ε_2, γ_1 与 γ_2 都大于零[1]，把第一个方程乘以 γ_2，第二个方程乘以 γ_1，然后相加，得：

$$\gamma_2\frac{dN_1}{dt}+\gamma_1\frac{dN_2}{dt}=\varepsilon_1\gamma_2 N_1-\varepsilon_2\gamma_1 N_2;$$

第一个方程乘以 ε_2/N_1，第二个方程乘以 ε_1/N_2，然后相加，得：

$$\varepsilon_2\frac{1}{N_1}\frac{dN_1}{dt}+\varepsilon_1\frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt}=-\varepsilon_2\gamma_1 N_2+\varepsilon_1\gamma_2 N_1.$$

因此

$$\gamma_2\frac{dN_1}{dt}+\gamma_1\frac{dN_2}{dt}-\varepsilon_2\frac{d\ln N_1}{dt}-\varepsilon_1\frac{d\ln N_2}{dt}=0.$$

直接积分最后的方程，便求出单值积分：

$$\gamma_2 N_1+\gamma_1 N_2-\varepsilon_2\ln N_1-\varepsilon_1\ln N_2=\text{常数}.$$

我们可以把这个积分改写为

$$F(N_1, N_2)=e^{-\gamma_2 N_1}e^{-\gamma_1 N_2}N_1^{\varepsilon_2}N_2^{\varepsilon_1}=\text{常数}.\qquad (2.73)$$

不难确信，表达式

$$\iint\frac{dN_1 dN_2}{N_1 N_2}$$

就是积分不变量. 据此我们便可以断定，所研究的系统是保守的. 现在再来研究积分曲线的形状. 为此，我们把方程 (2.73) 改写成下列形式：

$$N_1^{-\varepsilon_2}e^{\gamma_2 N_1}=CN_2^{\varepsilon_1}e^{-\gamma_1 N_2}$$

并作曲线

$$Y=N_1^{-\varepsilon_2}e^{\gamma_2 N_1},\qquad X=N_2^{\varepsilon_1}e^{-\gamma_1 N_2},$$

由此，所求轨线决定于关系式

$$Y=CX.$$

1) 值得指出，在某些化学过程的动力学问题中，也会导出 (在相应的简化假设下) (2.72) 形式的方程，例如参看 [123].

取二相互垂直的直线作为 OX, ON_1, OY, ON_2 轴, 如图 108 所示. 在第二, 第四象限中分别地作出曲线 X 与 Y. 这些曲线的形状很容易由下表来确定:

N_1	0	$k=\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$	$+\infty$
$\frac{dY}{dN_1}$	$-$	0	$+$
Y	$+\infty$	↘极小↙	$+\infty$

N_2	0	$k_2=\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$	$+\infty$
$\frac{dX}{dN_2}$	$+$	0	$-$
X	0	↗极大↖	0

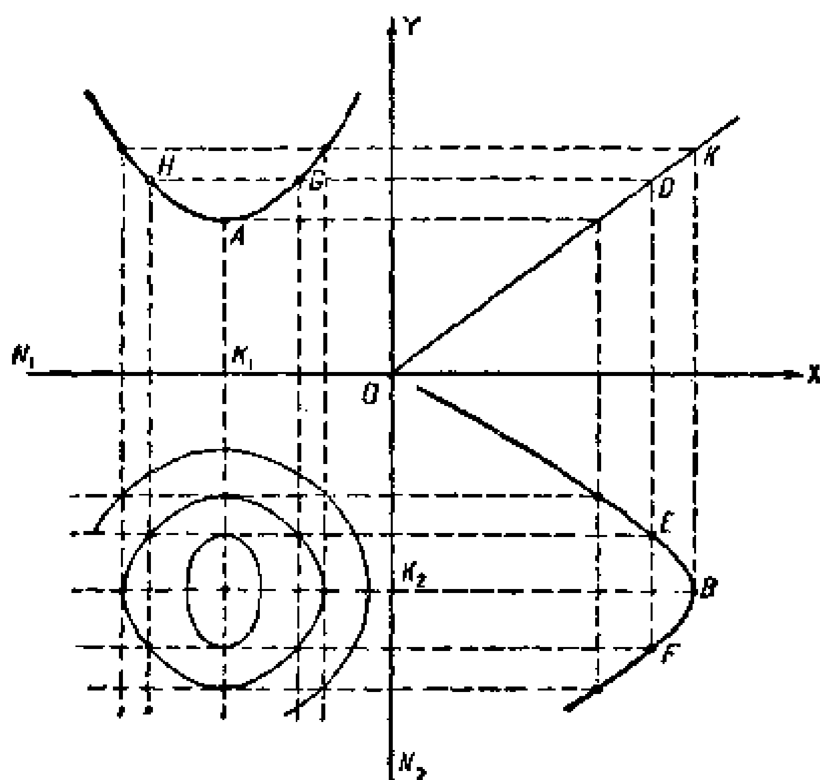


图 108

因为

$$\frac{dY}{dN_1}=Y\left(-\frac{\varepsilon_2}{N_1}+\gamma_2\right);\quad \frac{dX}{dN_2}=X\left(\frac{\varepsilon_1}{N_2}-\gamma_1\right).$$

在第一象限中作直线 $Y=OX$*, 在直线 OK 上任取一点, 例如, D 点. 通过 D 引两条直线——一条平行于 OY 轴; 另一条平行 OX 轴. 令 E, F, G, H 为这些直线与曲线 X 与 Y 的交点; 由 E, F 点

* 应为 "……作直线 $OK: Y=CX$."——译者注.

作二直线平行于 OX，且过 H，G 点作二直线平行于 OY 轴。这些直线的交点就是积分曲线 $Y = CX$ 的点。当 D 点沿直线 OK 滑动时，这些点的几何轨迹，便是所求的积分曲线。不难看出，积分曲线都是闭的，对应于坐标轴的那一条除外*。平衡状态是中心型奇点，其坐标为

$$N_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \text{ 及 } N_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$$

总之，我们看到，在所研究的情况中，两类鱼的数量是按周期规律而变化的。图 109 上表示出了 N_1 与 N_2 对时间的关系。

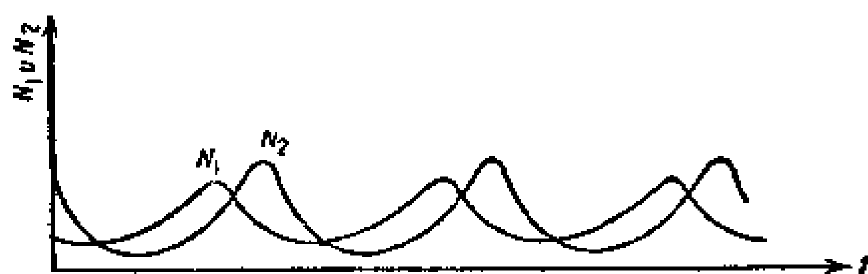


图 109

* 这一条积分曲线为：互成直角的折线 N_2ON_1。这一积分曲线含有三个特殊运动：1) N_2O 轴，指向 O 点，即没有第一类鱼的情况，2) N_1O 轴，离开 O 点，即没有第二类鱼的情况，3) 原点，两种鱼都没有的情况——译者注。

第三章 非保守系统

我们研究了两类系统：第一，线性的非保守系统，并证实了，对这类系统来说周期的运动一定是不可能的；第二，保守系统（线性和非线性的），并证实了，在这种系统中，可能有周期运动，但是这种运动永远有无限多个，并且它们的振幅完全决定于初始条件．其实我们已经不只一次地指出过，我们感兴趣的主要是振幅决定于系统本身性质的周期运动．其次，我们感兴趣的首先是这样的系统，其运动的特性，不因系统本身有微小的、十分一般的改变，而有本质上的改变；正如我们刚才提到的，保守系统不满足这个要求．以后我们会看到，只有非线性、非保守的系统，才是我们所感兴趣的与真实物理系统完全符合的数学模型，亦即，这种数学模型，它们能解答物理振动学的问题． 在本章中，我们将举例来讲述这种非线性、非保守系统的两种基本类型——耗散系统和自振系统．

§1. 耗散系统

由于我们将研究的情况，和前面研究过的保守系统情况的不同在于有了无势能之力的存在，那末对于这种系统，引入"广义力"，我们就可以将拉格朗日方程写为：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}-\Phi=0, \tag{3.1}$$

其中广义力Φ是q与$\dot{q}$的某一函数[1]．在"线性阻力"或欧姆电阻

1) 广义力决定于关系式：$\delta A=\Phi\delta q$，其中δA是作用于系统上的非势力，在坐标的微小的虚位移δq上所作的功（在理论力学的意义下）．例如，当有电量δq通过电系统的电阻R时，所作的功等于$U_R\cdot\delta q$，其中$U_R=R\dot{q}$为电阻上的电压；这样，在此情况中，$\delta A=-R\dot{q}\delta q$而$\Phi=-R\dot{q}$．同样地，对于线性的粘性阻力有$\Phi=-b\dot{q}(b>0)$．

的特殊情况中，Φ 是速度的线性函数：$\Phi = -b\dot{q}$，而拉格朗日方程取形状：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + b\dot{q} = 0.$$

当存在有正比于速度的阻力时，例如，有欧姆电阻之有铁芯的回路等，对我们研究过的任一个非线性系统，都可能导出这样的方程。当系统中存在有以更复杂形式依赖于速度的阻力时，对系统的研究将导出更一般形式的方程，亦即方程(3.1)。

如果非保守力具有阻力的特性，那末它应该阻碍运动，亦即，应该永远指向和速度相反的方向。因此，在有阻力的情况中，应该永远满足条件

$$\Phi\dot{q} \leqslant 0, \tag{3.2}$$

同时，等于零无论何时都不能恒等地得到满足，除非 $\dot{q} = 0$，即系统处于平衡状态的情况。以 $\dot{q}$ 乘方程(3.1)的各项，便得到能量平衡方程：

$$\frac{dW}{dt} - \Phi\dot{q} = 0, \tag{3.3}$$

其中 $W = \dot{q}(\partial L/\partial \dot{q}) - L$ (W = 常数是 $\Phi = 0$ 时方程(3.1)的积分)。对于普通的系统 W 是总能量，并且根据方程(3.3)和条件(3.2)，可知这个能量在系统运动时 ($\dot{q} \neq 0$)，总是减少的。假设，能量不可能趋于 $-\infty$。这时我们可以断言，能量将随时间趋向某一常值 W_0，而 $\Phi\dot{q}$ 以及 $\dot{q}$ 将趋于零，亦即，系统趋向于静止状态(平衡状态)[1]。这种系统我们称为耗散系统。在耗散系统中，唯一的定态状态是平衡状态，系统在任何初始条件下都将趋近这一平衡状态。耗散系统中显然不可能有周期运动，因为系统的能量在运动时总是减少的。

作为耗散系统的例子，我们研究存在阻力的、大振幅的普通摆。为简单起见，我们将假设阻力和速度成正比，亦即，令 $\Phi = -b\dot{q}$ 及 $b > 0$。摆的拉格朗日函数 L 是：

---

1) 一般来说，W_0 依赖于初始条件。

$$L = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mgl(\cos\varphi - 1),$$

而拉格朗日方程为：

$$I\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0. \tag{3.4}$$

在相柱面之展开面上的图象(相面显然又是柱面)决定于方程：

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{b\omega + mgl\sin\varphi}{I\omega}, \tag{3.5}$$

其中 $\omega = d\varphi/dt$. 这个方程的奇点显然是：$\varphi = 0$, $\omega = 0$ 及 $\varphi = \pm\pi$, $\omega = 0$. 稳定的平衡状态对应于点 (0, 0), 它或者是稳定的焦点(当 $b^2 < 4Imgl$ 时), 或者是稳定的结点(当 $b^2 > 4Imgl$ 时)；不稳定的平衡状态对应于鞍点 $(\pm\pi, 0)$. 要证实这一点, 只要把 $\sin\varphi$ 在 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = \pm\pi$ 的近旁展为幂级数, 并只取线性项, 然后, 象在第一章中那样, 研究得到的线性化方程就可以了.

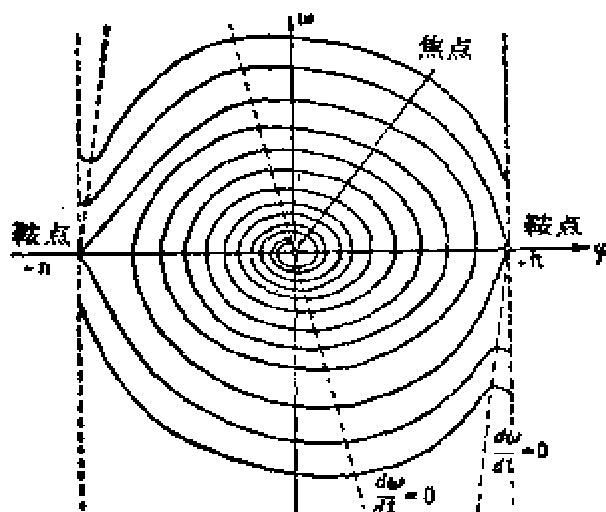


图 110

在 φ 轴 $(\omega = 0)$ 上积分曲线有铅垂的切线, 而在曲线 $\omega = -(mgl/b)\sin\varphi$ 上有水平切线, 亦即, 等倾线 $d\omega/d\varphi = 0$ 是正弦形的, 并且 b 越小, 则这个正弦波的振幅越大. 一般地, 对于所研究的 $b^2 < 4Imgl$ 和 $b^2 > 4Imgl$ 这两种情况, 得到的相图分别表示在图 110 与 111 上. 将柱的展开面沿 $\varphi = \pm\pi$ 粘合, 就得到被相轨线划分的柱面.

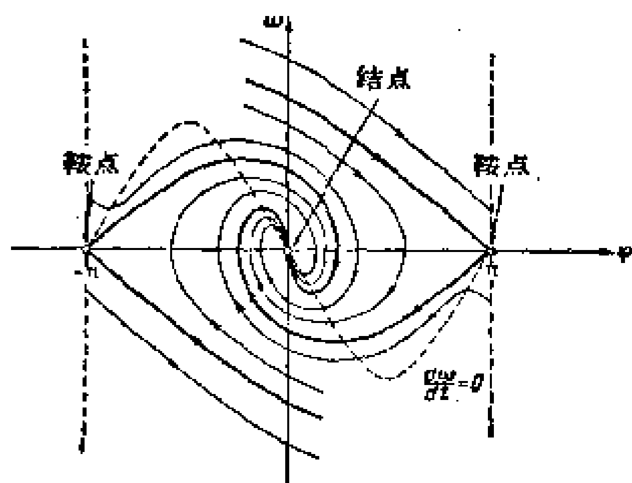


图 111

看一下摆的相图(图 110 与图 111)，很容易确信，系统中没有周期运动，并且几乎对于所有的初始条件(除了对应于平衡状态和鞍点的稳定胡须的那些初始条件以外)，系统都趋向于稳定的平衡状态.

如果不满足条件 (3.2)，那末系统就可以不是耗散的，在这种系统中能量可能由于"阻力"而增加，因为当 $\Phi\dot{q}>0$ 时 $dW/dt>0$；在电子管振荡器及弗罗特摆的例子中我们已经见过这些情况了.

如果条件 (3.2) 不满足，那末我们已经不能肯定地说，周期运动是不可能的了. 例如，假设我们有与速度平方成正比的"阻力"，即 $\Phi = b\dot{q}^2$，其中 $b > 0$. 显然，这种"阻力"当 $\dot{q} > 0$ 时阻碍运动，而当 $\dot{q} < 0$ 时帮助运动. 在这个情况中，能量平衡方程是

$$\frac{dW}{dt} + b\dot{q}^3 = 0.$$

研究这个方程以后，不难证明，对于普通的机械系统和电系统的问题，$\Phi = -bq^2$ 形式的"阻力"，并不破坏系统的保守性，因而，在相应的系统中，可能有周期运动的连续统，它们的振幅依赖于初始条件[1].

作为例子，我们来研究方程[2]

$$2\ddot{x} + \dot{x}^2 + x = 0 \tag{3.6}$$

---

1) 真实的和速度平方成正比的阻力，总是和运动方向相反的；所以其解析表达式应写为

$$\Phi = b\dot{q}^2 \operatorname{sgn} \dot{q},$$

其中 $b > 0$，并且象平常一样，我们把 $\operatorname{sgn} \dot{q}$ 理解为函数

$$\operatorname{sgn} \dot{q} = \begin{cases} +1 & \text{当 } \dot{q} > 0, \\ 0 & \text{当 } \dot{q} = 0, \\ -1 & \text{当 } \dot{q} < 0. \end{cases}$$

对于这种阻力规律，耗散性条 (3.2) 当然是满足的.

2) 对方程

$$m\frac{d^2q}{dt^2} + b\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + kq = 0$$

作变量代换

$$q = \frac{m}{2b}x, \quad t = \sqrt{\frac{m}{2k}}\, t_{\text{新}},$$

就可化为这个方程.

所描述的振子在相平面上的图象，令 $\dot{x}=y$，消去时间，便得到相平面 x, y 上的积分曲线方程：

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+y^2}{2y} \tag{3.7}$$

或 $2y(dy/dx)=-x-y^2$ 或 $(d(y^2)/dx)+y^2=-x$. 积分最后一式，得

$$y^2=Ce^{-x}+1-x$$

或

$$(y^2+x-1)e^x=C, \tag{3.8}$$

其中 C 是积分常数（我们在运动方程中的 $\ddot{x}$ 之前，保留了系数 2，仅仅是为了使这个积分曲线的方程，具有最简单的形式）。

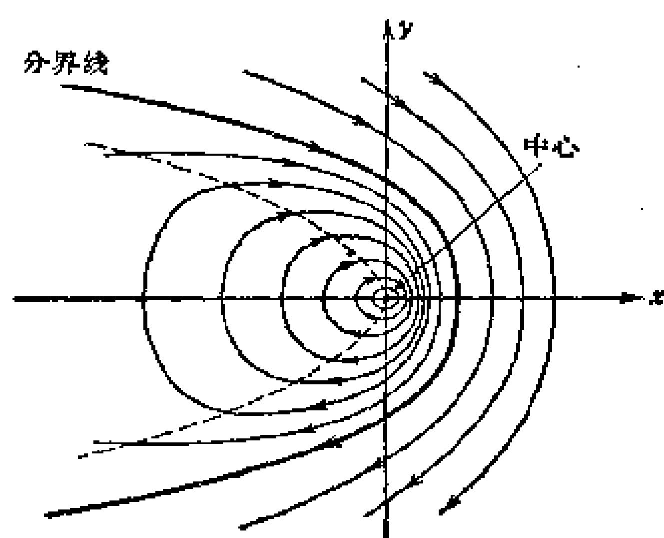


图 112

积分曲线族 (3.8) 如图 112 所示. 值 $C=-1$ 对应于孤立点 (0, 0)——方程 (3.7) 的奇点；当 $0>C>-1$ 时，得到包围坐标原点且层层相套的闭曲线；当 $C\geqslant 0$ 时，曲线 (3.8) 走向无穷远（值 $C=0$ 对应于抛物线 $y^2=1-x$，这是一条分界线，即把闭曲线和走向无穷远的曲线分隔开来的曲线）[1].

---

1) 为了证明曲线 (3.8) 确实具有这样的形状，可以这样进行. 首先求出曲线 (3.8) 与横轴的交点，这些交点显然决定于方程

$$(x-1)e^x=C.$$

为了用图解法解这个方程，在辅助平面 x、z 上作曲线

$$z=(x-1)e^x \tag{α}$$

（当 $x=0$ 时，曲线有唯一的极值——极小值 $z=-1$；当 $x\to-\infty$ 时 $z\to 0$，当 $x=1$ 时 $z=0$，而当 $x\to+\infty$ 时 $z\to+\infty$）. 这时对应于给定的 C，曲线 (3.8) 与横轴的交点，就是曲线 (α) 与直线 $z=C$ 的交点. 显然，当 $C<-1$ 时，无交点；当 $C=-1$ 时，有双重交点 $x=0$；当 $-1<C<0$ 时，有两个交点：$x=x_1<0$ 及 $x=x_2>0$，并且 $x_2<1$，同时当 $C\to 0$ 时，$x_1\to-\infty$ 而 $x_2\to 1$. 最后当 $C\geqslant 0$ 时，仅有一个交点 $x\geqslant 1$.

然后，利用关系式

$$y^2=[C-(x-1)e^x]e^{-x},$$

不难作出有给定值 C 的积分曲线 (3.8). 显然，只有当 x 取使得直线 $z=C$ 位于曲线 (α) 之上方那些值时，这条积分曲线才存在.

如果初瞬时相点位于分界线所围之区域的内部，那末，系统将作周期运动，其振幅完全决定于初始条件（从积分曲线的形状，立刻可以看出，振动的波形与正弦波有很大的不同）. 正象我们已见到的，这是非线性保守系统最独特的一个性质；我们引入的阻力，在每一周期的一段时间上阻碍运动，而在另一段时间上“帮助”运动，但不破坏系统的保守性.

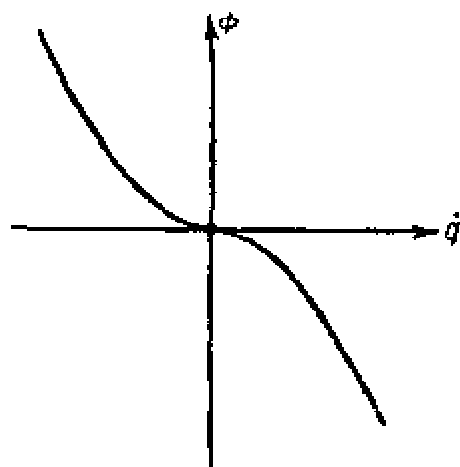


图 113

由这种情况不难转而研究耗散系统——具有“真正的”平方阻力的振子，亦即，具有和速度平方成正比（图 113）的阻力，并由关系式

$$\Phi = -b\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 \operatorname{sgn}\left(\frac{dq}{dt}\right) \quad (b > 0)$$

所表示的振子. 这种振子的运动方程

$$m\frac{d^2q}{dt^2} + b\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 \operatorname{sgn}\left(\frac{dq}{dt}\right) + kq = 0$$

经过 153 页注解中的变数代换，可化为方程

$$2\ddot{x} + \dot{x}^2 \operatorname{sgn}\dot{x} + x = 0, \tag{3.9}$$

或

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ 2\dot{y} &= -x - y^2 \operatorname{sgn} y. \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

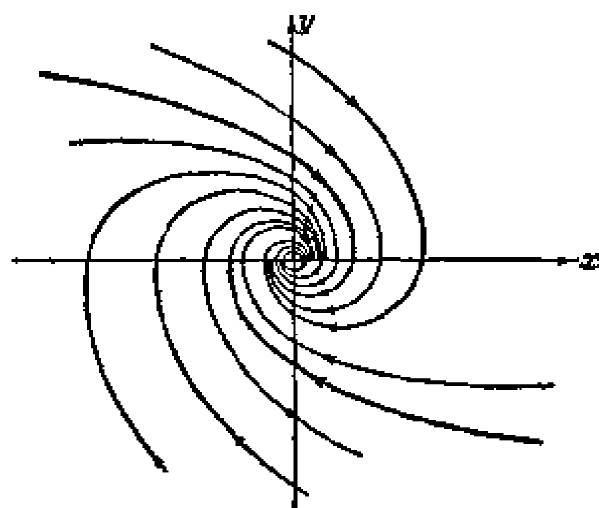


图 114

由所得的方程可知，坐标原点 (0, 0) 是唯一的平衡状态. 而且由于当变量 x, y 用 $-x$, $-y$ 代换时，方程 (3.10) 的形式并不改变，所以上半平面中的相轨线与下半平面中的相轨线对称于原点（换句话说，如果曲线 $y = f(x)$ 是相轨线，那末曲线

$y = -f(-x)$ 也是相轨线)。

但是上半平面中 ($y \geqslant 0$) 的相轨线，显然和刚才研究过的保守系统的轨线(3.8)相重合．因此，在 x 轴的上面保留图 112 所示的图象，再于下半平面作出和上半平面对称的(对于原点)轨线，我们就得到了具有平方阻力之振子的相图 (图 114)．

象所预料的那样，平衡状态 (0, 0) 是稳定的，并且所有其它螺旋形的相轨线都渐近地 (当 $t \to +\infty$) 趋向这一点；换句话说，系统在任何初始条件下，都作振动的衰减振动[1]．

§2. 具有"库仑"摩擦的振子

作为第二个耗散系统的例子，我们研究具有"干"摩擦的振子(图 115)，并且为简单起见，假设在没有摩擦时，系统是一个谐振子．在第一章 §4 我们已经研究过有这种无摩擦时是谐振子的系统，不过那时我们假设了阻力和速度成正比．这种阻力规律可以满意地决定物体在液体或气体介质中，以不太大的速度运动时的阻力．但是，这个线性规律完全不能反映出"干"摩擦——所研究的振动系统中固体表面间(中间没有滑润层时)存在的摩擦——的规律性．"常值"或"库仑"摩擦的假设，对任何情况，在低速范围中，都能够相当满意地反映这种规律性的基本特点．当然，在讲到常值摩擦时，必须理解为摩擦的大小是不变的，而不是方向不变，因为摩擦力的方向永远和速度的方向相反(只有在这一情况中，耗散条件，即不等式 (3.2) 才能满足)．库仑摩擦力 f 和速度 v 的关系，象我们已经讨论过的那样，可以用图来表示，如图 116 所示．这时，必须记住，当 $v = 0$ 时，摩擦力的大小可以取从 $+f_0$ 到 $-f_0$

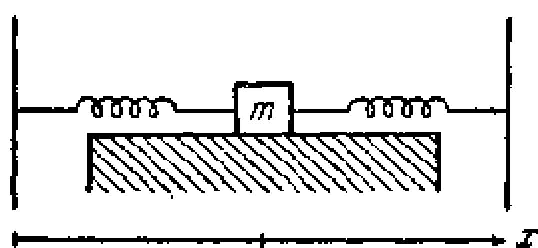


图 115

1) 在下册第八章 §9 中，利用将问题归结为某一直线到直线的点变换方法，我们将证明相轨线确实是这样的．

间的任何值，这依赖于作用在系统上的其他力的大小，而且在摩擦力的绝对值不超过最大静止摩擦力 f_0 的条件下，它应该和其他作用力相平衡[1]。

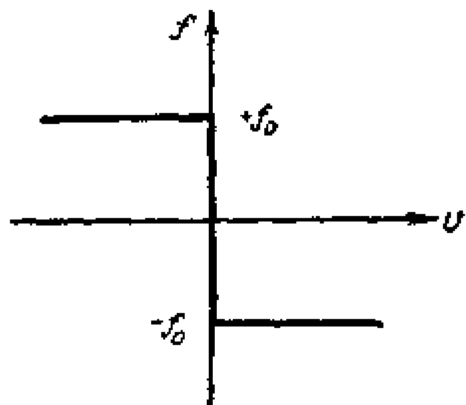


图 116

在我们所研究的系统中，质量 m 上除干摩擦力以外，还作用有弹簧拉力 $-kx$。因此，如果弹簧拉力的绝对值不超过 f_0，则不动的振子 $(\dot{x}=0)$ 将保持静止，因为拉力完全为干摩擦力所平衡。这样，振子的坐标为 $-f_0/k \leqslant x \leqslant +f_0/k$ 的所有位置，都可以是静止位置。如果 $|kx| > f_0$，那么，弹簧力已经不能完全为干摩擦力所平衡，振子将要运动。当振子运动时，库仑摩擦力当 $\dot{x}<0$ 取 $f=+f_0$，而当 $\dot{x}>0$ 时取 $f=-f_0$。

总之，对于所研究的问题，可以将库仑摩擦力写为下列形式：

$$f=\begin{cases}+f_0 & \text{当 } \dot{x}<0,\\ +f_0 & \text{当 } \dot{x}=0 \text{ 及 } kx>f_0,\\ +kx & \text{当 } \dot{x}=0 \text{ 及 } |kx|\leqslant f_0,\\ -f_0 & \text{当 } \dot{x}=0 \text{ 及 } kx<-f_0,\\ -f_0 & \text{当 } \dot{x}>0\end{cases} \tag{3.11}$$

（这样，库仑摩擦力是一个非线性的不连续函数，并且它不仅依赖于振子的速度 $\dot{x}$，还依赖于振子的坐标 x）。

对应地，我们可以将振子的非线性运动微分方程

$$m\ddot{x}=-kx+f \tag{3.12}$$

写为两个不同的线性方程的形式，其中一个适用向左的运动：

$$m\ddot{x}+kx=+f_0 \quad (\dot{x}<0), \tag{3.12a}$$

而另一个适用于向右的运动：

$$m\ddot{x}+kx=-f_0 \quad (\dot{x}>0). \tag{3.12b}$$

1) 根据库仑定律，最大静摩擦力 f_0 和两个接触面间的压力成正比；在我们的情况中，$f_0=\rho_0 mg$，其中 ρ_0 是所谓的摩擦系数。

对于不动的振子（即当 $\dot{x}=0$）*，如果 $|kx|\leqslant f_0$，有 $\ddot{x}=0$；如果 $kx>f_0$，有 $m\ddot{x}=-kx+f_0$；最后，如果 $kx<-f_0$，则有 $m\ddot{x}=-kx-f_0$。

怎样求这种系统的运动呢？设初瞬时 $\dot{x}>0$**，系统的运动由第一个微分方程（3.12a）来描写．速度将减小，一直到某瞬时 $t=t_1$，这时系统到达坐标 $x=x_1$，速度变成零．速度改变符号，以后系统向相反方向运动[1]．反方向的运动，很明显，是由第二个方程（3.12b）描述的．并且，现在的反向运动的初始条件，应该取系统在上一阶段运动终了时的坐标与速度（x_1, 0）．这样地依次类推下去：在每次改变运动方向时，更换方程并"缝接"初始条件，亦即，把系统在上一次运动中所达到的状态，作为下次运动的初始状态．令 $k/m=\omega_0^2$，$f_0/m=a\omega_0^2$（显然，这里 $a=f_0/k$），把所研究之系统的运动方程写为下列形式：

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=\begin{cases}+a\omega_0^2 & \text{当 } \dot{x}<0,\\ -a\omega_0^2 & \text{当 } \dot{x}>0.\end{cases} \tag{3.13}$$

对第一个方程引入新变量 $\xi_1=x-a$，而对第二个方程引入 $\xi_2=x+a$，得到两个相同形状但变量坐标原点不同的方程：$\ddot{\xi}_1+\omega_0^2\xi_1=0$（当 $\dot{\xi}_1<0$）及 $\ddot{\xi}_2+\omega_0^2\xi_2=0$（当 $\dot{\xi}_2>0$）***，这些方程的解是谐振动方程．因此，所研究之系统的运动可以视为是由两"半个"谐振动组成的，这两个谐振动是相对于两个不同的平衡位置进行的，而且两个平衡位置相对无摩擦时系统的真正平衡位置分别地有一偏离 $+a$ 与 $-a$．"方程更换"是在系统速度等于零但坐标不为零时进行的．因此，在每次"方程更换"时，初始条件都是 $x=x_{0i}$；$\dot{x}=0$．满足这些初始条件的解是 $x_{0i}\cos\omega_0t$（如果在"方程更换"时令 $t=0$）．因此，我们应该用由 0 到 π 的一段余弦波，亦即由一个极值到下一个极值的一段余弦波，来表示每"半次

---

* "不动的振子"应理解为，振子在某瞬时速度等于零——译者注．

** 应为 <0 ——译者注．

1) 当然，物体可能会停下来，物体是否停下来，这取决于在 x_1 点，是最大摩擦力 f_0 大，还是弹性力大．

*** 原书为"ξ"——译者注．

振动"。

要把运动画成波形图 $x=f(t)$，应该按下列方式进行(图 117)。令系统的初偏离为 x_{01}，而初速度 $\dot{x}_{01}=0$。如果初偏离是正的，那末起始一段的速度将是负的，并且，平衡位置要位移 $+a$，即由时间轴向上移一距离 a。因此，第一个半次振动由一个极值到另一个极值完了时，系统向下达到最大偏离 x_{02}，同时 $|x_{02}|=|x_{01}|-2a$。

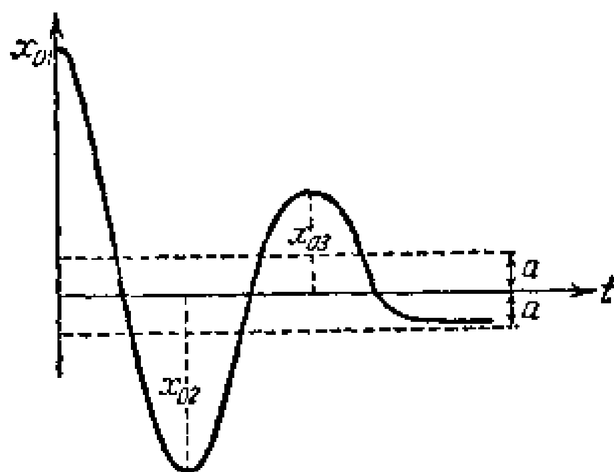


图 117

其后，对第二个半次振动（当 $\dot{x}>0$），第二个方程开始生效，因此，这半次振动是相对位移了 $-a$ 的平衡位置(即由时间轴向下作位移 a)的振动，并且也是从一个极大值开始的。到这半次振动终了，系统到达最大偏离 x_{03}(在 t 轴之上)，同时 $|x_{03}|=|x_{02}|-2a=|x_{01}|-4a$。

这种平衡位置向初偏离的方向位移的情况，不难看出，正好构成振动的衰减。系统所达到的最大偏离（偏离的极值），每次绝对值减少 $2a$，而在一个方向的最大偏离(极大值或极小值)是按公差等于 $4a$ 的递减等差级数减少的。很明显，这个级数是由有限个项组成的，运动在振动了有限次之后亦将停止。实际上，当最大偏离减到小于 $3a$ 时，如图 117 中所示的 x_{03}，那末下一次运动就使系统进入直线 $+a$ 与 $-a$ 之间的区域，在这区域内，如果没有速度，系统就将在任何点上保持静止，因为在这个区域中 $|kx|\leqslant f_0$。这样，在所研究的情况中，最大偏离便不象线性振子(具有和速度成正比的阻力)的情况那样按几何级数减少，而是按算术级数减少的，并且运动经有限时间后就停止了。"衰减的对数减缩"一词在这里丧失了意义，因为两次相继偏离之比的对数，已经不再是常值了。

系统振动的"条件周期"，和我们在阻力与速度成正比的衰减

振动中所定义的一样，即两次极大幅值间的时间间隔(在运动的振动阶段中)，对于常值摩擦的情况，不依赖于摩擦力的大小，并且等于谐振子的周期[1]. 这时，研究一下图 117 就不难相信，在极大幅值与下一个零值之间的距离(沿时间轴)大于零值与下一个极大幅值之间的距离. 极大值越小这个差就越明显. 极大值沿时间轴向前一个零值所作的这种"平移"，正象我们见到过的，在具有和速度成正比的阻力的线性系统中，也是存在的. 最后，我们再指出一个线性阻力系统与常值摩擦系统间的区别（这个区别与刚才所说的联系很容易找到). 对于线性阻力的情况，总是可以（至少是形式上地把系统分为振动的和非周期的. 而对于常值摩擦的情况，把系统划分为振动和非周期的，完全失去意义，因为对于任何摩擦，总可以选择充分大的初偏离，使得系统在停止运动之前，作若干次振动. 常值摩擦之系统的这种性质的物理意义，在研究系统中的能量平衡问题时，表现得特别明显.

如果系统的初偏离是 x_{01}，而初速度等于零，那末系统的初能量就是势能 V，同时 $V_1 = kx_{01}^2/2$. 消耗于克服摩擦力的功 A 不依赖于速度，而只依赖于路径(因为摩擦力是常数). 显然，在前半个"条件周期"内，功等于

$$A_1 = (|x_{01}| + |x_{02}|)f_0,$$

其中 x_{02} 是第二个最大偏离. $x = x_{02}$ 时的势能是

$$V_2 = \frac{kx_{02}^2}{2};$$

因为 $V_1 - V_2 = A$，所以

$$\frac{k}{2}(x_{01}^2 - x_{02}^2) = (|x_{01}| + |x_{02}|)f_0,$$

$$|x_{01}| - |x_{02}| = 2f_0/k = 2a$$

(这个结果我们早已用其他的方法得到过了)，而且

---

1) 应指出，对于所研究的常值摩擦的情况，系统在同一侧的运动中，两次坐标为零之间的时间间隔（在振动的阶段中），已经不同了，因此不能用它来定义"条件周期".

$$A_1 = 2f_0(|x_{01}| - a)^*.$$

我们看到了，当初偏离增加时，A_1 线性地增加，而 V_t 按平方规律增加．因此，当初偏离充分大时，系统内的能量储备远比在半个条件周期中消耗在摩擦上的能量为大，这就意味着，当初偏离充分大时，系统开始总是要振动的．

现在来看我们所研究的运动在相平面上的图象．为此，照例令 $dx/dt = y$，得到两个一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\omega_0^2(x-a)}{y} \quad 当\ y < 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\omega_0^2(x+a)}{y} \quad 当\ y > 0;$$

积分之，求得

$$\frac{(x-a)^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_1^2\omega_0^2} = 1 \quad 当\ y < 0, \tag{3.14a}$$

$$\frac{(x+a)^2}{R_2^2} + \frac{y^2}{R_2^2\omega_0^2} = 1 \quad 当\ y > 0, \tag{3.14b}$$

其中 R_1 与 R_2 是积分常数．方程 (3.14a) 与 (3.14b) 确定二个"半椭圆"族，其中心对 (3.14a) 向右，对 (3.14b) 向左分别移一距离 a，利用"缝接"法（见前面），并考虑到相平面上运动的方向，不难作出相轨线，如图 118 所示．根据这个表示所研究的动力学系统的相

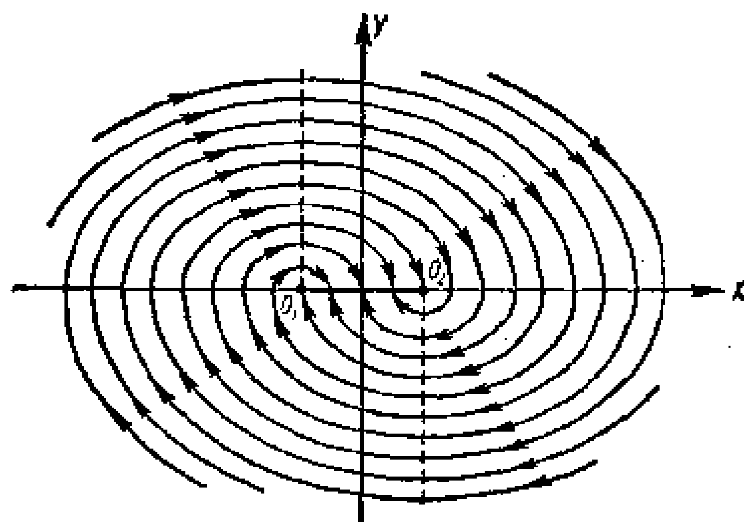


图 118

* 其中 − 号原书为 +——译者注．

图的图形，立即可以对所有可能运动的特性进行讨论．所有的相轨线都是由半椭圆组成的螺线，并走向线段 O_1O_2，线段 O_1O_2 就是平衡状态的几何轨迹．这样，一般来说，系统是以减小的振幅绕平衡位置而振动的，并且振动有限次数以后就将停止，而振动的次数则和初始条件有关．在特殊情况下，当初始条件对应于线段 O_1O_2 上的一点时，系统保持静止．正象我们看到的，静止状态不是对应于一些单独的点，而是整个直线段 O_1O_2．但是，在这条线段上，系统也具有某种独特的“不稳定性”．实际上，例如，假设系统停留在点 $+x_1$ 上，在不同的方向分别给它一个冲击，使它具有大小相同的初速度．但是向一个方向冲击它，我们把相点“投”到了 $+y_1$，而另向一个方向冲击，则“投”到 $-y_1$（图 119）．因为这里的上半椭圆，比下半椭圆有更大的半轴，所以相轨线由上面到横轴比由下面到横轴，更“陡峭”些，因而，受冲击 $-y_1$ 时，系统最后向“真正的”平衡状态靠近（接近坐标原点）的距离，要比受冲击 $+y_1$ 时，远离这个平衡状态的距离为大．因此，如果使两方面受到冲击的次数相等（例如系统受到人工的有规律的抖动），那末系统最后将进入直接贴近“真正的”平衡位置的区域（对于充分小的冲击，这区域可以充分小）．

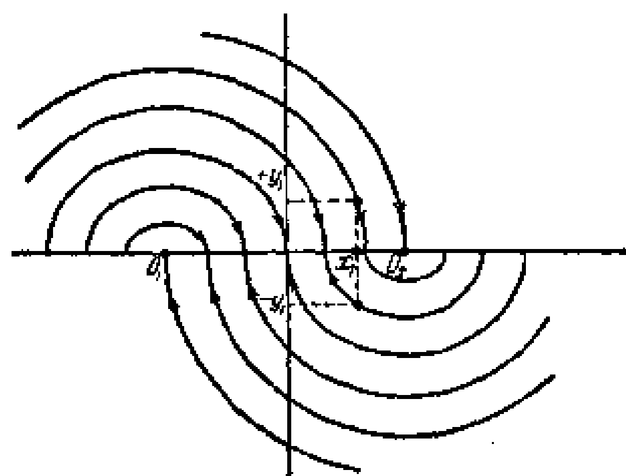


图 119

这些现象——有整个区域的平衡位置存在（所谓的“停滞区”）和系统受到冲击而向真正的平衡位置靠近——在所有的测量仪表及指示仪表中在一定程度上是可以看到的，其中运动系统受到干摩擦（例如，轴承的摩擦）的作用．在测量仪表中，停滞总是有害的现象，因此我们总是尽可能使轴承摩擦及其他干摩擦减小．很明显，“湿”摩擦不会有这种作用，因为“湿”摩擦只影响到运动系统的速度，而不影响其最终的位置．因此在测量及指示仪表中的某些

部件中,采用了一种非常巧妙的方法,把干摩擦“转化”为湿摩擦.这个方法在于:使轴沿轴承方向,向前和向后作常速运动.这时,轴与轴承间的摩擦力在旋转方向的分力与转速成正比(如果速度充分小),于是仪表就象具有湿摩擦,而不是具有干摩擦那样的系统在工作了.

§3. 具有⌐-特性曲线的电子管振荡器

上节中所采用的方法,当然,并不是专门适用于耗散系统的.当“摩擦力”虽然可以近似地用不连续的特性曲线来代替,但是不满足耗散条件时,上述方法仍然能够应用.我们现在就用这种方法——用几个线性方程并缝接初始条件以代替非线性方程——来研究两个不满足耗散条件的例子.这些例子具有很重要的意义;它们使我们能够开始研究非线性系统中的周期过程理论.作为第一个例子,我研究在屏路中有振荡回路及电感反馈的电子振荡器(图120).忽略栅流及屏极反应不计,并应用图中的符号,根据克希霍夫定律,我们可以对电子管振荡器中的振动,写出下列微分方程:

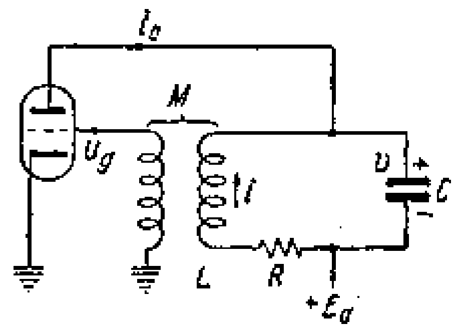


图 120

$$Ri = -v - L\frac{di}{dt}, \quad i = i_a + C\frac{dv}{dt}$$

或消去 v 后:

$$LC\frac{d^2i}{dt^2} + RC\frac{di}{dt} + i = i_a. \tag{3.15}$$

这里 $i_a = i_a(u_g)$ 是屏流,正象我们假设的,它只依赖于电子管的栅压:

$$u_g = -M\frac{di}{dt}. \tag{3.16}$$

设电子管的特性曲线 $i_a = i_a(u_g)$ 具有饱和电流(等于 I_s),上升段

的坡度很大，而且工作点就在特性曲线的上升段上．电子管的这种特性曲线如图 121 上的虚线所示．如果电子管栅压的振幅很大，使得屏流 i_a 在大部分时间内，或者等于零（电子管闭塞），或等于饱和电流 I_s，那末我们可以相当满意地利用理想的 ʃ-特性曲线，来表示这种电子管的性质，如图 121 中实线所示：

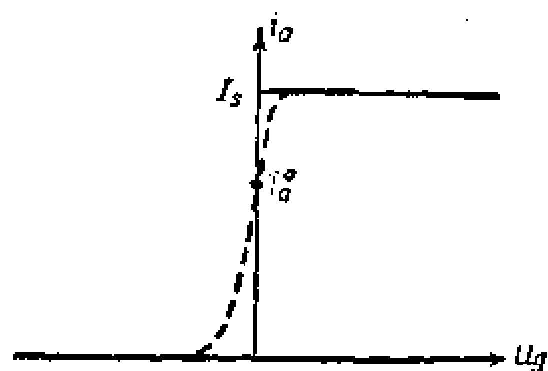


图 121

$$i_a = \begin{cases} 0 & \text{当 } u_g < 0, \\ I_s & \text{当 } u_g > 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

（我们将假定 $u_g = 0$ 时 $i_a = i_a^0$）．以后我们就会看到，当其他条件相同时，回路的阻尼越小，则栅压的振幅就越大．由此可得结论，电子管特性曲线的这种理想化（所谓 ʃ-特性曲线），在回路的阻尼充分小，而且反馈充分大的情况中，将会导出一些有一定实际意义的结果．

我们这样置放线圈，使得互感系数 $M < 0$（下面就会看到，在这一情况中，振荡器中将产生自振）；这时电子管振荡回路中电流的方程 (3.15) 可以化为

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = \begin{cases} 0 & \text{当 } \dot{x} < 0, \\ \omega_0^2 & \text{当 } \dot{x} > 0, \end{cases} \tag{3.18}$$

其中 $x = i/I_s$, $\omega_0^2 = 1/LC$ 及 $2h = R/L$．

方程 (3.18)（以及 (3.17)）有不连续的右端，因为当 $\dot{x}$ 或 u_g 通过零时，屏流作跳跃式的改变．因此，对于方程 (3.18)，我们还应该加以补充，以确定当 $\dot{x}$ 通过零时，系统是怎样运动的．根据物理上显然的要求：电路中的电压与电流应该是有界的，于是我们可以断言：x 与 $\dot{x}$ 是处处连续的，其中包括 $\dot{x} = 0$[1]．所以，象上一

1) 实际上，如果 x（或电流 i）跳跃地改变时，那末与 di/dt 成正比的电感电动势和栅压就会无限大．这是不可能的，因而 x 必须是时间的连续函数．同样地，电容器上的电压 v，也不可能有跳跃，因为否则，回路中的电压与电流都要无限大了．但是 $L di/dt = -v - Ri$，因此，由 v 与 i 的连续性，di/dt 也应连续．这个连续性条件，也可以利用将有连续特性曲线的电子管振荡器，作极限过渡，使之具有 ʃ-特性曲线的方法得到．

情况一样，我们可以研究两个服从不同微分方程的运动，并且将把下一次运动的初始条件和上一次运动所达到的最后状态“缝接”起来。

方程(3.18)的每一个决定一个衰减的“半次振动”(我们假设衰减很小)。这两个“半次振动”中只有一个，即 $dx/dt>0$ 的一个，是绕平移了的平衡位置而振动的。这“半次振动”的平衡位置平移了一个单位距离，而平移的方向，和固体摩擦情况中，相应的“半次振动”的平衡状态平移的方向正好相反。不难想象，当初偏离充分小且线性阻尼充分小时，这种情况将使振幅依次地增加，而不象干摩擦情况中那样是减小的。这种由两个“衰减的半个正弦波”(其中一个在纵轴方向平移了一个单位距离)所组成的增长的振动，如图 122 所示。

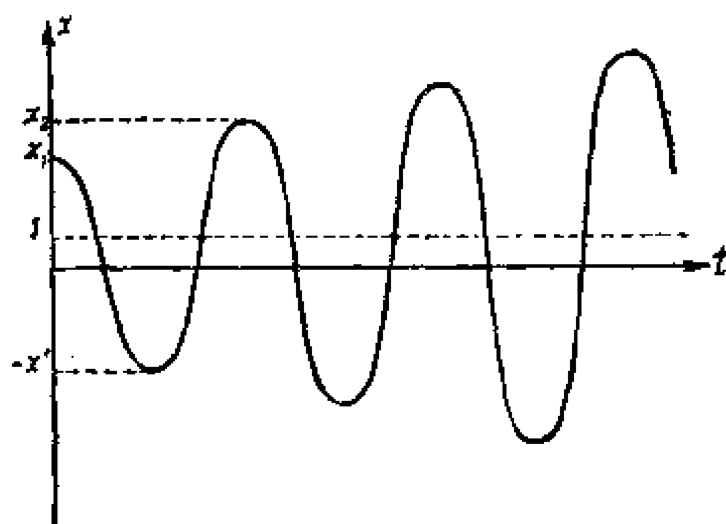


图 122

但是，也不难证实，振动的这种增长是不会无限地继续下去的，并且在系统中将建立起具有某一不变“振幅”的不衰减的振动，因为当振动的幅度很大时，振幅将是依次减小的。

在相平面 x, $y(y=\dot{x})$ 上对相轨线进行研究，我们可以看清楚电子管振荡器中的周期振荡的建立过程。我们不再假设振荡回路的电阻 R 充分地小(但是，在任何情况中，它应该保证 $h<\omega_0$)。很明显，在下半平面中 $(y<0)$，相轨线和线性阻尼振子(第一章 § 4)的相轨线(螺线)相重合，而在上半平面中 $(y>0)$，也和这种轨线

相重合，不过这时振子的平衡状态要平移到点 (1, 0). 这些"半圈"的螺线就构成整相轨线，它们是连续的曲线（我们刚才还分析过，x 与 $y = \dot{x}$ 都应该是时间的连续函数，并且，包括 $y = 0$ 的瞬时）. 唯一的平衡状态是点 $(x_0, 0)$，其中 $x_0 = i_a^0/I_s$[1]，显然它是不稳定的. 具有 J-特性曲线的电子管振荡器之相平面的一般形状如图 123 所示.

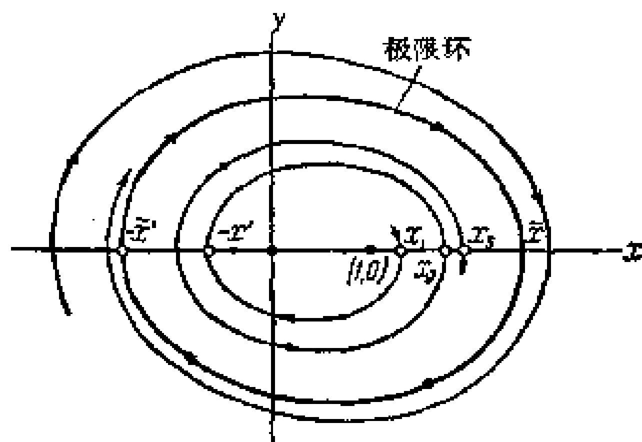


图 123

我们现在证明，在相平面上存在闭相轨线（所谓的极限环），而所有其他相轨线都渐近地（当 $t \to +\infty$）向它趋近（这正意味着，在所研究的电路中，对于任何的初始条件，都将建立起不衰减的周期振荡）. 为此，我们研究任意一条从 x 正半轴上的某点 x_1 出发，走向下半平面的相轨线（图 123）. 穿过下半平面后，它和 x 的负半轴相交（以 $-x'$ 表示这个交点的横坐标），进入上半平面，然后又回到 x 的正半轴上（和横轴第二次相交，这个点的横坐标以 x_2 表示之，显然 x_1, x' 与 $x_2 > 0$）.

我们来求出所研究的任意相轨线和 x 的正半轴的第一次与第二次相交交点之间的关系——即 x_1 与 x_2 之间的关系. 因为在下半面中这条轨线是有阻尼的振子的"半圈"螺线，振子的平衡状态在点 (0, 0)，故按 (1.31)

$$x' = x_1 e^{-\frac{d}{2}},$$

其中 $d = hT = 2\pi h/\sqrt{\omega_0^2 - h^2}$ 是振荡器回路阻尼的对数减缩. 在上半面中，这条轨线也是这样的"半圈"螺线，但是振子的平衡状态向右移了一个单位距离，亦即在点 (1, 0) 上. 因此，按同一个关系

1) 我们曾假设过，屏流是栅压的单值函数. 特别是，当 $u_g = 0$ 时，即在平衡状态上，$i_a = i_a^0$.

式，得到：

$$x_2 - 1 = (x' + 1)e^{-\frac{d}{2}}.$$

因为 $x' + 1$ 和 $x_2 - 1$ 是“半圈”的起点与终点到“平衡状态”(1, 0)的距离．消去 x'，得：

$$x_2 = 1 + e^{-\frac{d}{2}} + x_1 e^{-d}. \qquad (3.19)$$

这个函数，利用它就可以根据给定的、相轨线与 x 正半轴的交点来确定下一交点，称之为后继函数．这个函数决定某一个半直线（x 正半轴）对它自己的点变换，它建立起了这条半直线上的点 x_1 与 x_2 间的相互单值的、连续的对应．

这个点变换的不动点——变换到自身的点（即 $x_1 = x_2$ 的点），显然就是闭相轨线与 x 的正半轴的交点．以 $x_1 = \bar{x}$，$x_2 = \bar{x}$ 代入(3.19)，对于不动点我们得到：

$$\bar{x} = 1 + e^{-\frac{d}{2}} + \bar{x}e^{-d},$$

或者

$$\bar{x} = \frac{1 + e^{-\frac{d}{2}}}{1 - e^{-d}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{d}{2}}} > 1. \qquad (3.20)$$

这样，研究了后继函数(3.19)所表示的、通过相轨线而实现的 x 正半轴对其自身的点变换之后，我们证明了，在电子管振荡器的相平面上，有唯一的闭相轨线，它对应于振荡器中的不衰减的周期振荡．但是，为了能肯定这一不衰减的振荡实际上是能够产生的，并且我们所作的周期振荡存在的论断，具有物理意义，我们还应该回答两个问题．第一，在什么样的初始条件下，才能建立起我们求到的周期解；特别是，若 x 与 $\dot{x}$ 的初值充分小时，会不会建立起这种运动；第二，对于初始条件的任何微小改变，例如对于电流强度极大值的改变，已求到的周期运动是否稳定．研究了后继函数(3.19)的图形——所谓的“拉梅尔图”（图 124）以后，很容易回答这两个问题．显然，后继函数(3.19)的图形是一条直线，角系数为 $e^{-d}(0 < e^{-d} < 1)$，在纵轴上的正截距等于 $1 + e^{-d/2}$．按定义，不动点 $\bar{x}$ 应该在直线 $x_1 = x_2$ 上，因而，就是这条直线与后继函数图

的交点(由图 124 又一次地证明了不动点的存在性与唯一性).

任取一条不闭的相轨线，并研究它与半轴 $y=0,\ x>0$ 的交点的序列——点列 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots$ (图 123). 在这个点列中，每一个后继点都是按后继函数 (3.19) 由前一点所确定的，且利用图 124 所示的构造，可以根据所给的第一点 x_1，确定所有的后继点 $x_2,x_3,x_4,\cdots$. 在图 124 中构造了两个点列(所谓"拉梅尔梯线")，其中一个的初始点 $x_1'<\bar{x}$，另一个的 $x_1''>\bar{x}$. 从图 124 可以看到，两个序列的点 $x_1',\ x_2',\ x_3',\ \cdots$ 与 $x_1'',\ x_2'',\ x_3'',\ \cdots$ 都向不动点 $\bar{x}$ 趋近[1]. 这显然意味着，在闭相轨线以内的和以外的相轨线，都渐近地趋近于 (当 $t\to\infty$) 它. 这种所有相邻相轨线都趋近它的孤立闭相轨线，对应于系统中的周期运动，我们称为**极限环***.

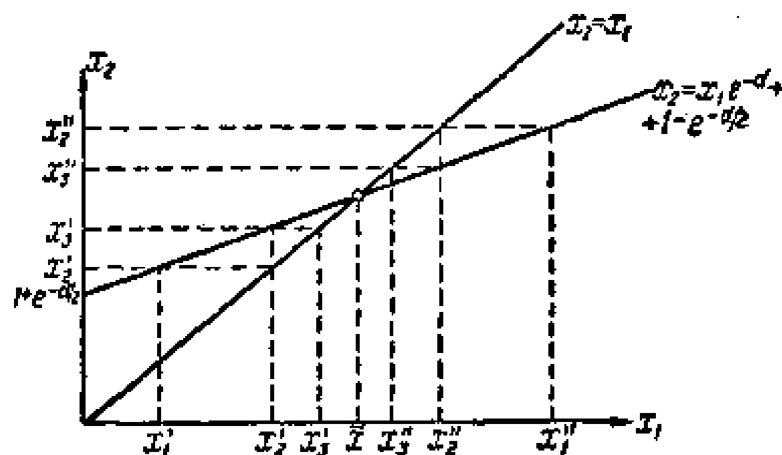


图 124

这样，所得的结果使我们能够立刻回答我们感兴趣的那两个问题. 实际上，第一，无论初始条件怎样，系统中都将建立起不衰

---

1) 不难用分析法证明，序列 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots$ 对于任意的 x_1 都以点变换的不动点 $\bar{x}$ 为极限点，亦即，对于任何 x_1，都有：当 $n\to\infty$，$x_n\to\bar{x}$. 实际上，不难看出，

$$x_n=\frac{1-e^{-(n-1)d}}{1-e^{-d/2}}+x_1e^{-(n-1)d},$$

因而，对于任意的 x_1，当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to 1/(1-e^{-d/2})=\bar{x}$. 从克尼格斯 (Königs) 定理也可以证明这个结果，定理详见第五章 § 7.

* 应该注意，这句话不是"极限环"的定义，而是"轨道稳定极限环"的定义. "孤立相轨线"我们称之为"极限环"——译者注.

减的振荡；第二，这个不衰减的振荡是稳定的[1]，因为，相对定态振荡的偏离（向两边）总是衰减的．这样，我们看到，在这个情况中，尽管有阻尼存在，由于存在着一个仅依赖于系统本身运动状态的力的作用，在系统中仍然建立起并维持着一个不衰减的振荡，并且振荡的"振幅"，决定于系统的性质，而不决定于初始条件．我们称这种振荡为**自振**，而这种可能发生自振的系统称之为**自振系统**[2]．

自振的振幅[3]，用无量纲的 x 表示时，等于

$$x^* = \frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{x}') = \frac{1}{2}\bar{x}(1 + e^{-\frac{d}{2}}) = \frac{1}{2}\frac{1 + e^{-\frac{d}{2}}}{1 - e^{-\frac{d}{2}}} = \frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{d}{4},$$

或用振荡回路中的电流表示时，等于

$$I = I_s \cdot x^* = \frac{I_s}{2}\operatorname{cth}\frac{d}{4}. \tag{3.21}$$

振荡回路的阻尼越小，则振幅越大，当 $d \ll 1$ 时，把 $e^{-d/2}$ 展为幂级数，并只取主要项，便得到振荡回路中电流的定态振幅的近似表达式：

$$I = \frac{2I_s}{d}.$$

在所研究的情况下，定态振荡的周期等于线性振子衰减振动的"周期"．但这只有在所研究的特殊情况中才正确．以后我们将看到，一般来说，自振的周期并不等于组成自振系统的线性回路的衰减振荡的"周期"．

维持回路中的不衰减振荡所必须的能量，是由屏路电池供给的．不难看到，补偿损失的能量，并不是在整个时间内都由屏路电池进入回路的，而只在每一周期的半个周期之内，也就是有屏流的

---

1) 可以很容易地证明，所研究的周期运动是按李亚普诺夫稳定的．正文中的讨论，只证明了所研究的运动是绝对轨道稳定的．以后我们对于非保守系统中的周期运动的稳定性，还要作详细的研究（见第五章 § 6）．

2) 在第五章中我们再给（对于一自由度的情况）"自振"与"自振系统"的概念以严格的数学定义．

3) 任一量之（周期）振动的振幅一词，我们将它理解为这个量的极大值与极小值的差的一半．

那半个周期内才进入回路(当然是在整个时间上,振荡回路中的能量都有消耗,因为回路具有常值电阻 R)[1]. 由于电池只在半个周期内供给电流,所以电池供给的平均功率的值为

$$W_A = \frac{I_s E_a}{2},$$

其中 E_a 是电池的电压. 因为作为时间函数的 i 是已知的,那末将 i 在前后两半个周期上的表达式代入积分 $\int Ri^2 dt$, 就可以计算振荡回路中产生的功率. 但是,我们下面就要证明,当阻尼充分小时,回路中的振荡是接近于正弦形的. 我们仅讨论这种情况,为了计算回路中消耗的功率,就可以假定振荡是正弦形的,而振幅为 $2I_s/d$. 而在这个情况中,可以充分精确地令回路上的交变电压 $V \approx I \cdot \omega L$, 于是每一周期内回路中消耗的平均功率

$$W = \frac{RI^2}{2} = \frac{RI}{2} \cdot \frac{2I_s}{d} = \frac{RII_s}{\frac{\pi R}{\omega L}} = \frac{I_s \omega L I}{\pi} = \frac{VI_s}{\pi},$$

最后,振荡器的效率

$$\eta = \frac{W}{W_A} = \frac{I_s V}{\pi} \cdot \frac{2}{I_s E_a} = \frac{2}{\pi} \frac{V}{E_a}.$$

很明显,回路上的交变电压 V 应该小于电池的屏路电压 E_a, 因为否则的话,在某些瞬时,屏压会降至零甚至为负,而这时电子管就不会象我们所假设那样工作了,在这种情况下,我们对特性曲线的理想化也就不适用了. 因此,在所作假设下,振荡器的效率不会超过 $2/\pi$, 亦即 64%[2]. 电池供给的其余部分的功率,不难想到,在电子管的屏极上以热的形式逸散掉了.

我们已经发现,在电子管振荡器中可能产生周期过程,现在更详细地研究它的特性. 为此,我们将周期过程中表示电流强度与时间的依赖关系的函数,展为富里埃级数. 特别地,这个展开式使

---

1) 当然,振荡回路中的电流等于零的那些瞬时应该除外.

2) 如果特性曲线上的工作点向左移,亦即,如果不是当栅压为零时,而是它取一某正值时,屏流才产生的话,振荡器的效率可以超过 64%.

我们有可能证明(我们已说到过)，当阻尼充分小时，所研究的周期过程将任意地接近于正弦形.

表示这个周期为 $T = 2\pi/\omega$ 的周期过程的函数 (图 125)，可以写为下列形状:

$$
\left.
\begin{aligned}
&x = 1 - \frac{1}{1 - e^{-\pi h/\omega}} e^{-ht} \frac{\cos(\omega t - \vartheta)}{\cos\vartheta} \quad 当\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{\omega}, \\
&x = -\frac{e^{\frac{\pi h}{\omega}}}{1 - e^{\frac{-\pi h}{\omega}}} e^{-ht} \frac{\cos(\omega t - \vartheta)}{\cos\vartheta} \quad 当\ \frac{\pi}{\omega} \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{\omega}, \\
&其中 \\
&\qquad \omega = +\sqrt{\omega_0^2 - h^2}, \quad \vartheta = \operatorname{arctg}\frac{h}{\omega}.
\end{aligned}
\right\} \quad (3.22)
$$

这里，积分常数是这样选定的. 它们保证了所得的周期解是连续可微的，亦即，$x(0) = x(2\pi/\omega) = -\bar{x}$，当 $t = \pi/\omega$ 时，对于两个表达式，都有 $x = \bar{x}$，$\dot{x}(0) = \dot{x}(\pi/\omega) = \dot{x}(2\pi/\omega) = 0$，并且当 $0 < t < \pi/\omega$ 时 $\dot{x} > 0$，而当 $\pi/\omega < t < 2\pi/\omega$ 时 $\dot{x} < 0$. 利用表达式(3.22)，可以按熟知的公式，把 $x(t)$ 展为富里埃级数. 但是，在所研究的情况中，展开式可以用完全不同的方法求得，而用不着预先知道 $x(t)$ 的分析表达式. 我们采用第二种方法，这个方法可给出一个简单的物理解释，计算的复杂程度亦将减少一些. 那就是说，我们可以按下面的方式进行讨论. 研究了相点在相平面上的性状之后，我们确信了，在从 0 到 π/ω 的时间内 ($x(0) < 0$, $\dot{x}(0) = 0$) 数量 $\dot{x} > 0$，而在从 π/ω 到 $2\pi/\omega$ 的时间内数量 $\dot{x} < 0$，等等. 这对于定态的与非定态的过程都成立. 如果是这样的话，我们就可以断言，方程(3.15) 中的函数 $i_a = i_a(u_g)$ 是时间的周期函数，周期为 T. 在我

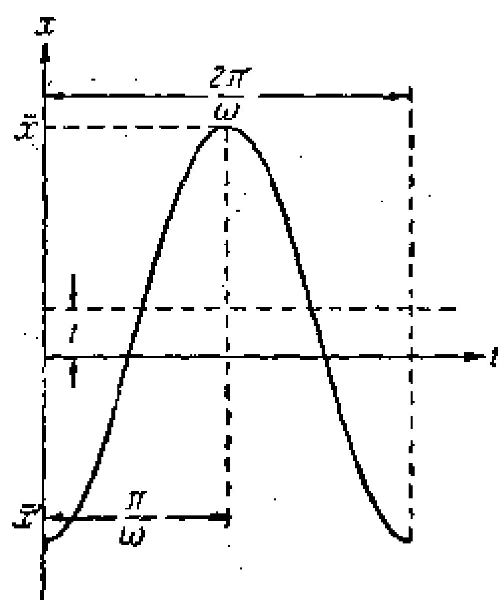


图 125

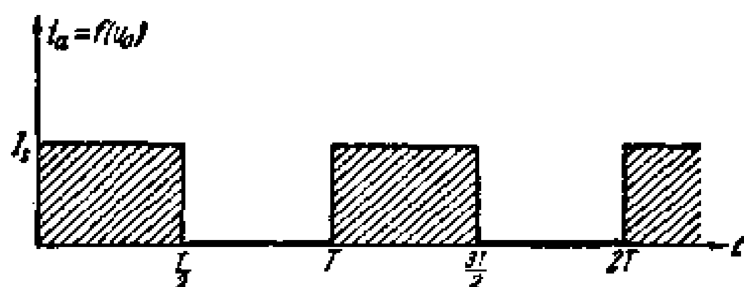


图 126

们所研究之 Ĵ-特性曲线的情况中，函数的形状是这样的，我们的断言可以单值地确定函数 $i_a=F(t)$ 在任何瞬时的值. 亦就是说，$i_a=F(t)$ 是一个矩形脉冲的周期序列（图 126），并且在 $u_g>0$ 的半个周期内 $i_a(u_g)=I_s$，而在另半个 $u_g<0$ 的周期内 $i_a(u_g)=0$. 换句话说，虽然 i_a 是 u_g 的函数，亦即，归根到底是振荡回路电流强度的函数，但是这个依赖关系仅具有这样的意思：函数 $F(t)$ 的周期决定于系统的性质，而形状（或者换一种说法表示这周期函数的富里埃级数各项的振幅）不依赖于系统中运动的特性. 因此在方程

$$\ddot{x}+2h\dot{x}+\omega_0^2x=\omega_0^2f_1(\dot{x}) \tag{3.23}$$

中，我们可以不把函数 $f_1(\dot{x})=i_a(-M\dot{x})/I_s=i_a(u_g)/I_s$ 看成是 $\dot{x}$ 的函数，而是某一个作用在线性振荡回路上的周期外力 $f(t)$，它是一个给定的时间函数，但是其频率不是任意的，而等于系统中的衰减振荡的“条件频率”（即频率 $\omega=\sqrt{\omega_0^2-h^2}$）. 系统的性质是这样的，系统能使“外力”适应于自已的周期，就好象是将力“劈”成几部分，而这些部分具有系统的周期一样. 这样，问题便化为研究外力对振动系统的作用了. 因此，在所研究的情况中，确定所研究的周期过程的主谐波和次谐波的振幅，和在受迫振动的问题中一样，如果干扰周期“外力” $f(t)$ 给定（在一个周期内）为下列形状：

$$f(t)=\begin{cases}1 & 当\ 0<t<\dfrac{\pi}{\omega},\\[2ex] 0 & 当\ \dfrac{\pi}{\omega}<t<\dfrac{2\pi}{\omega}.\end{cases}$$

把这个函数展开为富里埃级数：

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\omega t. \tag{3.24}$$

因为现在我们研究的是线性问题，迭加原理成立，那末，“受迫”振动的通解，可以当作级数(3.24)各项所引起的“受迫”振动之和来求得，亦即，求下列形状的“受迫”周期解：

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}(a_s\cos s\omega t+b_s\sin s\omega t). \tag{3.25}$$

在这个情况中

$$\dot{x}=\sum_{1}^{\infty}(-a_s s\omega\sin s\omega t+b_s s\omega\cos s\omega t),$$

$$\ddot{x}=\sum_{1}^{\infty}(-a_s s^2\omega^2\cos s\omega t-b_s s^2\omega^2\sin s\omega t).$$

把 x，$\dot{x}$ 与 $\ddot{x}$ 的值代入方程(3.23)，并令正弦与余弦的系数等于零，便求得，所有序号为偶的富里埃系数都等于零($a_0=1$ 除外)，而序号为奇的富里埃系数决定于方程：

$$-\omega^2s^2a_s+2h\omega sb_s+\omega_0^2a_s=0,$$

$$-\omega^2s^2b_s-2h\omega sa_s+\omega_0^2b_s=\frac{2\omega_0^2}{\pi s},$$

其中 $s=2k+1(k=0,1,2,\cdots)$.

解这些方程，就可以求出我们所须的序号为奇的富里埃系数：

$$a_{2k+1}=-\frac{2\omega_0^2}{\pi(2k+1)}\frac{2h\omega(2k+1)}{[\omega_0^2-\omega^2(2k+1)^2]^2+4h^2\omega^2(2k+1)^2},$$

$$b_{2k+1}=\frac{2\omega_0^2}{\pi(2k+1)}\frac{\omega_0^2-\omega^2(2k+1)^2}{[\omega_0^2-\omega^2(2k+1)^2]^2+4h^2\omega^2(2k+1)^2},$$

以及和它们对应的谐波之振幅的平方：

$$R_{2k+1}^2=a_{2k+1}^2+b_{2k+1}^2$$

$$=\frac{4\omega_0^4}{\pi^2(2k+1)^2}\frac{1}{[\omega_0^2-\omega^2(2k+1)^2]^2+4h^2\omega^2(2k+1)^2}. \tag{3.26}$$

周期函数 $x(t)$ 的非正弦性的量度，亦即，形状异于正弦形的程度的定量特征，以清晰系数 κ 表示之，它决定于表达式[1]

$$\kappa^2 = \frac{\sum_{s=2}^{\infty}(a_s^2 + b_s^2)}{a_1^2 + b_1^2}.$$

我们来估计 h 甚小时清晰系数的大小．公式(3.26)是把普通的线性共振理论，用于所研究之情况而得到的结果，外力的“共振”的主谐波产生 $x(t)$ 的主谐波，并且不难证明，主谐波振幅的平方 $a_1^2 + b_1^2$，当 $h \to 0$ 时将无限增大．外力展开式中的其余各项的频率都离共振甚远，因此对于它们所生的运动来说，我们所关心的富里埃系数的平方和，当 $h \to 0$ 时，趋向于有限大的正极限（这个极限就是非共振项在无阻尼谐振子中所起的作用）．

由此十分明显，对于充分小的 h，在具有 ʃ-特性曲线的振荡器中，周期运动有任意小的清晰系数，或者说，在此情况中，自振和正弦形是十分相近的．

在上述的讨论中，我们使用了一般共振理论的概念．

我们知道，由于共振现象，非正弦形性很大的外力，当存在线性阻尼时，能够维持谐振子中的振动，这些振动非常接近于（在周期很相近和清晰系数很小的意义下）系统固有的（因而是正弦形的）振动中的某一个振动．因此，我们可以说，当 h 甚小时，在具有 ʃ-特性曲线的振荡器问题中，我们得到了自共振，亦即，在系统本身运动所产生的力作用下的共振[2]．

应注意，在这里的特殊情况下，由于特性曲线的特殊性质，根据受迫振动的理论，我们不仅能够解决定态振动的问题，而且还能解决在任意初始条件下自振的建立过程的问题．

如果我们仍讨论同样的电子管电路，但是反馈是“反接”的，亦即使 $M > 0$，那末，就会得到和上节十分类似的结果．具有 ʃ-特性曲线的电子管的作用，此时（在振荡时）和相应的机械系统中的

---

1) 注意，在所研究的情况中，可以求出清晰系数的有限形式的精确表达式．

2) 以后我们还要阐述自共振的理论．

库仑摩擦等价．当然，这时不可能发生自振，振荡将是衰减的．

在我们所研究的系统中，周期过程，如果它存在（只有当 $M<0$ 时）的话，在任意的初始条件下都会建立起来，亦即，发生自振的自激．自振系统的这种状态称之为软状态，这和硬状态不同，在硬状态中，要建立起周期振荡，须要有限大的初冲击．换句话说，在硬状态中，自振系统既有稳定的周期运动又有稳定的平衡状态，并且系统中究竟建立起那种状态，这决定于给定的初始条件．

在具有 Ｊ-特性曲线的电子管振荡器中，状态的"软性"是因为电子管的特性曲线没有偏移的缘故，亦即，特性曲线的铅垂部分通过点 $u_g=0$．当电子管振荡器的特性曲线具有偏移时，就会得到硬状态．有偏移的 Ｊ-特性曲线可以满意地用作下述情况的理想化，这时：第一，栅极上的交变电压远超过电子管的饱和电压；第二，工作点或者偏移到电流的饱和段上，或者偏移到屏流等于零的点上．在 Ｊ-特性曲线有偏移的情况下，决定电子管振荡器的性状的方程的形状，和无偏移时的类似：

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}+2h\dot{x}+\omega_0^2x&=\omega_0^2 \quad 当\ \dot{x}>b,\\ \ddot{x}+2h\dot{x}+\omega_0^2x&=0 \quad\ \ 当\ \dot{x}<b,\end{aligned}\right\}\tag{3.27}$$

（和前面一样，我们假定阻尼很小），并且对有偏移的 Ｊ-特性曲线的情况（如图 127 所示），数量 $b>0$．两组方程的差别在于"方程更换"不是在 $\dot{x}=0$ 时，而是在 $\dot{x}=b$ 时．因此，应该改变我们所有的讨论，特别是，相平面上的图象（图 128）．相平面不是沿直线 $y=0$（即沿 x 轴，象无偏移情况那样），而是沿直线 $y=b$"切开"的，并且上半平面向右移一个单位距离．根据连续性，在这个情况中，亦必须存在一条由两根"半螺线"组成的闭轨线，所有其余的轨线，都趋向于这条闭轨线，阴影线区域以内的轨线除外．阴影线区的边界是由"极限螺线"和直线 $y=b$ 组成的．

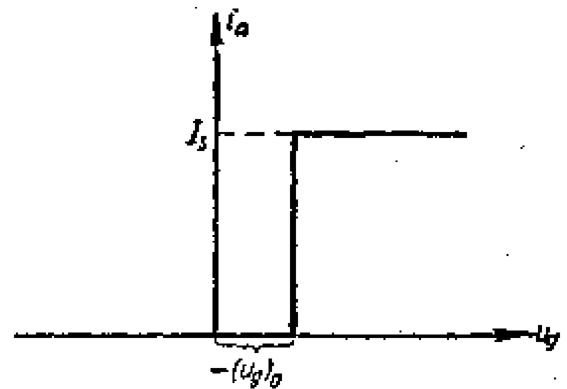


图 127

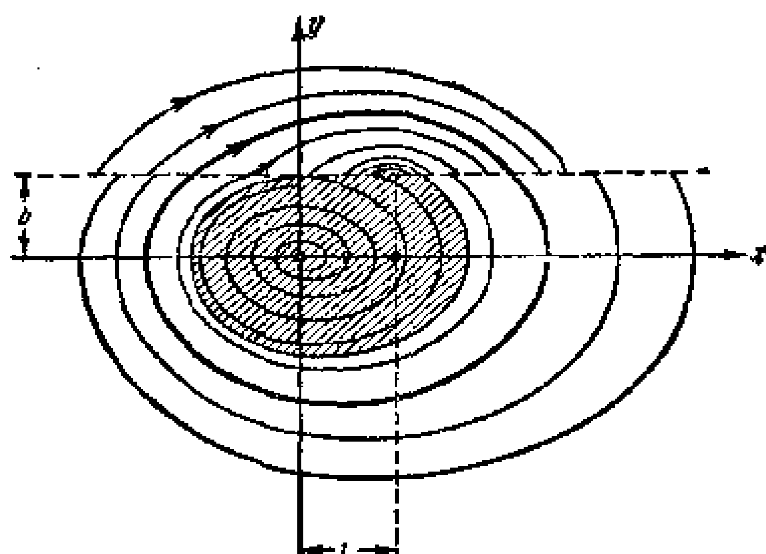


图 128

从这个区域内的初始状态出发的所有轨线都趋向于平衡状态，因而，这个平衡状态是稳定的(稳定的焦点). 根据相平面上的图象，绝对明显地可以得到结论：只有当初瞬时回路中的电流强度或电压充分大时，在振荡器中才能建立起周期过程[1].

§4. 钟表理论. 有碰撞的模型

大家知道，钟表是这样的振动系统，它能够产生的振动，有定态的不依赖于初始条件的振幅. 诚然，要使钟表走动，亦即，建立起这种定态的振幅，一般都须要一个足够大的初冲击，但是定态振动的振幅本身，却不依赖于初冲击的大小(换句话说，大多数的钟表中，都有自振的硬激状态). 如果初冲击太小，那末，周期过程一般是建立不起来的，振动将衰减掉. 这样的使系统趋向于平衡状态的，而不是趋向于周期运动状态的初值区的大小，在各种钟表中是不相同的，和钟表的构造有关，但是，一般地说，所有的钟表中都有. 我们将通过对钟表的一些尽可能地简单的钟表理想模型的研究，来阐释钟表机构的这些独特的性质.

1) 这个问题在下册第八章 § 4 中还要作更详细的研究.

任一个钟表机构大致可以分为三个主要部分：1）振动系统，如摆：摆、摆轮、水平摆等；2)发条机构——重锤、弹簧；3)将振动装置与发条机构联系起来的擒纵机构．这个联系是这样的：当振动系统(以后简称摆)在一定的位置时，擒纵机构起作用，并以发条机构的能量，给摆一个冲击．这个冲击持续的时间，在各种钟表中是不相同的，但是在好钟表机构中，常常是很短的．擒纵机构的作用一般是每周期两次，并且是在振动系统的平衡位置附近，即在系统速度最大的区域内动作的．所有钟表机构的构造大致就是这样的．对我们来说，在种表的构造中，最重要的是：擒纵机构开始作用的瞬时，完全决定于振动系统的位置(例如，每当摆通过平衡位置时，擒纵机械作用一次)．此外，作用的特性及冲击的大小也依赖于摆的状态．因此，在机构中所有可能产生的力，都只依赖于系统个别部件的位置与速度，而不明显地依赖于时间．这样，钟表是一个自治系统．

要对钟表机构的工作进行理论研究，正象在所有其他情况中一样，我们应该对钟表机构作某些简化的假设，这些假设，一方面使理论研究成为可能，同时又能反映钟表机构的基本性质．钟表的最简单的理论模型就是有碰撞的模型，在这一模型中，利用了关于钟表之擒纵机构给予振动系统瞬时碰撞作用的概念．在本节中，我们将研究钟表的这种“碰撞的”模型．就是说我们将假设，振动系统(摆轮、摆)在系统通过平衡位置的瞬时受到擒纵机构的瞬时碰撞，使得振动系统的速度有瞬时的增加．至于谈到碰撞时速度改变的规律，那末有两种最简单的假设可以采用．第一，可以假设，在碰撞时系统的速度总是增加同样的大小，而和碰撞前的速度无关．例如，令碰撞前速度是 v_0，碰撞后是 v_1．这时我们的假设相当于：$v_1 - v_0 =$ 常数或 $mv_1 - mv_0 =$ 常数；这样我们的假设亦可归结为：假设由擒纵机构传给振动系统的动量等于常量．另一个简单假设是，系统动能在碰撞时的改变同样大小而与碰撞前系统的速度无关．这个假设可归结为：$(mv_1^2/2) - (mv_0^2/2) =$ 常数．当然，我们的假设并没有包括了所有可能的碰撞类型，它们只是最

简单的假设．但是，在仔细地观察了钟表机构的构造后，我们就会发现一些情况，说明第二种假设更好些．那就是，对于重锤式发条机构，在钟表的每次碰撞中，重锤都下落相同的距离，即做相同的功，因此第二种假设是很自然的，因为振动系统每次得到相同的能量[1]．在第一种假设中，既然传给机构的能量和系统速度的关系甚大，我们就应该加上一个很不自然的假定：擒纵机构中的能量损失能够在很宽广的范围内变化，并且系统的速度越小，则擒纵机构中的能量损失越大*（因为碰撞前系统的速度越小，则在第一种假设下，碰撞时所获得的能量也越小）．但是，第一种假设（$mv_1-mv_0=$ 常数）虽由于这个理由，好象不很自然，但是终究并非不可能的，所以我们还是把两种假设都加以研究，并且，我们将证实，在某些情况中，它们将导出十分不同的结果．

除了关于碰撞特性的假设以外，还要对钟表机构中的阻力特性作一定的假设．这里我们也只限于研究两种最简单的假设，这些假设在其他情况中我们已经应用过了．第一，我们假设阻力的大小与速度成正比（“线性阻力”）；第二，阻力的大小与速度无关（“常值摩擦”）．这些假设也会导致大不相同的结果．

1. 受到线性阻力的钟表　我们先研究“线性阻力”且有常值碰撞动量的情况，并且将假定擒纵机构在每一周期中只作用一次（例如在由左向右通过平衡位置时发生碰撞）[2]．这种情况可以用类似于研究具有 J-特性曲线的电子管振荡器的方法来研究．实际上，如果系统衰减的对数减缩是 d（我们假定衰减很小），而系统在碰撞时获得的速度增量是 a，那末，当初速是 y_1 时（取刚碰撞后的瞬时为初瞬时），经过一个周期后的速度将是：

$$\left.\begin{aligned}&\text{在碰撞前的瞬时}\quad y'=y_1e^{-d},\\&\text{在碰撞后的瞬时}\quad y_2=y_1e^{-d}+a.\end{aligned}\right\}\qquad(3.28)$$

要使过程是周期的，必须有 $y_2=y_1=\bar{y}$，其中 $\bar{y}$ 是定态振幅．因此

1）在钟表理论中，通常都采取第二种假设．例如见［133］．

*“越大”应为“越小”——译者注．

2）例如，在天文钟的擒纵机构中，在每一周期内只碰撞一次．

$$\bar{y} = \frac{a}{1 - e^{-d}}.$$

定态振幅总是有限大的，而 a 和这个振幅比较起来，如果 d 越小则 a 也越小．利用对于电子管振荡器一样地讨论，可以证明，这个定态振幅是稳定的，并且当 y_1 甚小时，振动将增大起来．

直接从联系两个相继振幅的表达式(3.28)，也可以证实这一点；实际上，对于任意小的 y_1，后继振幅 y_2 必定大于 y_1．

因此，我们研究的这种钟表模型具有自激的性质：振动在任意小的初偏离下都会增长．这种情况的相平面的图象如图 129 所示．相平面上充满了螺线线段，它们的起点和终点都在 y 的上半轴上．沿螺线到达 y 的上半轴时，相点每次都要沿 y 轴向上跳一距离 a，然后再沿相应的螺线继续运动．根据连续性，显然由于跳跃，相点沿某一条螺线的运行将是封闭的，这就对应于周期运动．

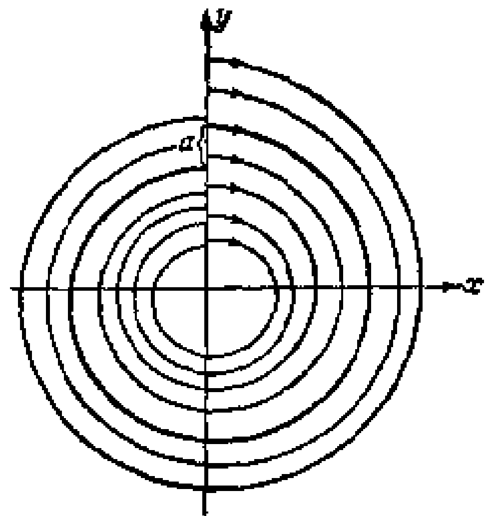


图 129

这样，在所作的假设下，我们获得了钟表机构所不可少的性质：存在振幅不依赖于初始条件的周期过程．但是我们的理想机构具有自激的能力；在任意小的初冲击下，钟表最后都将作不衰减的振动．可是对于真实的钟表，总是需要一个有限大小的初冲击，才能使钟表走动．这就是说，我们的假设还不能解释钟表机构的一个最典型的性质．保留线性阻力的假设，采用另一种碰撞规律，即假设

$$y_2^2 - y'^2 = h^2 = 常数,$$

我们仍然将得到同一结果．这时速度是：

在碰撞前的瞬时 $\quad y' = y_1 e^{-d}$,

在碰撞后的瞬时 $\quad y_2 = \sqrt{y'^2 + h^2} = \sqrt{y_1^2 e^{-2d} + h^2}$.

定态振幅 $\bar{y}$ 决定于条件

$$y_2 = y_1 = \bar{y} \text{ 及 } \bar{y}^2(1 - e^{-2d}) = h^2 \text{ 或 } \bar{y} = \frac{h}{\sqrt{1 - e^{-2d}}}.$$

在这情况中，很容易看出，也将发生自激。

相平面上的图象和前一情况比较，只有沿 y 轴跳跃的 a 的大小改变了，它已经不再是常数，而是 y'（即碰撞前的速度）的函数*：

$$a = \sqrt{y'^2 - h^2} - y'.$$

这意味着，随着前面速度的增大，速度的跳跃将减小。因为螺线的螺距，即对应 $x = 0$ 的两个相继 y 值之差，相反地是随 y 的增加而增加，那末，还是根据连续性的理由，很明显，应该存在这样的螺线，沿着它的运动是闭的。

对于擒纵机构每周期给振动系统两次（即每当系统通过平衡位置时）碰撞的情况[1]，可以作类似的讨论。当然，这时每一次的碰撞都是起推动作用——沿运动的方向的碰撞。这种情况的相平面的图象如图 130 所示。相轨线是由有阻尼振子的两个“半圈”螺线组成的，并且在 y 轴上有间断，它们对应于擒纵机构加给钟表振动系统的瞬时碰撞。

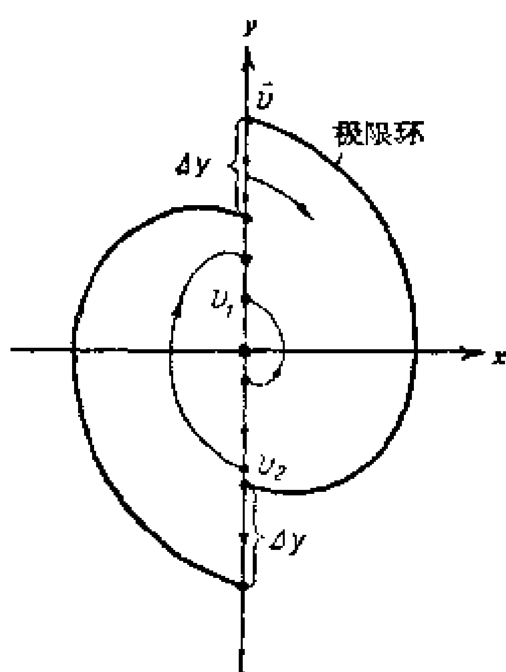


图 130

以 v 表示刚刚碰撞后钟表的振动系统之速度的大小（绝对值）。很明显，每次碰撞后的速度 v_2 都单值地决定于前一次碰撞后系统的速度 v_1（图 130）。对于前面所用过的两种关于碰撞规律的假设，我们得到下列的后继函数——联系 v_1 与 v_2 的函数，如果碰撞时振动系统获得一定的（永远是相同的）动量，亦即碰撞时 $\Delta(y) = a =$ 常数，这

* 根号下应为正号——译者注.

1) 在大多数擒纵机构中，特别是“摆轮擒纵”中（例如，手表中所应用的），每周期内有两次碰撞。

时，后继函数是：

$$v_2 = v_1 e^{-\frac{d}{2}} + a, \tag{3.29}$$

如果每次碰撞时系统的动能增加相同的数量 $\Delta(y^2) = h^2 =$ 常数，那末后继函数是

$$v_2^2 = v_1^2 e^{-d} + h^2. \tag{3.30}$$

在两种情况中，相应的点变换都有唯一的不动点，对于第一种碰撞规律的假设：

$$\bar{v} = \frac{a}{1 - e^{-d/2}},$$

对于第二种假设：

$$\bar{v} = \frac{h}{\sqrt{1 - e^{-d}}},$$

亦即，在两种情况中，都有唯一的周期运动，作出后继函数的图形不难证明，这个周期运动是稳定的，并且在任意初始条件下都能建立起来．后继函数的图形（拉梅尔图）的形状与图 124 类似；但在第二种情况中，图形最好对 v^2 作，而不是对 v 作．

所有我们研究过的具有线性阻力的模型，都能解释具有一定的、不依赖于初始条件之振幅的周期过程的存在性，但是它们都是软状态，亦即，这些情况都不能解释，为什么建立摆或摆轮的振动，需要有限大的初冲击．

为了解释钟表的这个性质，下面将看到，应该抛弃关于线性阻力的假设，并假定钟表是有干摩擦的自振系统．

2. 栅路中有振荡回路，并具有J-特性曲线的电子管振荡器 在钟表理论中，我们研究了可以使系统动量或动能瞬时改变的碰撞．产生碰撞的设备，能瞬时地给出一定部分能量，发出了无限大的功率．很自然地就会提出问题，在研究电振荡系统时，这样的理想化是否仍然适用．我们将阐明，在电系统中，也有类似的情况．例如，假设在栅路中有振荡回路的振荡器中（在以后的讨论中，我们照例将忽略屏极反应与栅流），建立了那么大的正弦振荡，使得栅压远远进入屏流等于零的区域，以及饱和区域．但是如果

回路中发生正弦振荡过程，那末栅极上的电压 v（图 131）每周期变号两次．当 v 沿正方向通过零时，屏流急速地（亦即，在比振荡周期 T 甚小的时间 τ 内）由零值过渡到值 I_s．在 τ 时间内，电感电动势 $M(di_a/dt)$ 很快地由原来的零值（当 $i_a=0$ 时）增加到某个很大的值，以后，当 i_a 等于 I_s 时，差不多同样迅速地又降为零．当 v 沿负方向通过零值时，屏流急速地由 I_s 变到零．这时电感电动势十分快地由零变到某个很大的（指绝对值）负值，以后又重新回到零值．于是，在这一情况中，回路中的电动势在短期内达到很大的值，并且当 v 增加时屏流由零变到 I_s 的速度越大，这个值也就越大．如果我们假定这一过渡是跳跃地（∫-特性曲线）发生的，那末我们就获得了瞬时的无限大电动势．不难看出，这和我们研究过的钟表情况，是完全类似的，在钟表情况中，在适当的时刻振动质量受到瞬时冲量的作用，同时就给予了这个质量一定的动量．

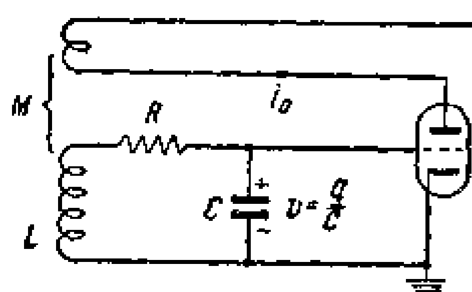


图 131

力学中，在充分小的时间 τ 内的非零的力 $f(t)$，可以当作瞬时碰撞来研究，它使动量 $m\dot{x}$（这里指的是最简单的直线运动）跳跃地改变一个 $\Delta(m\dot{x})=\int_t^{t+\tau}f(t)\,dt$，类似地可以假定，如果电感电动势 $\mathscr{E}=M(di_a/dt)$ 只在充分小的时间内不为零，那末，它将引起电感通量 $L\dot{q}$ 的迅速的、在极限情形（当 $\tau\to 0$）中为**跳跃式**的变化，变化的大小为：

$$\Delta(L\dot{q})=\int_t^{t+\tau}\mathscr{E}\,dt=\int_t^{t+\tau}M\frac{di_a}{dt}\,dt$$
$$=M[i_a(t+\tau)-i_a(t)]=M\Delta i_a,$$

其中 t 与 $t+\tau$ 是屏流 i_a 变化的开始与终了的时刻．电感通量跳跃时坐标 q（电容器的电量）本身并不改变，因而，跳跃（和力学中的碰撞一样）不破坏坐标变化的连续性．

为了证明所述的跳跃规律，只要把栅路中有振荡回路的电子管振荡器的方程（1.62）

$$LC\ddot{v}+RC\dot{v}+v=M\frac{di_a}{dt},$$

在屏流由 0 变到 I_s（或由 I_s 到 0）的、由 t 到 $t+\tau$ 的时间间隔上对时间进行积分就可以了．这时得到:

$$LC[\dot{v}(t+\tau)-\dot{v}(t)]+RC[v(t+\tau)-v(t)]$$
$$+\int_t^{t+\tau}v\,dt=\int_t^{t+\tau}M\frac{di_a}{dt}\,dt.$$

在向 J-特性曲线作极限过渡时，屏流发生变化时的那个栅压 v 的间隔将趋于零，即 $v(t+\tau)\to v(t)$，系统通过这一栅压间隔的时间 τ 也将趋于零．所以

$$\int_t^{t+\tau}v\,dt\to 0$$

及

$$LC[\dot{v}(t+\tau)-\dot{v}(t)]\to\int_t^{t+\tau}M\frac{di_a}{dt}\,dt=M\Delta i_a$$

或

$$\Delta(L\dot{q})\to M\Delta i_a.$$

当栅压沿正向通过零时（$q=0,\ \dot{q}>0$），$\Delta i_a=I_s$ 及 $\Delta(L\dot{q})=MI_s$．同样地，当 v 沿反向通过零时（$q=0,\ \dot{q}<0$），$\Delta(L\dot{q})=-MI_s$．不难看出，这时系统的性状决定于下列方程:

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{q}+2h\dot{q}+\omega_0^2q=0\quad(q\neq 0),\\&\Delta\dot{q}=\frac{M}{L}I_s\quad(q=0,\ \dot{q}>0),\\&\Delta\dot{q}=-\frac{M}{L}I_s\quad(q=0,\ \dot{q}<0),\end{aligned}\right\}\tag{3.31}$$

以及 q 应当连续变化的补充条件．于是，系统的任一运动的波形图，都将是由起点与终点都在时间轴上的“衰减正弦波”:

$$q=Ae^{-h(t-t_0)}\cos[\omega(t-t_0)+\varphi]$$

的弧段所组成的．在两个相邻的弧线的接合点（在 t 轴上）之间有一个差距，其值决定于跳跃条件．

对方程组(3.31)的研究，和我们以前对于钟表的研究，每周期有两次碰撞且碰撞给出的动量不变的情况，是完全类似的。

3. 具有库仑摩擦的钟表模型 为了解释钟表振动的硬激状态，我们研究具有库仑干摩擦的钟表的碰撞模型。我们已经研究过具有库仑摩擦的振子的运动(第三章 § 3)。适当地选择单位，可以把振子的运动方程写为：

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + x &= -f_0 \quad 当\ \dot{x} > 0, \\ \ddot{x} + x &= +f_0 \quad 当\ \dot{x} < 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

其中 f_0 是最大静摩擦除以振子弹簧的弹性系数。正象我们已见到过的，相平面上的相轨线是由半椭圆弧段组成的螺线，或者在现在的情况中(由于适当地选择了单位)，是由半圆弧段所组成的螺线；在上半平面中半圆的中心是点 $(-f_0, 0)$，而在下半平面中是点 $(+f_0, 0)$。

加上瞬时碰撞以后，我们便得到了具有库仑摩擦的钟表的碰撞模型。假设擒纵机构(表的摆轮)在每次振动中碰撞振动系统一次。为了讨论简单起见，我们把碰撞“移动”一些，即假定碰撞是在摆轮沿正方向通过点 $x = -f_0$ 时发生的，而不在通过点 $x = 0$ 时发生。

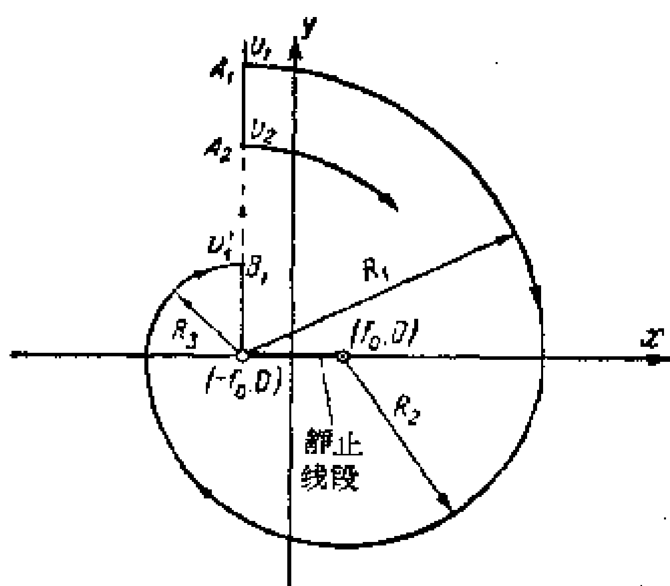


图 132

先研究碰撞规律的第一个假设：令

$$mv_1 - mv_0 = 常数,$$

或应用相平面上的符号，

$$\Delta y = a. \tag{3.33}$$

为了回答在这个情况中可能运动的特性的问题，我们先研究轨线在相平面上的特点，并求出在刚刚碰撞后的瞬时摆轮速度的后继函数。设在刚刚碰撞后的瞬时摆轮的速度为 v_1，表示其状态的 A_1 点的坐标为 $(-f_0, v_1)$。由此正如方

才所指出的，相点将沿一圆周运动，圆的中心是（$-f_0$, 0），半径 $R_1 = v_1$（图 132）．到达 x 正半轴时，相点或者落在由平衡状态组成的静止线段（$-f_0 \leqslant x \leqslant +f_0$, $y=0$）上（当 $R_1 \leqslant 2f_0$ 时就是这样的），或者（当 $R_1 = v_1 > 2f_0$ 时）将进入下半平面再沿中心在点（$+f_0$, 0）半径等于 $R_2 = R_1 - 2f_0 = v_1 - 2f_0$ 的半圆运动（无跳跃地）．如果 $R_2 \leqslant 2f_0$，那末相点还是要落在静止线段上（这次是由下而上的）．只有当 $R_2 > 2f_0$，即当 $v_1 > 4f_0$ 时，相点才进入上半平面，并将沿中心为点（$-f_0$, 0）而半径等于 $R_3 = R_2 - 2f_0 = v_1 - 4f_0$ 的四分之一圆周运动，直到到达"碰撞半直线"（$x = -f_0$, $y > 0$）上的纵坐标为

$$v_1' = v_1 - 4f_0 \tag{3.34}$$

的 B_1 点为止．在这个状态下，振动系统受到一个推动的瞬时碰撞，使其速度 y 瞬时地增加一个量 a，而相点跳跃地到达 $A_2(-f_0, v_2)$ 点，其中

$$v_2 = v_1' + a = v_1 - 4f_0 + a \quad (v_1 > 4f_0). \tag{3.35}$$

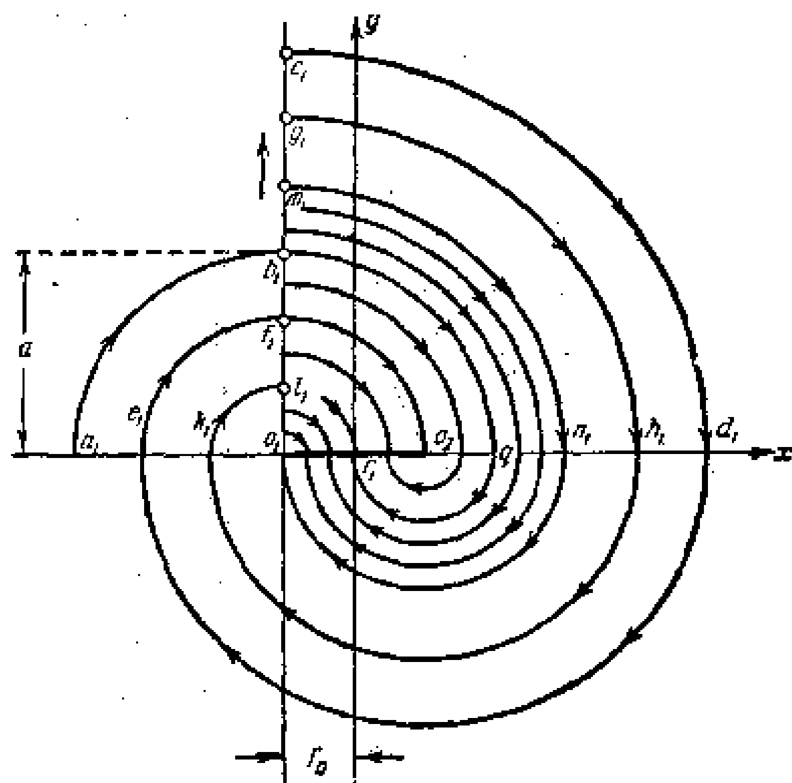


图 133

关系式 (3.35) 就是待求的后继函数，根据碰撞后给定的系统速度 $v_1(v_1 > 4f_0)$，这个函数决定了下一次刚刚碰撞后的瞬时速度 v_2. 很明显，碰撞后的速度序列 $v_1, v_2, v_3, v_4, \cdots$ 组成一个一般项为

$$v_n = v_1 + (n-1)(a-4f_0)$$

的算术级数. 不难看出，在我们的系统中，可能运动的特性依赖于 $a-4f_0$ 的符号.

情况 I. $a-4f_0<0$. 在这个情况中 (图 133)，无论初始条件怎样，系统的振动都将衰减，而相点在有限次数振动后就进入由原点向两边伸展 f_0 长的平衡状态线段.

情况 II. $a-4f_0>0$. 在这个情况中，相平面可以划分为运动特性不同的两个区域. 那就是，如果初瞬时相点在 a_1, b_1, c_1 的区域之内(图 134)，那末系统于有限时间内到达平衡状态线段，系统的振动就停止了. 如果初始条件所对应的点位于这个区域的外部或边界之上，那末系统的振动将无限地增长.

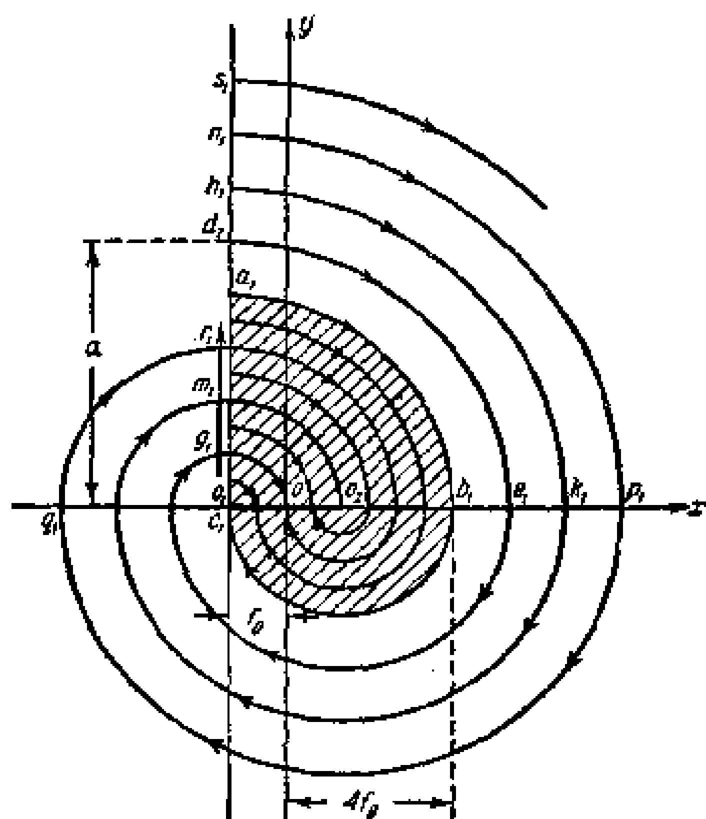


图 134

情况 III. $a-4f_0=0$. 在这个等式成立的理想情况中，相平面也可以划分为运动特性不同的两个区域. 如果初始条件位于区域 a_1, b_1, c_1 (图 135) 的内部，那末相点还没有转满一周就到达平衡状态线段. 如果初始值位于这个区域之外，那末所有运动都是周期的，其振幅决定于初始条件.

在最后一种情况中，我们又遇到了周期运动的连续统，即保守

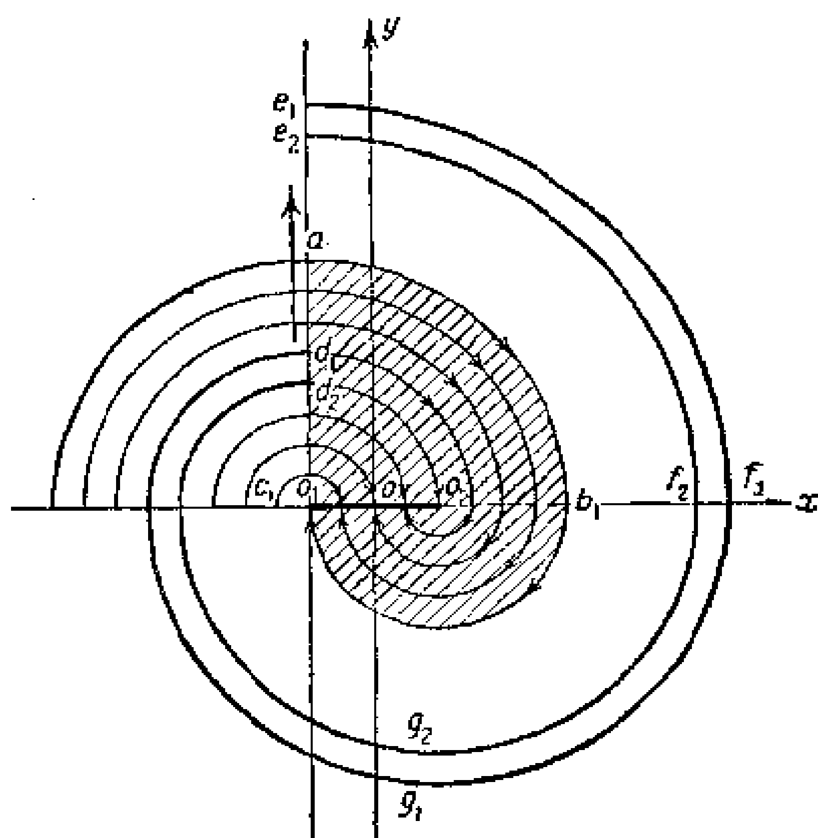


图 135

系统特有的情况，也象所有的保守系统一样，这个系统对于参数的微小改变是不稳定的．例如，只要稍微改变一下 f_0 的大小，就足以使系统转化为情况 I 或情况 II，亦即，得到有本质差别的图象．

于是，我们看到，这次我们所取的阻力规律与碰撞规律的理想化，没有反映出真实钟表的最本质的特点（这个特点就是：钟表中的周期运动具有不依赖于初始条件的完全确定的振幅）．但是，只要改变碰撞特性的假设，而保留关于摩擦力特性的假设，就可以重新获得能以一个完全确定的振幅作周期运动的系统．重新假设，擒纵机构碰撞时传给系统的动能的量是相等的，即设：

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \text{常数 或 } \Delta(y^2) = h^2, \tag{3.36}$$

其中 h 是大小决定于擒纵机构之构造的常数．

这时相平面上"跳跃"的大小 a 又不是常数了，它将依赖于碰撞前那一瞬时系统运动的速度．也就是说，根据表达式 (3.36)，

$a = \sqrt{y^2 + h^2} - y$,“跳跃”的大小按照双曲线的规律随碰撞前的速度 y 而减小．和前面一样，由于碰撞前的后继速度 v_1' 是由表达式(3.34)决定的，所以摆轮在碰撞后之速度的后继函数可以写为：

$$v_2^2 = (v_1 - 4f_0)^2 + h^2 \quad (v_1 > 4f_0) \tag{3.37}$$

(和前面一样，仅当 $v_1 > 4f_0$ 时相点转过一周后又回到“碰撞半直线” $x = -f_0$, $y > 0$ 上；而当 $v_1 \leqslant 4f_0$ 时，相点将落在静止线段上，摆轮不再振动)．后继函数(3.37)的图形如图 136 所示．它是一条由点 $v_1 = 4f_0$, $v_2 = h$ 开始而以 $v_2 = v_1 - 4f_0$ 为渐近线的双曲线．双曲线和直线 $v_1 = v_2$ 的交点，如果存在的话，就是不动点 $\bar{v}$，也就是周期运动在碰撞后的速度，显然这个点当

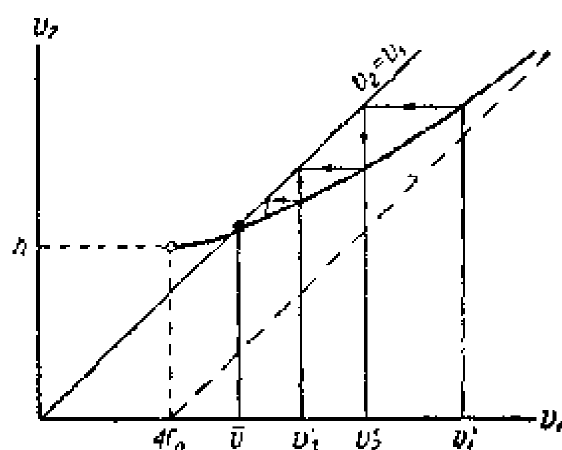


图 136

$$h > 4f_0 \tag{3.38}$$

时是存在的，并且只要存在也必定是唯一的．对于不动点有

$$\bar{v}^2 = (\bar{v} - 4f_0)^2 + h^2,$$

由此

$$\bar{v} = \frac{h^2}{8f_0} + 2f_0.$$

(显然，对不动点应该有 $\bar{v} > 4f_0$，而这当 $h > 4f_0$ 时是满足的)．摆轮周期振动的振幅*显然等于

$$\bar{x} = \bar{v} - f_0 = \frac{h^2}{8f_0} + f_0.$$

不难看出，条件(3.38)可以视为对发条机构的弹簧力或重锤的重量提出的要求．实际上，因为重锤在每次碰撞时下降的距离已由机构的结构给定了，那末重锤作的功在任何情况下都应该大于传给系统的能量．因此，f_0 越大，重锤的重量也应该越大，以使条件(3.38)得以满足．如果满足了条件(3.38)，那末系统中就可能有唯一的具有确定振幅的周期过程，它对应于相平面上的闭轨

* 这里的振幅仅是 x 轴上的“最大偏距”，如果按本书前面的定义，振幅将为 $h^2/8f_0$ ——译者注．

线，此闭轨线是由三段圆弧和 y 轴上长度为 a 的线段所组成的．即便是利用作出"拉梅尔梯线"（图 136）或用克尼格斯定理（见第五章 § 7），亦能证明，这一不动点 $\bar{v}$ 是**稳定的**，因而，相邻的运动都趋向于求出的周期运动．

由此亦能知道，极限周期运动是按李亚普诺夫稳定的．从相平面上所得的图象（图 137）可以证明，在所作的假设（常值库仑摩擦与碰撞时能量的增量为常数）下，系统具有钟表机构的那些最有特点的两种性质：1）存在唯一的周期过程（有确定的振幅），2）为了建立这一过程，必须有有限大的初冲击（或初偏离）．不难看出，第二个性质是由系统中存在常值摩擦所引起的，常值摩擦越

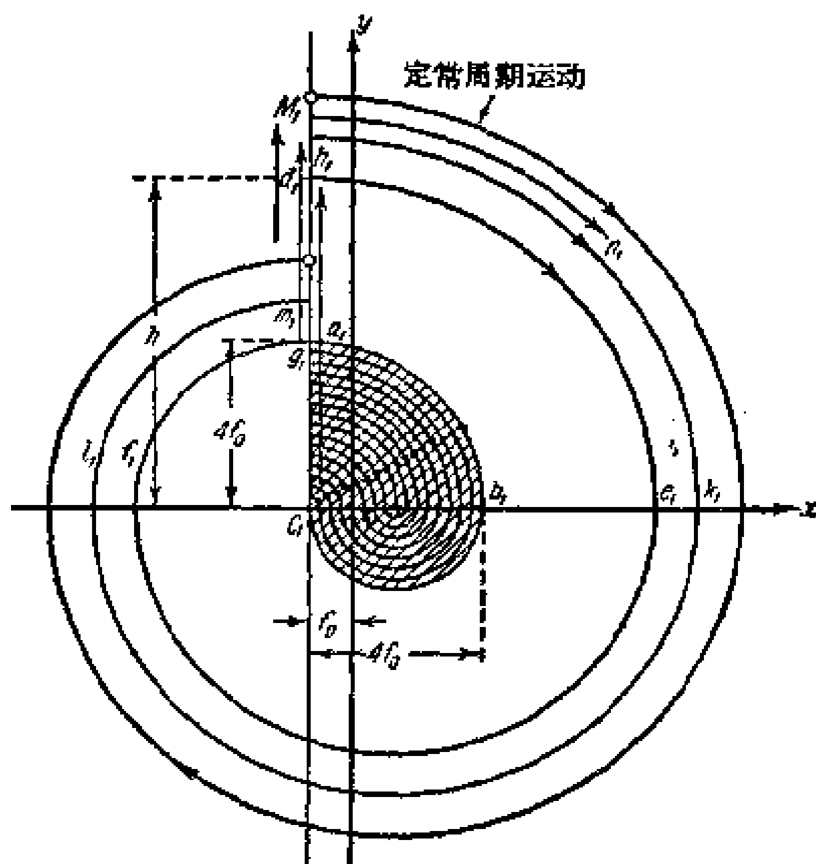


图 137

大，则初偏离会衰减掉的区域也越大，而且为了使钟表走动的初冲击也应该越大．钟表中的常值摩擦总是不可避免的，因为在运动中钟摆应该使擒纵机构发生作用，所以在任何结构中，必须克服有

有限值的静摩擦，为此摆亦应该具有一些能量．这样，钟表的第二个典型的性质(必须有充分大的初冲击)和钟表的构造原理有着紧密的联系．钟表具有这种性质的构造特点，首先可以用钟表中有常值摩擦的假设来概括．当然，这种关于常值摩擦的假设，和所有的理想化一样，不能包括系统的全部性质，而只能反映这个系统最突出的特点．也就是说，当系统中存在阻力，而且无论运动速度多小，摩擦力总将保持有限的值时，就可以作这种常值摩擦的假设．如果对于充分小的速度，摩擦力也是任意地小，那末用"线性阻力"来反映系统的性质就更好些．当然，在钟表中两种阻力都有；用第一种理想化可以较好地反映擒纵机构中的阻力；而对摆运动时的空气阻力，则应采用第二种理想化．但是，考虑空气阻力，即引入线性阻力，并不能带来任何新的现象，仅仅须要把相平面上的圆弧用螺线线段来代替而已．常值摩擦和全新的性质(振动不是自激的，为了建立周期过程必须有初冲击，亦即，存在着自振的硬激状态)有着密切的连系．

研究每次振动有两次推动碰撞(当 $x=-f_0$, $y>0$ 及 $x=f_0$, $y<0$ 时)的钟表模型，我们将获得同样的结果．在这一情况中，假设摆轮在每次碰撞时获得同样的动量 ($\Delta(y)=a=$ 常数)，也不能反映钟表的基本性质——系统中存在着稳定的周期振动．如果假设在每次碰撞时，摆轮的动能增加一定的、总是相同的量，即在碰撞时 $\Delta(y^2)=h^2=$ 常数，那末，对于碰撞后的速度，得到后继函数

$$v_2^2=(v_1-2f_0)^2+h^2,$$

其中 v_1 与 v_2 分别表示摆轮碰撞后的给定速度和它的后继速度(这里的 v_1 与 v_2 应理解为速度的绝对值)．

换句话说，每周期有两次碰撞的模型和有一次碰撞的模型的情况是一样的，只是摩擦减小了一半；当 $h>2f_0$ 时，存在着唯一的稳定周期运动，对于碰撞后的任何速度 $v_1>2f_0$ 都会产生；如果 $v_1\leqslant 2f_0$，则系统将到达一个平衡状态．对于每周期有两次碰撞的钟表模型，当假设碰撞规律是由关系式 (3.36) 决定的，并且 $h>2f_0$

时，相平面上的图象如图 138 所示：不连续的闭曲线 $abcda$ 是稳定的（不连续的）极限环，它对应于钟表的振动系统（摆轮、摆）的周期自振.

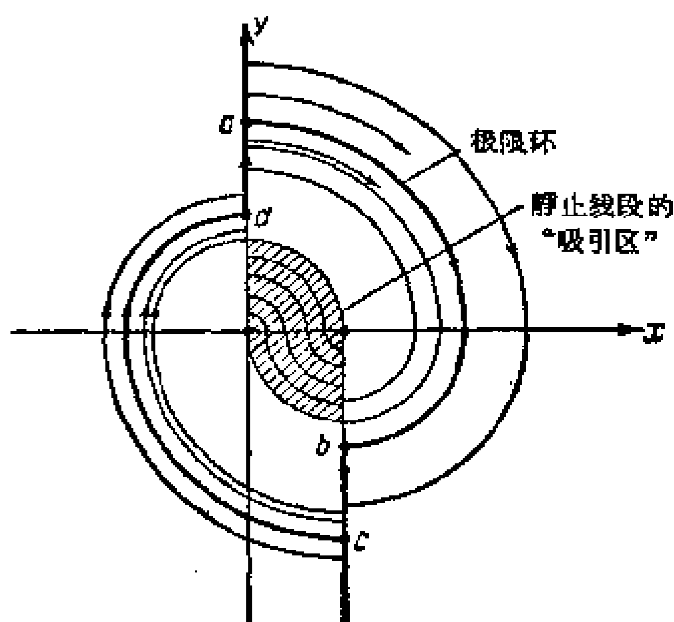


图 138

研究了关于阻力规律和碰撞特性的各种假设以后，我们所得到的全部结论，都可以从简单的能量观点加以解释. 这时应注意到，有线性阻力时，每周期内消耗的能量和振幅的平方成正比，而在常值摩擦中消耗的能量则是振幅的线性函数. 另一方面，在按 $v_1 - v_0 =$ 常数的规律碰撞时，每周期内系统的能量增加为

$$\frac{m}{2}(v_0 + \Delta v_0)^2 - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}(2v_0\Delta v_0 + \Delta v_0^2),$$

亦即（因为 $\Delta v_0 =$ 常数），是振幅的线性函数. 当按 $(mv_1^2/2) - (mv_0^2/2) =$ 常数的规律碰撞时，系统的能量每个周期内的增加是常数值. 这样，我们得到的主要结果立刻变得非常显然了. 只有当系统能量在一个周期以后仍然具有周期之初的大小的条件下，才可能发生周期过程. 我们看一看在我们曾研究过的各种情况中，这个条件是否满足. 在第一种情况中（"线性阻力"与按规律 $v_1 - v_0 =$ 常数的碰撞），能量的损失与振幅的平方成正比地增加，而供给系统的能量是振幅的线性函数. 很明显，只有对于某个确定的振幅，能量才能平衡，并且只有存在一个定态振幅（图 139）. 在第二种情况中（线性阻力与按规律 $mv_1^2/2 - mv_0^2/2 =$ 常数的碰撞），损失与振幅的平方成正比而供给的能量是常数. 这时也只有一个使能量平衡的定态振幅（图 140）. 在第三种情况中（常值摩

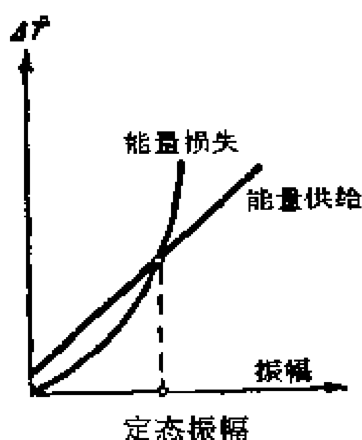


图 139

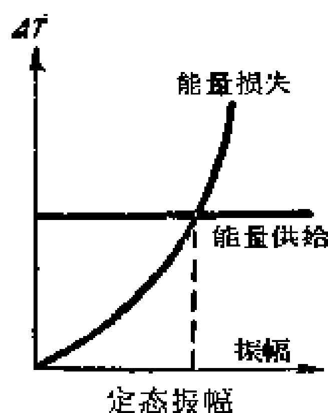


图 140

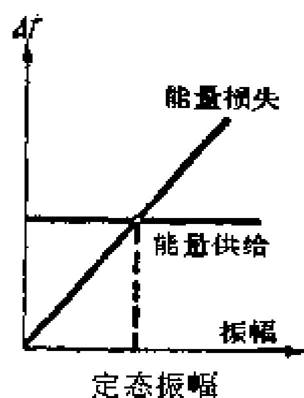


图 141

擦与按规律 $v_1 - v_0 =$ 常数的碰撞）损失与供给的能量都是振幅的线性函数．因此，要么就没有定态振幅，要么有无限多个定态振幅．

最后，在第四种情况中（常数摩擦与规律按 $mv_1^2/2 - mv_0^2/2 =$ 常数的碰撞），能量的损失是振幅的线性函数，而供给的能量是常数值，因此，也只可能有一个定态振幅，使得能量能够平衡（图 141）．

§5. 钟表理论．“带后退擒纵”的无碰撞模型[1]

在上一节中，我们研究了几个钟表机构的最简单的碰撞模型，利用这些模型，我们可以解释钟表的某些基本性质：存在着唯一的周期运动，并且激励这一振动必须有有限大的初冲击，亦即，系统有硬状态（后者要求在钟表的振动系统中计入干摩擦）．可是这些模型很粗糙，不能反映钟表机构的极重要的定量特性，特别是不能解释钟表振动周期和发条机构的力或力矩以及和阻力的依赖关系[2]．

1）本节是 H. A. 热列佐夫所写的．

2）发条机构的力以及摩擦力，是钟表中变化最大的参数．例如，发条的弹力随着弹簧的松放而减小，而摩擦力显著地依赖于钟表的安放方式．这就会使钟表振动的周期有某些变化．而在我们研究过的具有库仑摩擦力的钟表的碰撞模型中，最满意的模型所阐明自振的，其周期既不依赖于碰撞力（即发条机构的力），也不依赖于摩擦力．

为了获得钟表运行的数量关系，即钟表周期和参数间的依赖关系(这是阐释某些条件,例如何时周期和参数的关系最小而钟表运行的安定性最大，所不可少的)，需要更细致地研究钟表的动力学,并考虑某些类型钟表机构(包括其中的擒纵机构)[1]的主要的特性. 在一定的简化假设下,我们下面研究有所谓的"带后退擒纵"[2]的钟表动力学. 这种擒纵的示意图如图124所示. 棘轮通过齿轮组和发条机构联接,棘轮的棘齿和擒爪的末端(爪尖)接触,擒爪和钟表摆轮或摆位于同一轴上. 这样,发条机构通过擒纵机构(通过棘轮与擒爪)产生某一力矩 M，作用于摆轮上,其大小依赖于棘轮与擒爪的相应位置. 图 142a 表示了擒爪的中间位置 ($\varphi=0$)，这时棘轮的齿 A_1 和擒爪的右爪尖 $П_1$ 接触，使摆轮作逆时针向的旋转 (我们即取这个方向为 φ 的正向). 摆轮的这一加速转动，一直到摆轮转过某一 φ_0 角 (图 142，б) 并且齿 A_1 与爪尖 $П_1$ 脱离时才停止 (角 $2\varphi_0$ 称为摆轮的"上升角"). 齿 A_1 与爪尖 $П_1$ 脱离后，摆轮继续沿 φ 的正向转动,而棘轮脱离摆轮后,便进入迅速的加速运动(棘轮的惯性矩越小,则加速度越大). 这时使齿 A_2 与擒爪的左爪尖 $П_2$ 相迎而行[3],并且经某一微小的时间，齿 A_2 通过 $П_2$ 给摆轮

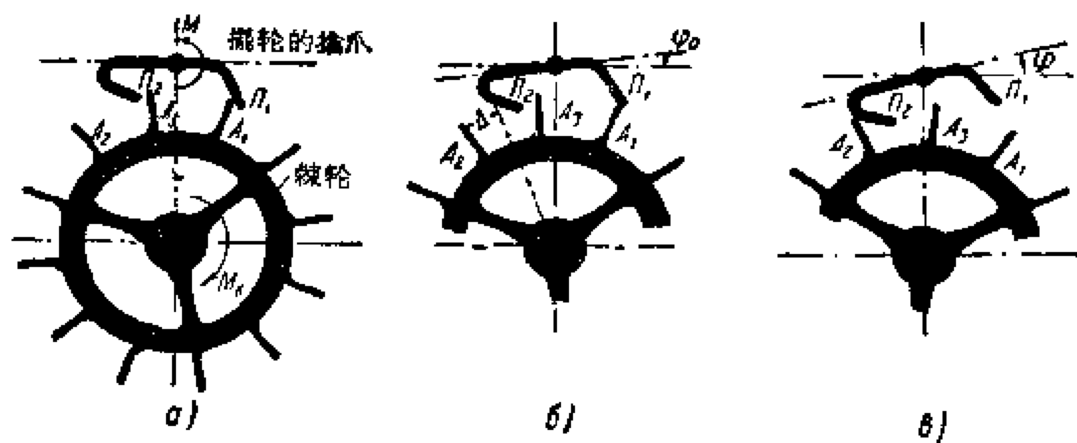


图 142

1) 近几年来，H. H. 鲍京 (Баутин) 的工作[22–25,27,28]，对钟表动力学的发展有很大的贡献.

2) 这种擒纵有时还称为"带钩的"，在挂钟和闹钟等里都有应用. 在动力学上这种擒纵和用在最早的钟表(包括惠更斯钟)的结构中的"枢轴式"擒纵很相似.

3) 这就是所谓"棘轮的下跌",图 142，б 中的 Δ 角称棘轮的下跌角.

一个迎面的碰撞．在齿 A_2 与爪尖 Π_2 接触上以后，棘轮就给擒爪轴一个负力矩，阻碍摆轮沿正方向的运动．但由于惯性，摆轮还会沿正方向转过某一角度，强迫棘轮"后退"（由此得擒纵的名称）只有在这以后，由于棘轮通过爪尖 Π_2 作用的力矩，才开始沿反方向运动（图 142，$в$）．摆轮通过中间位置（$\varphi=0$），当它到达 $\varphi=-\varphi_0$ 时，齿 A_2 与爪尖 Π_2 脱离．"棘轮降落"后，齿 A_3 与爪尖 Π_1 接触，摆轮沿负向的运动受阻，然后又开始沿正向运动（$\dot{\varphi}>0$）等．这样棘轮在摆轮的每一次振动中推动它两次，作某一正功以补偿振动系统中由于摩擦而生的能量损失．

研究具有这种擒纵机构之钟表的动力学，是相当困难的[16,22]．因此为了使问题简化，假设棘轮的惯性矩 I_k 等于零[1]，我们就得到单自由度的钟表模型．在这种假设下，每次轮齿和爪尖脱离后，"棘轮的下跌"是瞬时的，且这时总有一个爪尖，或是右边的 Π_1，或是左边的 Π_2，和棘轮的某一齿相接触．

正象我们看到的，擒纵机构的运动是这样的，当 $\varphi\leqslant-\varphi_0$ 时，棘轮齿只和右爪尖 Π_1 接触，当 $\varphi\geqslant+\varphi_0$ 时，只和左爪尖 Π_2 接触，而当 $-\varphi_0<\varphi<+\varphi_0$ 时，可以和任何一个爪尖接触．当棘轮齿和爪尖 Π_1 接触时，棘轮对摆轮轴作用的力矩 M 大于零，当和爪尖 Π_2 接触时 $M<0$．因此棘轮加给摆轮轴的力矩 $M=M(\varphi)$ 是摆轮转角 φ 在区间 $-\varphi_0<\varphi<+\varphi_0$ 上的双值函数（$M>0$ 还是 $M<0$，和那一个爪尖与棘轮齿接触有关）．

这就对所研究的钟表动力学系统之相面的特性，加上了某些限制．实际上，我们不能取普通的以 φ 与 $\dot{\varphi}$ 为笛卡儿坐标的平面[2]作为相面，因为在其上，给定 $(\varphi,\dot{\varphi})$（其中 $-\varphi_0<\varphi<\varphi_0$），并不能单值地确定作用在系统上的力，因而也不能单值地确定系统的状态．由于力矩 M 和 φ 的依赖关系具有双值性，可以用两个相

1）如果对摆轮轴求出棘轮（连同发条机构和整个轮系一齐）的等效惯性矩，那末，在很多钟表机构中，它仅占摆轮惯性矩 I 的一个不大的百分比．对于这种钟表，我们的假设：$I_k=0$，将能给出相当满意的结果．

2）由于构造的原因，转角受到限制的情况，我们将不予以考虑，因而我们将假定，φ 角可取任意值．

互重迭的半平面：(*I*) $\varphi < \varphi_0$ 及 (*II*) $\varphi > -\varphi_0$，所组成的"有重迭"的平面作为相面（图 143）. 第一个半平面对应于棘轮齿和右爪尖 Π_1 接触，第二个对应于和左爪尖 Π_2 接触. 这种双叶相面上的点，和系统的状态间的对应，已经是相互单值的了. 显然，当 $\varphi = +\varphi_0$ 时，相点从叶 (*I*) 过渡到叶 (*II*)，而当 $\varphi = -\varphi_0$ 时，则相反[1]. 当相点由一叶过渡到另一叶时，当然横坐标是保持不变的. 尽管在棘轮"下跌"终了时，爪尖受到迎面来的棘轮齿的碰撞，由于我们假设了棘轮的惯矩 I_k 等于零，所以纵坐标 $\dot{\varphi}$（摆轮的速度）也保持不变[2].

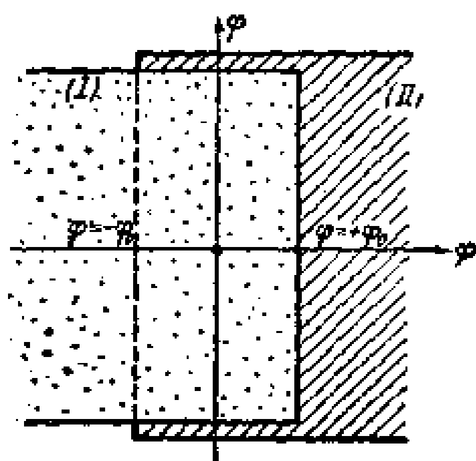


图 143

为了进一步简化我们对钟表模型动力学的研究，对作用在摆轮上的力，再作如下的假设. 第一，假设擒纵机构加在摆轮上的力矩 M 的绝对值是常量，亦即，当棘轮齿和爪尖 Π_1 接触时，$M = +M_0$，而和爪尖 Π_2 接触时，$M = -M_0$（图 144）[3]. 第二，摩擦力是库仑摩擦（最大静摩擦力矩表之以 f_0，我们假定它不依赖于摆轮的转角）[4].

---

1) 这里以及后面，"叶"我们将理解为组成双叶相面（所研究之钟表模型的"有重迭的"相面）的半平面 (*I*) 及 (*II*).

2) 相点由一叶到另一叶的过渡，对应于：棘轮和摆轮的脱离、它的"下跌"（转过角度 Δ）以及相应爪尖的迎面相撞. 由于我们假设了棘轮的惯性矩等于零，不难证明，棘轮就没有任何动量矩，因而当棘轮齿碰撞爪尖时（为简单起见假设碰撞是完全非弹性的），将不会改变摆轮的速度 $\dot{\varphi}$.

实际上，令 $\dot{\psi}_0$ 与 $\dot{\psi}$ 分别表示棘轮在轮齿脱离爪尖时及碰撞另一爪尖前的速度，显然（暂时假设棘轮惯性矩 I_k 很小，但不等于零），$I_k(\dot{\psi}^2 - \dot{\psi}_0^2)/2 = M_k \Delta$，其中 M_k 是发条机构加在轮轴上的力矩（设为常数）. 碰撞前棘轮的动量矩等于 $G = I_k\dot{\psi} = I_k\sqrt{\dot{\psi}_0^2 + (2M_k \cdot \Delta / I_k)}$，并且当 $I_k \to 0$ 时趋向于零，尽管有 $\dot{\psi} \to \infty$.

3) $M = M(\varphi)$ 在爪尖与棘轮齿接触时的依赖形式，决定于爪尖的断面形状，特别地，可以选择爪尖断面形状，使得 M 为常数.

4) 钟表的振动系统中有两个地方产生干摩擦：摆轮的轴承上，以及棘轮齿在某一擒爪上滑动中. 后者在大多数钟表中是主要的，显然，对给定的摩擦系数，它是和轮齿对爪尖的压力成正比的，亦即，与发条机构的力成正比的.

以分析过的具有“带后退擒纵”的钟表的动力学模型为根据，下面我们研究两种钟表机构．其中一种的摆轮没有“固有周期”（摆轮的重心位于转轴上，且没有安装任何使它回到中间位置 $\varphi=0$ 的弹簧），我们已经看到过，这种钟表机构运行的安定性是不好的，因此，只有在振动周期不须要很大安定性的情况中，才能应用（例如，在自动摄影设备，闹钟的发音装置等里面都有应用）[16,25,67]．

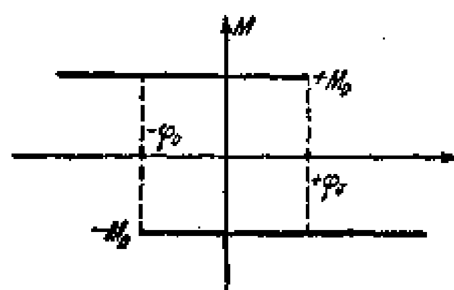


图 144

第二种钟表机构的摆轮是有“固有周期”的（有弹簧的摆轮或者摆），当擒纵脱离后，它可以作衰减振动，这种型式具有很好的运行安定性，在许多钟表结构中，都有应用（主要是挂钟）[1]．

1. 摆轮无“固有周期”的钟表模型 这种摆轮无“固有周期”的钟表模型的动力学方程，显然可以写为：

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2}=f\left(\varphi,\ \frac{d\varphi}{dt}\right)+M(\varphi),$$

其中 I 是摆轮的惯性矩，$M=M(\varphi)$ 是擒纵机构加给摆轮轴的力矩，而 $f(\varphi,\ d\varphi/dt)$ 是库仑摩擦力矩．当摆轮运动时（$d\varphi/dt\neq 0$）

$$f\left(\varphi,\ \frac{d\varphi}{dt}\right)=-f_0\operatorname{sgn}\frac{d\varphi}{dt},$$

而运动方程的形式为

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-f_0\operatorname{sgn}\frac{d\varphi}{dt}\pm M_0 \tag{3.39}$$

（棘轮齿与爪尖 Π_1 接触时取正号，与爪尖 Π_2 接触时取负号）．

引入新的无变量：

$$x=\frac{\varphi}{\varphi_0},\quad t_{新}=+\sqrt{\frac{M_0}{I\cdot\varphi_0}}\,t; \tag{3.40}$$

1）第一种钟表机构的动力学和早期的所谓的“伽利略前期”的无摆钟的动力学相似．第二种则接近于惠更斯钟的动力学[128]．

于是方程(3.39)化为下列形式:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= y,\\ \dot{y} &= -F\operatorname{sgn} y-(-1)^n\end{aligned}\right\}(y\neq 0),\qquad(3.41)$$

其中

$$F=\frac{f_0}{M_0},$$

n 是和棘轮齿接触的爪尖的号数（字母上的点号表示对新的无量纲时间的微分）.

在 $M_0\leqslant f_0$（亦即 $F\geqslant 1$）且振子不动（$y=0$）的情况下，擒纵机构的力矩不能克服于摩擦力，因此 $\dot{y}=0$（亦即 $d^2\varphi/dt^2=0$），而任何状态 $(x,0)$ 都是平衡状态. 这时不可能有任何的周期运动，任何运动到后来都将使系统到达某一个平衡状态.

因此下面我们将假设 $M_0>f_0$，或假设 $F<1$ 亦是一样. 不难看出，在这个情况中，系统没有平衡状态.

为了在叶 (I) ($x<+1$，右爪尖 Π_1 和棘轮的齿接触，并且 $M=+M_0$) 上作出相轨线，以方程(3.41)的第一式除第二式，得下列方程*:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-F\operatorname{sgn} y}{y}$$

积分后在下半叶 $(y<0)$ 上

$$\frac{y^2}{2}-(1+F)x=\text{常数},\qquad(3.42\text{a})$$

而在上半叶 $(y>0)$ 上

$$\frac{y^2}{2}-(1-F)x=\text{常数}.\qquad(3.42\text{b})$$

这样，在叶 (I) 上的相轨线是由抛物线(3.42a)与(3.42b)的弧线组成的，同时在下半叶上相点向左运动，因为 $\dot{x}=y<0$，而在上半叶上，向右运动(图 145). 在叶 (I) 上，全部的相轨线都走向边界: 半直线 $x=+1$, $y>0$**.

* 因为 Π_1 和棘轮的齿接触，所以式(3.41)中的 $n=1$——译者注.

** 原书为"$y<0$"——译者注.

叶 (II) 上的相轨线和叶 (I) 上的轨线(相对于坐标原点)对称，因为只要把叶 (I) 上的轨线方程 (3.41) 中的变量 x, y 换为 $-x$, $-y$, 就可以得到叶 (II) $(x > -1)$ 上的轨线方程. 为了说明摆轮之可能运动的特性，引入两条半直线: $(v)x = -1$, $y = -v < 0$ 与 $(v')x = +1$, $y = v' > 0$, 再来研究它们和任一相轨线的交点序列——序列 v, v_1, v_2, v_3, $\cdots$, (图 146)[1]. 设相点在点 $(-1, -v)$ 由叶 (II) 过渡到叶 (I) 上. 于是相点将沿抛物线 (3.42a) 到达横坐标上的点 $(-\xi, 0)$, 并且，很明显，ξ 决定于方程

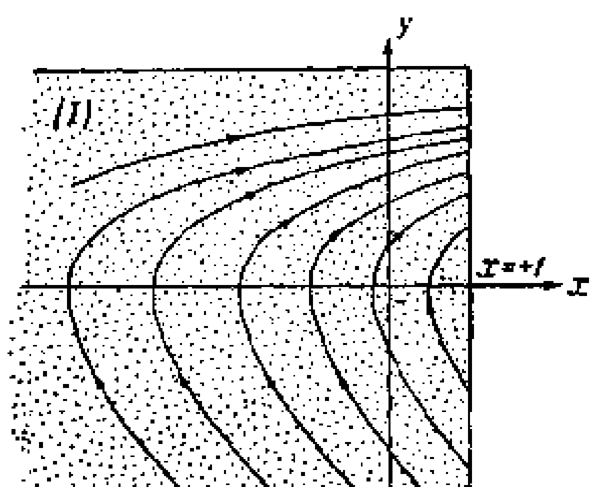


图 145

$$\frac{v^2}{2}+(1+F)=(1+F)\xi,$$

或

$$v^2=2(1+F)(\xi-1). \tag{3.43a}$$

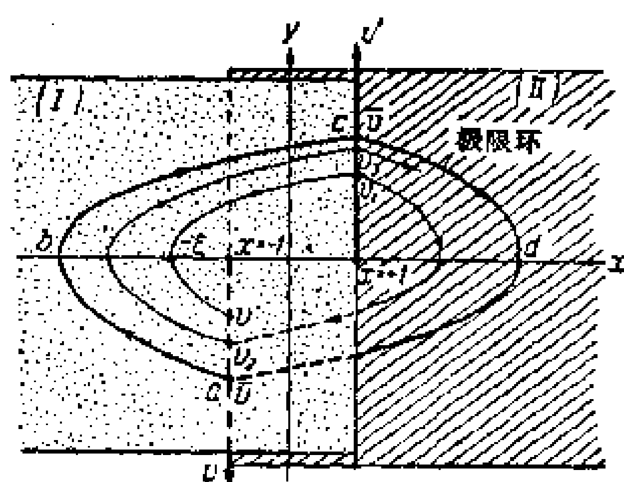


图 146

以后相点就在叶 (I) 的上半面上运动，最后在边界(半直线 (v')) 上的点 $(+1, v_1)$ 走出叶 (I), 其中 $v_1 > 0$ 决定于关系式

$$(1-F)\xi=\frac{v_1^2}{2}-(1-F),$$

或

$$v_1^2=2(1-F)(\xi+1). \tag{3.43b}$$

---

1) 显然，这些半直线上的点，对应于棘轮齿停止和一个爪尖接触而开始与另一个爪尖接触时的状态，v 与 v' 是摆轮在这种状态下的速度的绝对值.

这样，叶 (I) 上的相轨线使半直线 (v) 与 (v') 上的点间建立起某一个单值连续的对应，换句话说，构成了一个由后继函数 (3.43a) 与 (3.43b) 表示出的、半直线 (v) 对半直线 (v') 的点变换（我们得到的后继函数具有参数形式，参数为 ξ——摆轮的最大偏离）[1]. 其后，相点过渡到叶 (II) 上，沿着相应的相轨线(和 (I) 上的对称)运动，最后重新回到半直线 (v) 上的一点 $(-1, -v_2)$. 根据上面指出的叶 (I) 和叶 (II) 上的相轨线的对称性，利用关系式 (2.43a) 及 (2.43b) 所表达的同一个后继函数，可以由 v_1 来确定 v_2. 换句话说，半直线 (v') 对半直线 (v) 的点变换，和半直线 (v) 对半直线 (v') 的点变换是等同的；所以我们下面将只研究统一的半直线 (v) 与 (v') 彼此间的点变换.

因而，对于摆轮的任一运动，在摆轮的（接触爪尖更换之瞬时的）速度序列 $v, v_1, v_2, v_3, \cdots$ 中，每一个后继速度，都可以用我们求得的后继函数，由前一速度求出. 这就使我们有可能研究任选的一条相轨线的行程. 点变换的**不动点** $\bar{v}$，亦即，$v = v_1 = \bar{v}$ 的点，显然对应于**对称的极限环**，不动点正是极限环和半直线 (v) 或 (v') 的交点. 对于不动点有：

$$(1 + F)(\xi - 1) = (1 - F)(\xi + 1),$$

由此，摆轮自振的振幅

$$\xi = \frac{1}{F} \tag{3.44}$$

且

$$\bar{v}^2 = 2\frac{1 - F^2}{F}. \tag{3.45}$$

为了阐明求得的极限环的稳定性，我们在同一个图上作出曲线 $v = v(\xi)$ 与 $v_1 = v_1(\xi)$（如果沿纵坐标轴不取 v 与 v_1 而取 v^2 与 v_1^2，那末就可得出图 147 所示的两条直线）. 它们的交点就是点

1) 当然，在所研究的情况中，不难消去参数 ξ，于是我们就得到写成显式的后继函数. 但是，我们不准备消去 ξ，以便用这一简单例子，指出如何利用参数形式的后继函数来进行研究. 还应指出，在许多问题中，很难得到后继函数的显式，但求出其参数形式却比较容易(见下册第八章).

变换的不动点．给定任意的 v（在图 147 中，为确定起见取 $v>\bar{v}$）；根据直线（3.43a）确定 ξ，再根据直线（3.43b）确定 v_1；然后由 v_1（作为点变换的一个新的出发点）求出 ξ_1 及 v_2，依此类推．所作的"拉梅尔梯线"收敛于不动点，因为直线 $v^2=2(1+F)(\xi-1)$ 要比 $v_1^2=2(1-F)(\xi+1)$ 来得陡些，亦即，对于任意的 $v>\bar{v}$，序列 $v, v_1, v_2, v_3, \cdots$ 都收敛于 $\bar{v}$．同样地，当 $v<\bar{v}$ 时也收敛于 $\bar{v}$．这就证明了求得的钟表摆轮的唯一周期运动是稳定的，并且证明了，周期运动在任意的初始条件下都能建立起来．

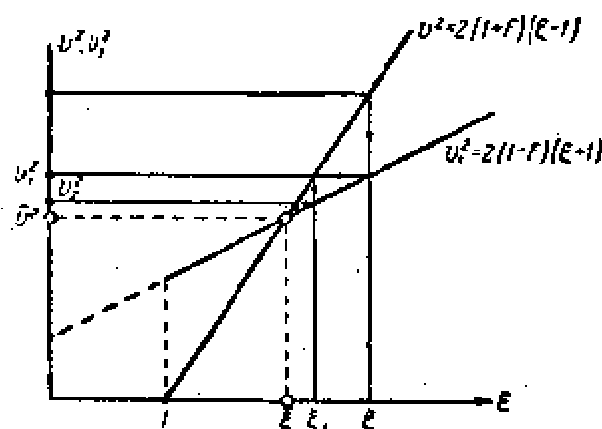


图 147

摆轮的自振振幅由公式（3.44）给出，或者用普通的角度单位可表示为

$$\bar{\varphi}=\varphi_0\bar{\xi}=\varphi_0\frac{M_0}{f_0}.$$

要计算自振的周期，应注意以下情况：极限环（表示在图 146 上）是由抛物线的四段弧线组成的，在每一段上摆轮的加速度 $\ddot{y}$ 都是常数．在抛物线弧 ab 上加速度 $\ddot{y}=1+F$，因而相点走过极限环的这段弧线所需的时间等于

$$\tau_1=\frac{\bar{v}}{1+F};$$

类似地，在弧 bc 上，$\ddot{y}=1-F$，而走的时间等于

$$\tau_2=\frac{\bar{v}}{1-F}.$$

因此自振的周期（用无量纲的时间单位表示）等于

$$\tau=2(\tau_1+\tau_2)=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{F(1-F^2)}},\tag{3.46}$$

或用普通单位表示

$$T = 4\sqrt{\frac{2\varphi_0 I}{M_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{F(1-F^2)}}. \tag{3.47}$$

我们看到，摆轮自振的周期不仅依赖于发条机构的力，它还依赖于摩擦力．发条机构的力与擒纵机构产生的力矩 M_0 成正比．但是它又和棘轮齿对摆轮擒爪尖的压力成正比，因而（在一定的精确程度上）也和摆轮上的干摩擦力矩（即 f_0）成正比．因此，在同样的精确程度上，我们可以认为系数 F，以及自振振幅 ξ 或 φ，不依赖于发条机构的力，而主要地决定于棘轮齿与爪尖间的摩擦系数．自振周期依赖于 M_0 与 F（T 对 M_0 及 F 的依赖关系见图 148 与 149）．当发条机构的力和摩擦系数变化时，钟表运行的安定性可用量

$$S_M = \frac{1}{\frac{M_0}{T}\left|\frac{\partial T}{\partial M_0}\right|_{F=\text{常数}}}, \quad S_f = \frac{1}{\frac{F}{T}\left|\frac{\partial T}{\partial F}\right|_{M_0=\text{常数}}},$$

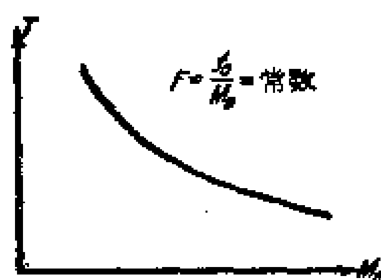


图 148

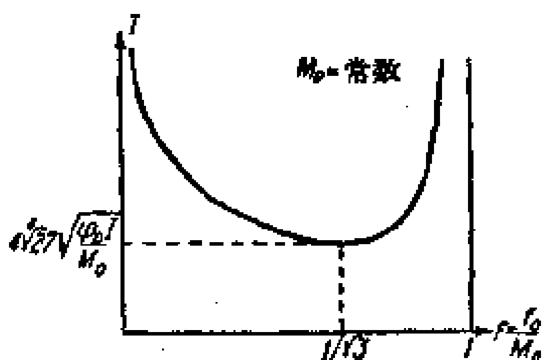


图 149

作为它的数量量度，这两个量可表明，自振周期的相对变化比钟表的某个参数的相对变化小多少倍．根据公式（3.47）不难算出，

$$S_M = 2 \text{ 及 } S_f = 2\frac{1-F^2}{|1-3F^2|}. \tag{3.48}$$

摩擦系数变化时，当 $F = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，钟表运行得到最优的安定性（$S_f = \infty$，或 $\partial T/\partial F = 0$），但是发条机构的力变化时，运行的安定性总是不大的（$S_M = 2$）．

2. 摆轮有"固有周期"的钟表模型 现在我们研究另一种钟表模型，其摆轮上除了摩擦力和擒纵机构的作用力以外，还有把它"拉"向中间位置的力（钟表的振动系统，或者是有弹簧的摆轮，或者是摆，它们都有"固有周期"，亦即，在脱离擒纵机构后它们能够振动）。

这种钟表的振动系统的运动方程可以写为

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2}+k\varphi=f\left(\varphi,\ \frac{d\varphi}{dt}\right)+M(\varphi),$$

其中全部的符号都和前一小节中含意相同，而 $k\varphi$ 是摆轮弹簧的力矩[1]。如果引入新变量

$$x=\frac{\varphi}{\varphi_0},\quad t_{新}=\omega_0 t=\sqrt{\frac{k}{I}}\,t$$

及无量纲参数

$$\lambda=\frac{M_0}{k\varphi_0}\ 及\ r=\frac{f_0}{k\varphi_0},$$

对运动着的摆轮（$d\varphi/dt\neq 0$），可将这个方程写为下列两个一阶微分方程所组成的方程组：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=-x-r\operatorname{sgn}y-\lambda(-1)^n,\end{aligned}\right\}\tag{3.49}$$

其中象以前一样，n 是和棘轮齿接触的爪尖的标号，字母上的点号表示对新时间的微分（显然，象以前一样，双叶相平面的叶（I）对应于右爪尖 Π_1 和棘轮齿的接触，也就是半平面 $x<+1$，而叶（II）对应于左爪尖 Π_2 的接触——半平面 $x>-1$）。

研究叶（I）上的相轨线（和前面一样，叶（II）上的相轨线仍对称于（相对坐标原点）叶（I）上的相轨线）。先求平衡状态。由于我们考虑的是库仑干摩擦力，任一状态，只要振子在那里不动（$d\varphi/dt=0$ 或 $y=0$），且弹簧力矩与擒纵机构力矩之和不超过最大静摩擦力矩，亦即有

1）对于有摆的钟表，当摆离开铅垂中间位置之偏角甚小时（在钟表中总是这样的），当然这个方程亦是正确的。

$$|M_0 - k\varphi| < f_0 \text{ 或 } |x - \lambda| < r$$

时，这个状态就是平衡状态。显然，根据参数取值的不同，可能有三种情况：a) 如果 $\lambda + r \leqslant 1$，那末在叶 (I) 上有平衡状态线段 ($y = 0$, $\lambda - r \leqslant x \leqslant \lambda + r$)——静止线段 $O_1^+O_1^-$（图 150）；b) 如果 $\lambda + r > 1$，但 $\lambda - r \leqslant 1$，那末线段 ($y = 0$, $\lambda - r \leqslant x \leqslant 1$) 上的点是平衡状态；最后 c) 如 $\lambda - r > 1$，平衡状态不存在（在后一情况中，点 $O_1^+(\lambda - r, 0)$ 与点 $O_1^-(\lambda + r, 0)$ 都在半平面 (I) 之外）。

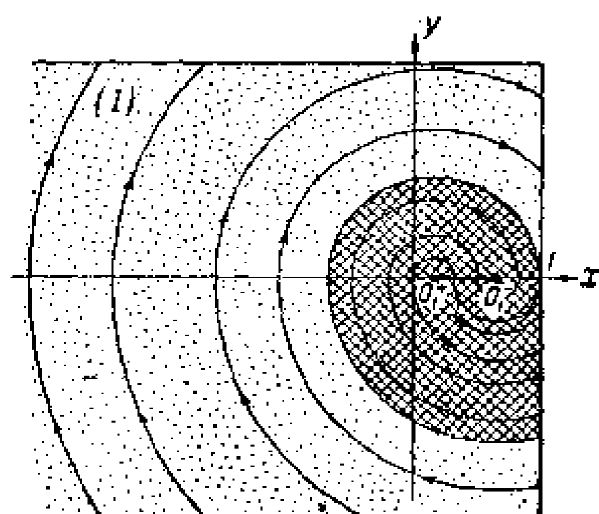


图 150

在叶 (I)（即 $n = 1$）上积分方程(3.49)，不难证实，相轨线都是半圆弧：在下半叶 $y < 0$ 上（中心在点 $O_1^-(\lambda + r, 0)$）为

$$y^2 + [x - (\lambda + r)]^2 = \text{常数}, \tag{3.50a}$$

而在上半叶 $y > 0$ 上（中心在点 $O_1^+(\lambda - r, 0)$）为

$$y^2 + [x - (\lambda - r)]^2 = \text{常数}. \tag{3.50b}$$

对 $\lambda + r < 1$ 的情况，图 150 上给出了叶 (I) 上的相轨线。从影线区出发的相轨线（经过有时间后）进入静止线段 $O_1^+O_1^-$。其余的相轨线都将在半直线

$$x = +1, \quad y > 0$$

上走出这一叶的边界。

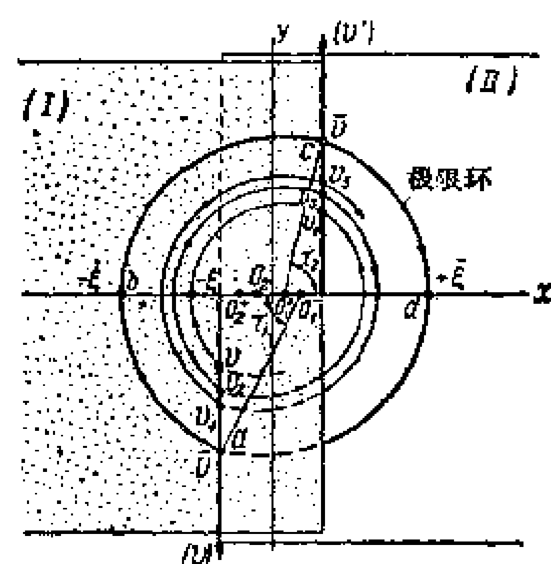


图 151

为了阐释钟表振动系统的可能运动的特性，和前一问题一样，在相平面上作两条半直线：(v), $x = -1$, $y = -v\ (v > 0)$ 及 (v'), $x = +1$, $y = v' > 0$，并研究由相轨线实现的两条半直线

相互间的点变换．设相点在半直线 (v) 的点 $(-1, -v)$（图 151）上，由叶 (II) 过渡到叶 (I)．相点在叶 (I) 上沿相应的半圆周 (3.50a) 走到横轴上的点 $(-\xi, 0)$，其中 $\xi > 1$，并且决定于方程：

$$v^2 = [\xi + \lambda + r]^2 - [1 + \lambda + r]$$
$$= \xi^2 + 2(\lambda + r)\xi - 1 - 2(\lambda + r). \qquad (3.51a)$$

如果 $-\xi < \lambda - r$，那末相点穿过横轴在，并将在叶 (I) 的上半叶上沿半圆周 (3.50b)

$$y^2 + [x - (\lambda - r)]^2 = [\xi + \lambda - r]^2$$

运动，或者到达半直线 (v') 上的点 $(+1, v_1)$，其中 v_1 决定于方程

$$v_1^2 = [\xi + \lambda - r]^2 - [1 - \lambda + r]^2$$
$$= \xi^2 + 2(\lambda - r)\xi - 1 + 2(\lambda - r), \qquad (3.51b)$$

或者到达静止线段的一个平衡状态．当

$$\xi + \lambda - r < 1 - \lambda + r \text{ 或 } \xi < \xi_1 = 1 - 2(\lambda - r) \qquad (3.52)$$

时，就发生后一种情况．关系式 (3.51a) 与 (3.51b) 就是所研究之点变换的后继函数的参数形式；由叶 (II) 上的相轨线所实现的半直线 (v') 对半直线 (v) 的点变换，由于叶 (I) 及叶 (II) 上的相轨线具有上面指出的对称性，具有相同的形状．利用这个后继函数，在任选相轨线和半直线 (v) 及 (v') 的交点序列中（在序列 v, v_1, v_2, v_3, $\cdots$ 中），可以根据每一个前行点，确定出后继点．变换的不动点 $\bar{v}$（对这一点有：$v = v_1 = \bar{v}$）对应着对称的极限环（图 151）．

为了求出不动点，并确定其稳定性，作出拉梅尔图（图 152）．在图上画出曲线 (3.51a) 与 (3.51b)（只须对 $\xi > 1$ 作第一条，而对 $\xi > \xi_1 = 1 - 2(\lambda - r)$ 作第二条）后，不难求出不动点，两条曲线的交点（在图 152 上，纵轴取作 v^2 与 v_1^2 而不是 v 与 v_1；这样，曲线 (3.51) 与 (3.52) 就成了抛物线）．很明显，如果 $\xi > 1$（当 $\lambda < r$ 时，就会发生这种情形），则曲线 (3.51a) 与 (3.51b) 不相交；第一条曲线总是位在第二条曲线的上方，序列 v, v_1, v_2, v_3, $\cdots$ 单调地减小，从而系统在任何初始条件下都将到达一个平衡状态．在这个情况中，钟表中将没有自振（这种情况中的拉梅尔图，如

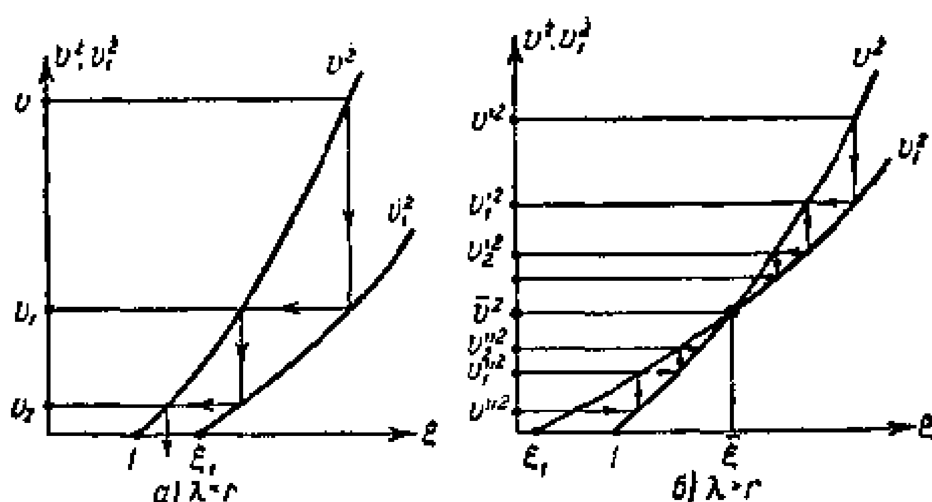


图 152

图 152a 所示).

如果 $\xi_1 < 1$, 当

$$\lambda > r \tag{3.53}$$

时就发生这种情况,那末曲线(3.51a)与(3.51b)有唯一的交点,而所研究的点变换有唯一的不动点,不难证实,这一不动点是稳定的(图 152, б). 这样,当满足不等式(3.53)时,相平面上有唯一的稳定极限环,它对应于钟表的自振状态(图 151 上表示了 $\lambda + r < 1$ 与 $\lambda > r$ 情况下的极限环).

根据参数值 λ 与 r 的不同(但 $\lambda > r$), 可能有硬状态或软状态的自振. 如果 $\lambda > r$, 但 $\lambda < 1 + r$ 时,相平面上除稳定的极限环外还有稳定的平衡状态线段(在每一叶上都有),并且不是在任何初始条件下(在图 153 上的阴影区外),都能发生自振的. 如果 $\lambda > 1 + r$, 那末不存在平衡状态, 而所有的相轨线都渐近地(当 $t \to \infty$)趋近于极限环,亦即,发生软状态的自振(自振在任何初始条件下都能建立起来). 图 154 表示着钟表的参数 λ, r 平面(精确些说,其第一象限),其上划分出若干区域,这些区域分

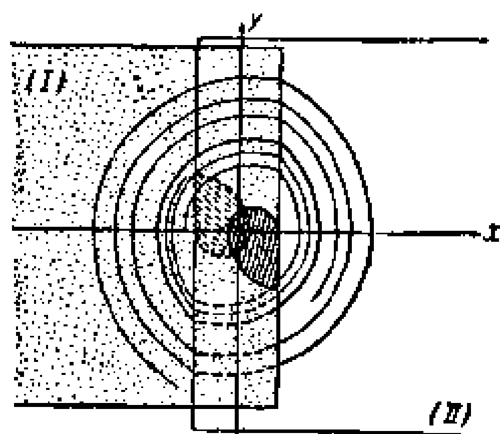


图 153

别对应于钟表运行的不同状态.

现在对钟表振动系统中的周期运动进行较详细的研究，我们已看到，周期运动只有当 $\lambda > r$ 或 $M_0 > f_0$ 时才存在. 在表达式(3.51a)与(3.51b)中，令 v^2 与 v_1^2 相等，就得到摆轮自振的振幅

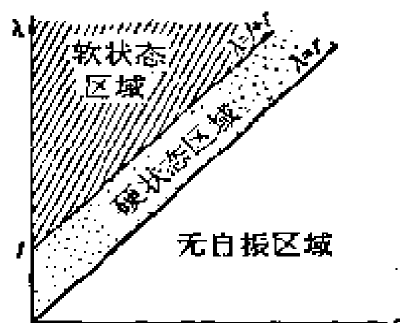


图 154

$$\bar{\xi} = \frac{\lambda}{r}, \tag{3.54}$$

或以普通的角度单位表示[1]

$$\bar{\varphi} = \varphi_0 \bar{\xi} = \varphi_0 \frac{M_0}{f_0}.$$

为了计算自振的周期,应指出,相点的沿相轨线——沿半圆周绕圆心运动的角速度等于一[2]. 因此,相点沿组成极限环的每一半圆弧运动的时间,就等于该弧的中心角,而自振周期(用无量纲的时间单位表示)等于

$$\tau = 2(\pi + \tau_1 - \tau_2),$$

其中 τ_1 与 $\pi - \tau_2$ 是极限环的 ab 与 bc 弧的中心角(图 151). 显然，τ_1 与 τ_2 满足不等式:

$$0 < \tau_1 < \frac{\pi}{2} \text{ 与 } 0 < \tau_2 < \pi,$$

并决定于关系式:

$$\cos \tau_1 = \frac{1 + \lambda + r}{\bar{\xi} + \lambda + r} \text{ 及 } \cos \tau_2 = \frac{1 - \lambda + r}{\bar{\xi} + \lambda - r}. \tag{3.55}$$

因为 $(1 + \lambda + r)/(\bar{\xi} + \lambda + r) > (1 - \lambda + r)/(\bar{\xi} + \lambda - r)$，故

---

1) 这个自振振幅的表达式，和摆轮无"固有周期"的钟表的完全相同(见(3.44))。这完全可以用摆轮弹簧力矩 $-k\varphi$ 的保守性来解释. 实际上，由于擒纵机构在每个自振周期内所作的功等于 $4M_0\varphi_0$，而库仑摩擦力在一个周期内的功等于 $4f_0\bar{\varphi}$，那末能量平衡式可写作 $4M_0\varphi_0 = 4f_0\bar{\varphi}$，和有没有摆轮弹簧无关，因为弹簧在每一自振周期内的功总是等于零的. 由这个能量平衡方程,对于两类钟表,我们都得到振幅:

$$\bar{\varphi} = \varphi_0 \frac{M_0}{f_0}.$$

2) 实际上，根据方程(3.49)，相速度的平方等于 $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = y^2 + [x + (-1)^n\lambda + r\,\mathrm{sgn}\,y]^2 = R^2$——相应半圆周之半径的平方；因此相点运动的角速度等于一.

$\tau_1 < \tau_2$，而自振周期

$$\tau = 2\pi - 2(\tau_2 - \tau_1) < 2\pi. \tag{3.56}$$

用普通单位表示的自振周期等于

$$T = \frac{\tau}{\omega_0} = \tau\sqrt{\frac{I}{k}} < 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}},$$

它恒小于摆轮(或摆)的固有振动周期.

再来研究自振周期 T 是怎样地依赖于钟表参数的，这些参数有：参数 λ，即发条机构的力，和参数 $\lambda/r = \xi$，即摩擦系数，并且我们只考虑当 λ 与 r 很小 $(r < \lambda \ll 1)$ 时的最有实际意义的情况[1]. 对于给定的 ξ，当 λ 和 $r \to 0$ 时，τ_1 和 $\tau_2 \to \tau^0 = \arccos(1/\xi)$，而 $\tau \to 2\pi$. 当 λ，$r \ll 1$，显然可得下列近似式：

$$-\sin\tau^0 \cdot (\tau_1 - \tau_0) = \frac{1+\lambda+r}{\xi+\lambda+r} - \frac{1}{\xi} = \frac{(\xi-1)(\lambda+r)}{\xi(\xi+\lambda+r)},$$

在分母中可以忽略较 ξ 小得多的 $\lambda + r$，得：

$$\tau_1 \approx \tau^0 - \frac{(\xi-1)(\lambda+r)}{\xi^2\sin\tau^0};$$

类似地，

$$\tau_2 \approx \tau^0 + \frac{(\xi+1)(\lambda-r)}{\xi^2\sin\tau^0},$$

因而

$$\tau \approx 2\pi - 4\lambda\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\xi^2} = 2\pi - 4r\sqrt{1-\frac{r^2}{\lambda^2}}, \tag{3.57}$$

因为 $\sin\tau^0 = \sqrt{1+(1/\xi^2)}$. 图 155 上表示出了 τ 对 $r/\lambda = 1/\xi$ (当 λ 不变)的依赖关系的曲线 (当 $r/\lambda = (1/\sqrt{2})$ 时 $(\partial\tau/\partial r) = 0$). 把 τ 看成是 λ 与 $r/\lambda = 1/\xi$ 的函数，不难得到，当发条机构的力与摩擦系数改变时，钟表运行安定性的下列表

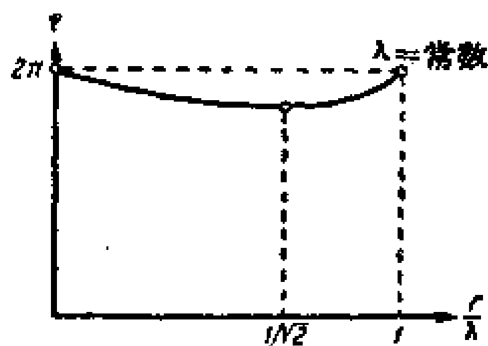


图 155

1) 象上一小节一样，我们将假定最大静摩擦力矩 f_0 和棘轮齿对摆轮擒爪的压力成正比，或者说，和发条机构的力成正比. 这时，比值 $\lambda/r = \xi$ 不依赖于发条机构的力，而决定于棘轮齿与摆轮擒爪表面间的摩擦系数.

达式:

$$\left.\begin{aligned} S_M &= \frac{1}{\dfrac{\lambda}{2\pi}\left|\dfrac{\partial \tau}{\partial \lambda}\right|_{\frac{r}{\lambda}=\text{常数}}} = \frac{\pi \xi^2}{2\lambda\sqrt{\xi^2-1}} = \frac{\pi}{2r\sqrt{1-\dfrac{r^2}{\lambda^2}}} \\ \text{及} \\ S_f &= \frac{1}{\dfrac{r}{2\pi}\left|\dfrac{\partial \tau}{\partial r}\right|_{\lambda=\text{常数}}} = \frac{2\pi\sqrt{1-\dfrac{r^2}{\lambda^2}}}{r\left(1-2\dfrac{r^2}{\lambda^2}\right)}. \end{aligned}\right\} \quad (3.58)$$

我们看到，r 与 λ 越小(即钟表振动系统中的摩擦越小)，且(和力矩 $k\varphi$ 比较)擒纵机构的作用越弱，则钟表的运行越安定．在任何情况下，可以使得摆轮有“固有周期”的钟表的运行，比摆轮无“固有周期”的钟表的运行，具有好得多的安定性[23]．

§6. 最简单的自振系统的性质

通过前几节中所研究的钟表与电子管振荡器(具有由直线线段组成的特性曲线)的一些特例，我们了解了很多实际上非常重要的装置的基本性质，这些装置应当归纳成一个专门的类别——自振系统．这些系统的共同特点是，它们能产生自振，亦即，产生这样的振动，其振幅一方面在长时间内可以保持不变，另一方面，一般来说不依赖于初始条件，不由初始条件决定，而是由系统本身的性质决定的．属于自振系统的，除了我们研究过的(钟表与电子管振荡器)以外，还有电铃，各种锯齿形的和连续的振荡发生器，电弧振荡器，以及许多乐器如：管乐器和提琴等等．在一定的条件下，汽车的前轮系统中也可能发生自振(所谓的汽车前轮的“摆振”现象)．造父变星型的周期变量也是自振系统[124,54—56]．

自振的性质——振幅不依赖于初始条件——是自振系统的一个非常独特的标志．但是，并不是所有自振系统都以十分“纯净的”形式具有这种性质的．例如，时钟摆的振幅，我们已经看到，在某种意义上就依赖于初始条件．如果摆的偏离甚小，则它将作衰减

振动，钟会停止．要建立不衰减的振动(使钟表走动)，就必须给摆一个充分大的偏离，或一个充分大的初速度． 于是，整个初值区(初偏离大于给定的值)对应于同一个不衰减的振幅． 以后我们就会看到，在某些自振系统中，能存在着几个振幅不同的定态过程，建立哪一个过程则依赖于初始条件，虽然在这个情况中，整个初值区也是对应于同一个不衰减振动的振幅的．

自振的另一个典型的特点是：在所有的自振系统中，由于某一能源的存在，能量损失得到补偿，因此在自振系统中，必然存在有这样的能源，同时，因为我们研究的情况是自治系统情况，亦即，系统上没有明显依赖于时间的力，所以由能源所生的力，本身也不是时间的函数，而是决定于系统本身的． 譬如说：上一章中研究的电子管振荡器的例子中，屏路电池(或钟表中的发条机构)就是这种能源；电池的电压是一个不依赖于时间的常值，可是振动时电池给出的能量却周期的改变． 正象对电子管振荡器情况那样，系统与能源间的这种联系，对所有自振系统来说，是一个重要的特点． 能源本身给出不变的能量，但由于能源所作的功依赖于系统的状态(依赖于其坐标与速度)，能源的作用可以成为周期性的，同时其周期决定于自振系统本身的性质． 这样，自振系统是这样的一种装置，它周期地从能源吸取一定的能量，亦即，利用非周期的能源建立周期过程． 从这个定义的观点出发，立刻就可以看出，蒸汽机是个自振系统．

§7. 似正弦自振的初步研究

由方程[1)]

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(x, \dot{x}) - 2h\dot{x} = f(x, \dot{x}) \qquad (3.59)$$

所描述的系统，是单自由度自振系统的一个很一般的类型． 如果

1) 在某些最简单的情况中，$F(x, \dot{x})$ 与 x 无关，于是 (3.59) 可写作：

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \phi(\dot{x}).$$

在系统的组成中，包含着有线性阻尼的振动回路，那末我们一定会得到这种方程。例如，在我们研究普通的振荡发生器时，就有 $\omega_0^2 = 1/LC$，$2h = R/L$，而 $F(x, \dot{x})$ 是作用在回路上的等效电动势[1]，这是由反馈所引起的。这个力作功的结果，使得电阻引起的能量损失得到补偿，因此，周期过程的存在成为可能的了。

如何根据给定的函数 $f(x, \dot{x})$（例如，可以假定在整个相平面 $x, \dot{x}$ 上，$f(x, \dot{x})$ 是解析的），来判断系统中是否可能有稳定的自振，并且如果稳定自振可能的话，如何求出这些振动的特性（振幅，周期，形状），即便是近似地亦好。对于单自由度的自治系统来说，这就是非线性振动理论的基本任务。今后几乎所有的内容，实质上，都是以某种形式与此基本任务有关的。但是，在进行系统的理论讲述以前，现在我们对自振的一个重要类型，即所谓的**似正弦自振**[2]，进行初步的不严格的探讨，其目的在于阐明对自振理论研究的问题提法。对于似正弦振动我们预先指出下列情况：例如，如果我们知道，方程(3.59)的周期解存在，且和它对应的相平面上的闭轨线位于半径为 R_0 的圆的外部，如果还知道 $f(x, \dot{x})$ 在圆外各点都很小（我们假定 ω_0 是给定的），那末我们可以说，我们的解十分相似于正弦的[3]。另一方面，不难看出，$f(x, \dot{x})$ 甚小的要求亦绝

1）$f(x, \dot{x})$ 的量纲可以不是电动势的量纲。

2）就物理性质和作用力的性质而论，自振和保守系统的振动有着本质的差别，但是定态自振的**形状**，却可能和保守系统振动的形状，相差得任意的小。

特别地，在某些实际上十分重要的情况中，自振的形状和线性谐振子的振动形状，相差得微不足道（在清晰系数很小的意义下）。例如，观察具有 J-特性曲线的振荡发生器的波形图时（在 h 甚小的情况中），我们就看不出，它究竟是谐振子的波形图呢还是振荡器的波形图。

3）为了说明这个论断的含义，我们给出其证明。研究方程组：

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -x + \varphi(x, y).$$

经适当的变量变换，方程(3.59)很容易变换为这一方程组。

假定我们知道，系统具有周期运动，且其相轨线位于半径为 R_0 的圆外。又设在半径为 R_0 的圆外 $|\varphi(x, y)| < \varepsilon R_0$，其中 $\varepsilon < 1/2$。变换成极坐标形式：

$$\dot{\varphi} = -1 + \frac{x\varphi(x, y)}{r^2}; \quad \dot{r} = +\frac{y\varphi(x, y)}{r}.$$

非必要的. 虽然在运动的某些时刻上，$f(x, \dot{x})$ 可取任意大的值，形状和正弦形十分接近的自振，仍是可能的. 在钟表理论里，以及在有 ʃ-特性曲线且栅路中有振荡回路的振荡发生器的理论里，我们遇到的就是这种系统，因为很显然，如果我们研究的系统中，有限动量的传递是瞬时的，那末，只有作用着无限大的力，这才是可能的.

关于周期过程之特征的问题，特别频谱成分的问题，至少是对于似正弦自振情况来说，可以近似地利用**自共振**的概念来解释，这一概念在阐述具有 ʃ-特性曲线的振荡器理论时，我们已经讲到过.

首先重复一下普通共振理论的一些基本原理. 在周期外力的作用下，且阻力与速度成正比时，如果线性振子中的运动，和它的一个固有振动很相近的话，亦就是说，这个运动的周期和振子的固有周期充分相近，且清晰系数又甚小的话，我们说线性振子中发生共振. 设我们有周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$ 的周期外力 $\Phi(t)$ 作用于具有线性阻尼的谐振子上，而谐振子的固有频率亦等于 ω（现在我们研究的主要就是这种情况）：

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\Phi(t)-2h\dot{x}. \tag{3.60}$$

在半径为 R_0 的圆外

$$\left|\frac{x\varphi(x,y)}{r^2}\right|<\frac{|\varphi(x,y)|}{R_0}<\varepsilon<\frac{1}{2};\ \left|\frac{y\varphi(x,y)}{r}\right|<|\varphi(x,y)|<\varepsilon R_0.$$

对谐振子周期的"修正量"进行估值：

$$\int_0^{2\pi}\dot{\varphi}(t)dt=-2\pi+\alpha,\ \text{其中}\ |\alpha|<2\pi\varepsilon,$$

$$\int_0^{\tau}\dot{\varphi}(t)dt=-2\pi,\ \text{其中}\ \tau\ \text{是待求的周期}.$$

由此 $\left|\int_{2\pi}^{\tau}\dot{\varphi}(t)dt\right|<2\pi\varepsilon$，而得周期的修正量为 $|\tau-2\pi|<4\pi\varepsilon$.

估计向径在一个周期内的最大变化：

$$\Delta r<\int_0^{\tau}|\dot{r}_{\max}|\,dt<\int_0^{\tau}\varepsilon R_0 dt<\varepsilon R_0(2\pi+4\pi\varepsilon).$$

由此可见，对应于周期解的闭轨线位于相平面上的二个同心圆周之间，此二圆半径之差小于 $R_0(2\pi\varepsilon+4\pi\varepsilon^2)$. 显然，如果我们预先知道周期运动的轨线位于半径为 R_0 与 $R_1(R_1>R_0)$ 的圆周之间，那末我们只须要求 $\varphi(x,y)$ 在两个圆周之间的区域内甚小就够了.

分出共振项后[1]，将 $\Phi(t)$ 表为形式:

$$\Phi(t) = P\cos\omega t + Q\sin\omega t + G(t). \tag{3.60a}$$

存在着确定的固有振动:

$$x_1(t) = \frac{P\sin\omega t - Q\cos\omega t}{2h\omega}, \tag{I}$$

这时，外力的共振项被振动中的摩擦力所补偿. 不难看出，对于充分小的 h（如果 $P^2 + Q^2 \neq 0$），在外力 $\Phi(t)$ 的作用下，系统中将产生任意相近于固有振动 (I) 的周期运动，亦就是说，对于这个运动，固有振动 (I) 远较运动之富里埃级数中的其他项为强，或更精确些说，这个运动的清晰系数将任意地小. 我们来证明这一论断. 以 $z(t)$ 表示方程(3.60)的精确解与固有振动 $x_1(t)$ 之差，则 $x(t) = x_1(t) + z(t)$. 很明显，$z(t)$ 是非共振项 $G(t)$ 产生的，并满足方程:

$$\ddot{z} + \omega^2 z = G(t) - 2h\dot{z},$$

其中

$$G(t) = \frac{P_0}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}(P_n\cos n\omega t + Q_n\sin n\omega t).$$

以后把 $z(t)$ 理解为这个方程的"受迫"解，亦即

$$z(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} C_n\cos(n\omega t + \varphi_n),$$

其中

$$C_n = \frac{\sqrt{P_n^2 + Q_n^2}}{\sqrt{(n^2-1)^2\omega^4 + 4h^2n^2\omega^2}} \leqslant \frac{\sqrt{P_n^2 + Q_n^2}}{\omega^2}.$$

我们可以把研究的周期运动之清晰系数的平方写为:

$$\kappa^2 = \frac{\sum\limits_{n=2}^{\infty} C_n^2}{\dfrac{P^2 + Q^2}{4h^2\omega^2}},$$

---

1) 亦即，选择常数 P 与 Q 使得:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} G(t)\cos\omega t\,dt = 0; \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} G(t)\sin\omega t\,dt = 0.$$

或，因为

$$\sum_{n=2}^{\infty} C_n^2 < \frac{1}{\omega^4}\left[\frac{P_0^2}{2} + P^2 + Q^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(P_n^2 + Q_n^2)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi\omega^3}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} G^2(t)\,dt,$$

$$\kappa^2 < \frac{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} G^2(t)\,dt}{P^2 + Q^2}\,\frac{4h^2}{\pi\omega}^{*}.$$

这样，清晰系数甚小的条件是：

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{G^2(t)\,dt}{\pi\omega} \ll \frac{P^2 + Q^2}{4h^2}.$$

如果 $\Phi(t)$ 是给定的，那末对于充分小的 h，无论 $\Phi(t)$ 的频谱如何，只要 $P^2 + Q^2 \neq 0$，则清晰系数可以任意小。

现在我们感兴趣的并不是受到外力的情况（受迫振动），而是自振，自振中系统本身产生作用于其上的力．这时运动方程是：

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(x, \dot{x}) - 2h\dot{x}. \tag{3.59}$$

设我们知道系统的对应于自振过程的周期运动：$x = \varphi(t)$，$\dot{x} = \dot{\varphi}(t)$．显然，这个解满足方程：

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F[\varphi(t), \dot{\varphi}(t)] - 2h\dot{x} \tag{3.61}$$

亦即，满足在明显依赖于时间之力作用下的系统的方程[1]．这样，自振可以看成是受迫振动，维持它的力的形状，决定于自振本身的形状．如果时间函数 $F[\varphi(t), \dot{\varphi}(t)]$ 满足共振的条件，特别是如果其周期充分接近于 $2\pi/\omega_0$，那末称为自共振是合适的[2]．

---

* 式中的 < 原书为"≤"——译者注．

1) 应指出，只有所研究的周期运动才满足方程 (3.61)，一般说来，方程 (3.59) 决定的其他运动，并不满足这一方程．由此可知，根据这一非自治方程的解，是不能研究稳定性问题的．

2) 特别地，利用自共振的概念可以得出结论，如果方程 (3.59) 中的函数 $F[x(t), \dot{x}(t)]$ 作为时间的函数时，实际上不依赖于回路中的振荡的特性（例如不依赖于振幅的大小），并且如果回路的阻尼减小时，其周期趋近于谐振子的周期 $2\pi/\omega_0$，则回路阻尼减小时，我们得到的振动越来越象正弦振动．这一点具有实际的意义．特别是，在具有 I-特性曲线的振荡器理论中，我们遇到的正是这种情况．

我们应指出，在选择 (3.61) 型的方程时，我们有一定程度上的任意性；例如，常常可以把方程适当地写为：

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(\varphi, \dot{\varphi}) + (\omega^2 - \omega_0^2)\varphi - 2h\dot{x}, \tag{3.62}$$

其中 ω 是自振的频率，于是，需要研究改变了的外力

$$F_1(\varphi, \dot{\varphi}) = F(\varphi, \dot{\varphi}) + (\omega^2 - \omega_0^2)\varphi.$$

对具有另一("修正的")频率的线性振子的作用. 因为可能出现这种情况，将方程写为 (3.61) 的形式时，共振条件不会满足，而写为 (3.62) 的形式并选取适当的 ω 时，便能满足.

现在我们来阐明，利用自共振的概念，并且预先假设方程 (3.59) 有接近于正弦的周期解，便可以获得这个解的主谐波振幅以及频率的近似表达式.

假设方程 (3.59) 的周期接近于(在清晰系数甚小的意义下)正弦振动：

$$x_0(t) = A\cos\omega t; \quad \dot{x}(t) = -A\omega\sin\omega t,$$

其中 A 与 ω 是暂时未定常数. 以"零次近似"解 $x_0(t) = A\cos\omega t$ 代替精确解 φ，代入方程 (3.62)，我们又可以把自振当作受迫振动来研究(现在已经是近似的了). 这样就可得出下列受迫振动的问题：

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F_1(A\cos\omega t, -A\omega\sin\omega t) - 2h\dot{x}. \tag{3.63}$$

将 $F_1(A\cos\omega t, -A\omega\sin\omega t)$ 展开为富里埃级数，得 (见 (3.60a))：

$$\begin{aligned} &F_1(A\cos\omega t, -A\omega\sin\omega t) \\ &\quad = P(A)\cos\omega t + Q(A)\sin\omega t + G(A, t), \end{aligned}$$

其中

$$P(A) = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_1(A\cos\omega t, -A\omega\sin\omega t)\cos\omega t\,dt,$$

$$Q(A) = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_1(A\cos\omega t, -A\omega\sin\omega t)\sin\omega t\,dt.$$

方程 (3.63) 的受迫解为：

$$x_1(t) = \frac{P(A)\sin\omega t - Q(A)\cos\omega t}{2h\omega} + z_1(A, t),$$

其中 $z_1(A, t)$ 是由非共振项 $G(A, t)$ 产生的项. 如果设 ω, $P(A)$ 与 $Q(A)$ 是给定的,那末可以说,存在一定的固有振动

$$\frac{P(A)\sin\omega t - Q(A)\cos\omega t}{2h\omega},$$

对这个振动来说,外力的共振项由固有振动所生的摩擦力补偿了. 很明显, 我们可以把这个固有振动和我们假设由外力所产生的固有振动 $x_0(t) = A\cos\omega t$ 等同起来. 于是立刻得出两个方程[1]:

$$P(A) = 0,\ Q(A) + 2h\omega A = 0 \tag{3.64}$$

由此可"选出" A 与 ω 的那些能够表征所有可能的似正弦的自振的值.

但是必须清楚地意识到, 按方程 (3.64)* 求出的振幅与频率, 一般地说,绝不是精确周期解的主谐波的振幅与频率(甚至正象我们所假设的那样,如果这种精确解实际上存在,且具有微小的清晰系数[2]),因为我们在过渡到研究"受迫"解时,以 $A\cos\omega t$ 代替了精确解. 如果在研究"受迫"运动时,以"一次近似"[3]

$$x_1(t) = A\cos\omega t + z_1(A, t)$$

代替零次近似,那末,可以期待得到更加接近于精确解主谐波的振幅与频率. 完全类似的方法,我们得到确定 A 和 ω 的新的,一般地

---

1) 这个方程常称为: 令"共振项"的系数等于零而得到的方程. 我们来解释这一名称的来源,同时给出这些方程的另一个,从某种观点来说,更令人信服的导出方法. 那就是,不研究方程 (3.62), 我们来研究方程:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(\varphi, \dot{\varphi}) + (\omega^2 - \omega_0^2)x - 2h\dot{\varphi} = f_1(\varphi, \dot{\varphi}).$$

假设接近于正弦振动 $x = A\cos\omega t$ 的振动是存在的, 我们得到一个无摩擦谐振子受迫振动理论的问题:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = P(A)\cos\omega t + [Q(A) + 2h\omega A]\sin\omega t + G(A, t).$$

大家知道,只有当外力共振项的系数等于零时,在这一情况中,才会没有无限增长的振动. 于是又可以导出方程 (3.64).

* 原书为 (3.63)——译者注.

2) 必须着重指出, 方程 (3.64) 的实解的存在这一事实本身, 丝毫不能说明微分方程 (3.59) 的周期解是存在的.

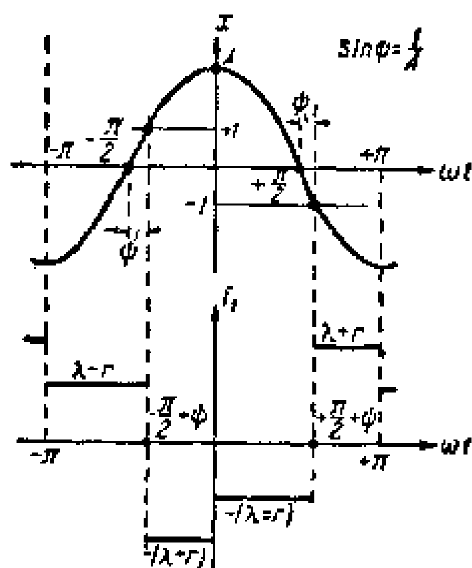
3) 应注意, 如果 "一次近似" 能相当精确地表示待求的周期运动的话(按假设后者接近于正弦形), 那末它应该满足清晰系数甚小的条件. 但是, 如果这一条件满足, 那末一般地说, 我们还不能讲, 从方程(3.64)得出的 A 与 ω 是不是可以充分精确地表示解的主谐波, 同时也不能确定对高次的"近似", 清晰系数将是怎样的.

说，改变了的条件，同时亦求得“二次近似”：

$$x_2(t) = A\cos\omega t + z_2(A, t).$$

这样建立确定 A 与 ω 的方程和建立逐次“近似”的过程，可以无限地继续下去．如果这个过程是收敛的，那末，用这种方法可以求出精确解．为奠定这个过程的基础及证明周期解的存在，须要专门的数学研究．以后当我们研究庞卡莱定量方法时，还要涉及与此有关的一些问题．

关于自振接近于正弦形的假设，在振动理论中被广泛地用来解决一系列的问题．例如，用来研究电子管振荡器的近似定量方法，象巴尔克豪生-墨勒（Barkhausen-Möller）方法（“平均互导法”或“准线性法”）[18,136,178,73,74,29] 或范德波尔（Van der Pol）方法[186,90]，都是以这个假设为基础的．庞卡莱方法[184,185] 也是当振动接近正弦时，才适宜于应用的方法[1]．


图 156

在结束本节时，为了说明这里提出的关于自共振的概念，我们来计算带后退擒纵且摆轮有固有周期的钟表——本章 § 5 第 2 小节所研究的钟表——的自振周期与振幅．

把这种钟表的运动方程 (3.49) 写为形式

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F_1(x, \dot{x}) + (\omega^2 - 1)x = F(x, \dot{x}),$$

其中 $F_1(x, \dot{x}) = -r\,\mathrm{sgn}\,\dot{x} - (-1)^n\lambda$——干摩擦和擒纵机构的等效力矩之和．假设这个方程的周期解接近于正弦形：

$$x = A\cos\omega t$$

（我们已看到，当 $r < \lambda \ll 1$ 时，就出现这种情况）．这种振动，以

1) 显然，振动接近正弦的条件并非永远满足．在某些情况中，这些条件不可能满足，而在另一些情况中，还特别把系统工作的条件选择得使振动波形完全不象正弦波．例如，各种多谐振荡器，锯齿形电压发生器等就是这样的．

及对这种振动的函数 F_1 的形状，如图 156 所示．计算出函数 $F[x(t), \dot{x}(t)]$ 的前二个富里埃系数

$$P(A) = \frac{4}{\pi}\left[r - \frac{\lambda}{A}\right],$$

$$Q(A) = (\omega^2 - 1)A - \frac{4\lambda}{\pi}\sqrt{1 - \frac{1}{A^2}}$$

以后，我们得到决定周期解振幅 A 与频率 ω 的方程(对应于(3.64))：

$$r - \frac{\lambda}{A} = 0; \quad (\omega^2 - 1)A - \frac{4\lambda}{\pi}\sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} = 0,$$

由此

$$A = \frac{\lambda}{r}; \quad \omega^2 = 1 + \frac{4\lambda}{\pi A}\sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} = 1 + \frac{4r}{\pi}\sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}}.$$

考虑到，对所研究的钟表的自振，只有在 $r, \lambda \ll 1$ 时，才接近于正弦，可得

$$\omega \approx 1 + \frac{2r}{\pi}\sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}} \text{ 和 } \tau = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\pi - 4r\sqrt{1 - \frac{r^2}{\lambda^2}}.$$

所得的关系显然与公式 (3.54) 和 (3.57) 相符，后者乃是同一问题在 $r, \lambda \ll 1$ 情况下通过严格研究所得的结果．

第四章　一阶动力学系统[1)]

现在我们系统地阐述非线性系统的理论，以及非线性微分方程的研究方法和求解方法，并且特别注重所谓的定性积分问题，定性积分的重要性我们已经谈过了．但是，我们的任务与其说是对我们提出的所有论断给以严格的数学证明，或是把所有可能的情况进行彻底的分类，不如说是要阐明定性积分的思想，并且将现有的定性积分方法加以发展，由于它们在振动理论与某些其他问题之中有所应用．

在我们讨论的问题中，最一般的情况是由一个二阶非线性微分方程，或者说，由两个一阶微分方程所描写的非线性系统．不过我们现在不从这一般的情况来阐述一般的理论，而准备从比较简单的一阶非线性系统（1/2 自由度的系统），亦即从其运动是由一个一阶非线性微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(x) \tag{4.1}$$

描写的动力学模型开始着手．许多有一定物理意义的问题的研究，在适当的简化假设下，都可以化为这种动力学模型．

首先我们研究这样的系统，其运动可以由方程(4.1)足够精确地确定，方程的右端 $f(x)$ 是在整根 x 直线上的解析函数，有限个点可能除外．

我们要阐述的一般理论，其最终目的是确定系统的坐标对时间的依赖关系，亦即求出函数 $x(t)$ 的形式，在一维相“空间”中，亦即在相直线上画出图线，虽然起着很重要的作用，但仍不过是辅助的作用．

1) 本章 §6 第 2 小节是 H. A. 热烈佐夫改写的，§5(第 2—4，6 小节)，§6 第 1 小节与 §7 是他重写的．

§1. 存在性和唯一性定理

研究平面 t, x. 我们的方程的解 $x = \varphi(t)$ 是平面 t, x 上的曲线. 这些曲线我们也将称之为积分曲线(不过,不要将它们和相平面上的相轨线以及相平面上的积分曲线混淆).

设给定了初始条件: 当 $t = t_0$ 时 $x = x_0$, 或假设在平面 t, x 上给定了坐标为(t_0, x_0)的点. 如果对于方程(4.1) 科希定理的条件成立[1](例如,函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的某区间上是解析的),则方程(4.1) 就有满足这一初始条件的唯一的解, 或换句话说, 有通过点(t_0, x_0) 的唯一的积分曲线. 这一积分曲线在任何情况下都将一直延伸到 $f(x)$ 非全纯的 x 值为止. 如果函数在全直线上解析, 则解可一直延拓到 x 到达无限远以前为止[2]. 如果 x 不会走向无限远, 那末解能从 $t = -\infty$ 延拓到 $t = +\infty$.

甚至在有破坏全纯性的点存在时,还可能有解从 $t = -\infty$ 延拓到 $t = +\infty$ 的情况. 例如,这时解可以位于两条平行于 t 轴的直线之间, 这两条直线的纵坐标就是函数 $f(x)$ 的全纯性被破坏的点(图157).

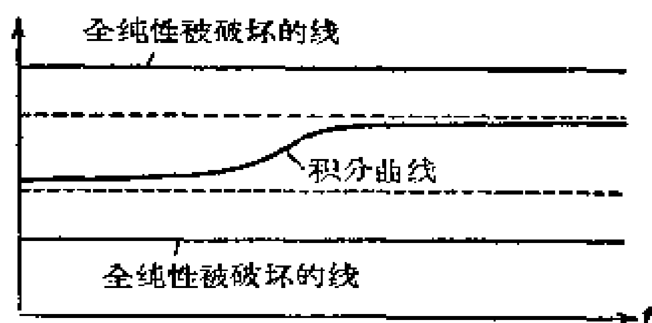


图 157

总之, 可以作如下叙述. 整个平面 t, x 可以被划分为若干长带, 带域的边界是平行于 t 轴的直线, 其纵坐标是函数 $f(x)$ 的全纯性被破坏的点. 在每个带域中通过每一点有唯一的积分曲线. 这些曲线是解析的,因而在带域中互不相交.

上述定理并不能断定带域边界上的情形. 那里可能有积分曲

1) 见下册附录 I.

2) 应指出,这在有限时间内也有可能, 这时解可延拓(在这里所指的意义下)到这一瞬时为止. 方程 $dx/dt = 1 + x^2$ 则是一个简例.

线连续地通过边界的情况，也可能有连续性被破坏的各种可能情况.

我们来研究一个有物理意义的例子，在这个例子中科希定理的条件不成立．研究物体等加速度下落，物体的质量是m，加速度是g，初速度等于零(图 158).

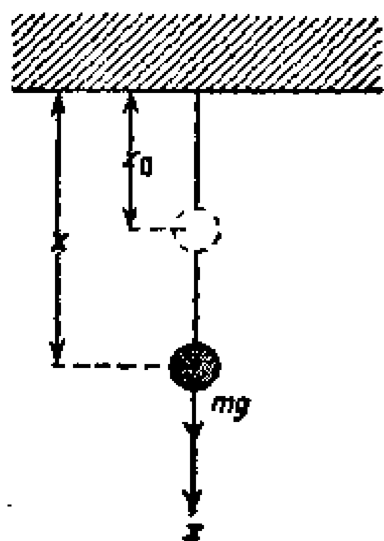


图 158

根据能量守恒定律:

$$\frac{mv^2}{2}=mg(x-x_0),$$

由此，开方之并在根式前取正号(我们只考虑一个方向的运动)，得到微分方程:

$$\frac{dx}{dt}=+\sqrt{2g(x-x_0)}. \qquad (4.2)$$

求这方程对应初始条件 $t=t_0$; $x=x_0$ 的解．不难看出，对于这个 x 值，函数

$$f(x)=\sqrt{2g(x-x_0)}$$

是非全纯的，因为导数 $f'(x)$ 当 $x=x_0$ 时趋于无限，因而不能在这点将 $f(x)$ 展为台劳级数．这样，在平面 t, x 上，沿直线 $x=x_0$ 科希定理的条件不成立．由此，我们可以得出结论，在这条直线上的点上，可能有解不唯一、解不存在等情况发生.

在这个例子中，还可以用直接积分的方法来求解我们的问题．方程 (4.2) 在我们研究的初始条件下的解是

$$x-x_0=\frac{1}{2}g(t-t_0)^2$$

(注意，在这个抛物线上，我们应该只研究对称轴右边的那一半，因为由于前面我们在根式前只取了正号，$dx/dt\geqslant 0$).

除了这个解以外，方程还有一个满足同样初始条件的解:

$$x=x_0.$$

这个解可以按普通法则作为以 t_0 为变参数的抛物线族 $x-x_0=g(t-t_0)^2/2$ 的包络而得到．于是我们看到 (图 159)，通过直线 $x=x_0$ 上的每一点，有两条积分曲线而不是只有一条，亦即，破坏

了解的唯一性条件.

解不唯一的物理意义也不难说明. 因为在研究物体下落时, 我们不是从牛顿的运动定律 $md^2x/dt^2 = f$ 出发的, 而是从能量守恒定律出发的. 从能量守恒定律的观点来看, 对于我们选择的初始条件, 物体既可以是等加速度下落的, 也可以是处于静止的. 这就再次地说明了, 甚至对于单自由度的情况, 能量守恒定律不足以确定运动的规律, 这一点是我们所熟知的.

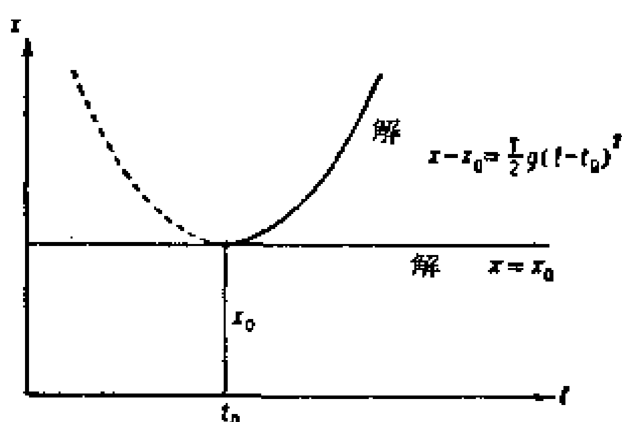


图 159

§2. 曲线在平面 t, x 上的定性特性对函数 $f(x)$ 形状的依赖关系

假设 $f(x)$ 是对所有 x 值的解析函数. 我们来看看这时可能存在怎样的解. 设方程 $f(x) = 0$ 无实根. 这时 dx/dt 在全部时间内保持同号, 而所有的解都是由 $t = -\infty$ 到 $t = +\infty$ 的单调增函数或单调减函数. 假设方程 $f(x) = 0$ 有实根: $x = x_1$, $x = x_2$, $\cdots$, $x = x_k$, 显然, 这些根都对应于平衡状态. 在平面 t, x 上对应的积分曲线是平行于 t 轴并把平面 t, x 划分为带域的直线. 由于积分曲线不能相交(由科希定理), 所以每条积分曲线必定完全位于某一个带域之内, 而且是单调的, 因为 $f(x)$ 在带域中不变号. 并且也不难看出, 如果积分曲线位于平行 t 轴的两条直线 ($x = x_i$, $x = x_{i+1}$) 之间的带域内, 这两条直线是我们的微分方程的解, 那末当 $t \to +\infty$ 时积分曲线渐近地趋于两条直线中的一条, 而 $t \to -\infty$ 时渐近地趋于另一条. 如果积分曲线所在的那一部分平面, 只有一边为平行 t 轴的直线, 则积分曲线的一边将随 t 增加或 t 减少走向无限远, 而另一边将趋于边界直线.

这样，知道 $f(x)$ 后便不难说明平面 t, x 上的曲线的定性特性了.

显然，只要 $f(x)$ 是解析函数，那末这些曲线就不可能是周期的，因为它们是单调的. 这一点对以后很重要.

§3. 运动在相直线上的表示

现在来考虑所研究的运动在一维空间内，特别是在相直线上的表示. 这时表示运动的方法，和在二维相平面情况中的完全一样. 不过现在这情况比较简单，因为这里只是相点的一维运动（图 160）.



图 160

设对于给定的 x，相点的速度是 $f(x)$，即其运动服从微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{4.1}$$

象以前一样，设在整个 x 直线上，除了有限个点外，$f(x)$ 是解析函数. 这时由科希定理，在初瞬时 $t = t_0$ 给定的初值 $x = x_0$ 单值地确定相点以后的运动，至少到相点到达解析区域的边界之前.

我们来研究于瞬时 $t = t_0$ 处在解析区域内的相点随时间的运动. 如果在运动期间相点不会越出解析区域，就研究从 $t = -\infty$ 到 $t = +\infty$ 之间的运动，如果相点在 τ_1 与 τ_2 的瞬时接近到解析区域的边界，那就研究从 $t = \tau_1$ 到 $t = \tau_2 (\tau_1 < t < \tau_2)$ 间的运动. 相点在运动时，描绘出一个点（在静止的特殊情况下），或是一个直线线段，或是半直线，最后或是整个直线，这些就是相直线上的运动的可能轨线. 相点沿相直线的运动特性和运动从何时开始无关，因为运动方程不明显依赖于时间. 由此，在相直线上的每一条单独的相轨线，对应的都是不只一个运动，而是从不同时间开始的运动的无限集合.

在同一条轨线上的每对点 A 与 B，对应于相点通过由 A 到 B 的距离的确定的（有限的）时间间隔．我们注意到，沿轨线运动的相点不能在有限时间内到达平衡点（我们知道平衡点是由方程 $f(x)=0$ 确定的）．这一断言的正确性可由科希定理推出．实际上，如果按规律 $x=\varphi(t)$ 运动的相点，在某个有限时间 $t=t_0$ 到达了平衡状态 $x=x_0$，那末微分方程便有了两个不同的解（一个是 $x=\varphi(t)$，一个是 $x=x_0$），它们在 $t=t_0$ 时取同一个值，这便与科希定理相矛盾．在这一情况下相点渐近地趋于平衡状态，而不能在有限时间内到达，其轨线不是一线段便是一端点为 $x=x_0$ 的半直线（图 160）．这里重要的是，点 $x=x_0$ 不属于我们研究的轨线，它是一条独立的轨线．这很明显，因为不管我们取怎样一个有限的时间，相点将离开点 $x=x_0$ 一个有限的距离，虽然这个距离可能是非常地小．现在就来叙述在相直线上解连续地依赖于初始条件的定理[1]．

研究从同一个瞬时 $t=t_0$ 开始运动的两个相点 $P_1\{x=x_1(t)\}$ 与 $P_2\{x=x_2(t)\}$ 的运动，并研究它们在相点 P_1 未越出解析区域的某个有限时间 T 内的运动．这时关于解对初始条件之连续性的定理可叙述如下：对于任何的 T 与 $\varepsilon(\varepsilon>0)$，就总可以找到这样的 $\delta\{\delta(\varepsilon, T)>0\}$，使得如果

$$|x_1(t_0)-x_2(t_0)|<\delta,$$

便有

$$|x_1(t)-x_2(t)|<\varepsilon \quad 当\ t_0\leqslant t\leqslant t_0+T,$$

亦即，总可以选择两个互不相同而相差又如此小的初始值，使得此二相点在给定的时间 T 内的运动，其相互间之差可以任意小．

现在再来研究相直线上的轨线对函数 $f(x)$ 的形状的依赖关系．

假设 $f(x)$ 是整个 x 直线上的解析函数．如果方程 $f(x)=0$ 无实根，则所有的运动都有相同的轨线，即与相直线重合的直线．

1）现在给出的这个定理的叙述与附录 I 中给出的有些不同——这里的叙述是专门对一维相空间提出的．

如果 $f(x)$ 有实根 $x=x_1, x=x_2, x=x_3, \cdots, x=x_k$，则轨线可能有各种类型：

a）平衡状态；

b）两个根之间的开区间；

c）一个根与无限远之间的开区间（半直线）.

在每条轨线上，运动都是朝确定的方向进行的，因为 $f(x)$ 在轨线上不变号．如果 $f(x)>0$，则相点向右运动，如果 $f(x)<0$，则相点向左运动；正象我们说过的，$f(x)=0$ 的点对应平衡状态．知道了曲线 $z=f(x)$ 的形状，再利用这些性质，就可以把相直线划分为轨线，并指出相点沿轨线运动的方向[1]．这种图线的例子如图 161 所示．被轨线划分了的相直线，使得我们对由一个一阶微分方程描写的动力学系统的可能运动，有个一目了然的图象．显然，平衡状态就是完全确定相直线上的运动特性的基本元素．知道了平衡状态及其稳定性，便能画出可能运动的定性图象．特别地，由此立刻可以看出，当 $f(x)$ 在全直线上为解析的情况下，系统中不可能有周期的运动．如果已知相点在相直线上运动的特性，就能知道平面 t, x 上积分曲线的性状．研究平面 t, x，并使相直线与 x 轴重合．设相点沿相直线运动．在平面 t, x 上描绘点，其横坐标为时间 t，纵坐标等于在给定瞬时 t 相点沿 x 轴的位移．点的横坐标既然是时间，故它是变化的；纵坐标一般也会变化，因为

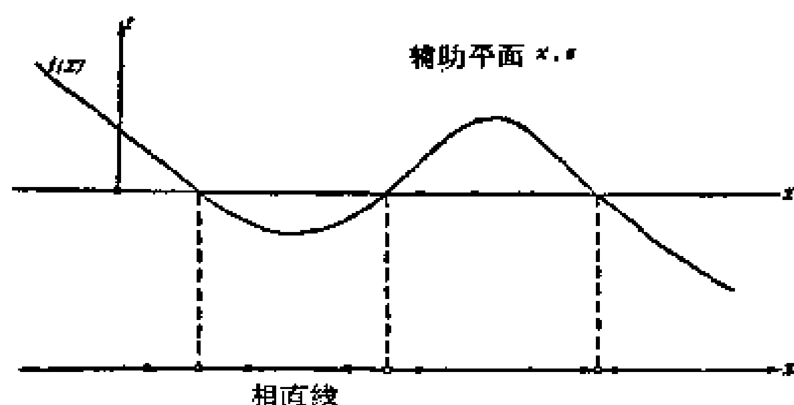


图 161

1）相直线上的箭头表示相点运动的方向.

相点在运动. 因此点在平面 t, x 上也将运动, 并画出一条曲线. 这条曲线就是我们的方程的积分曲线(图 162).

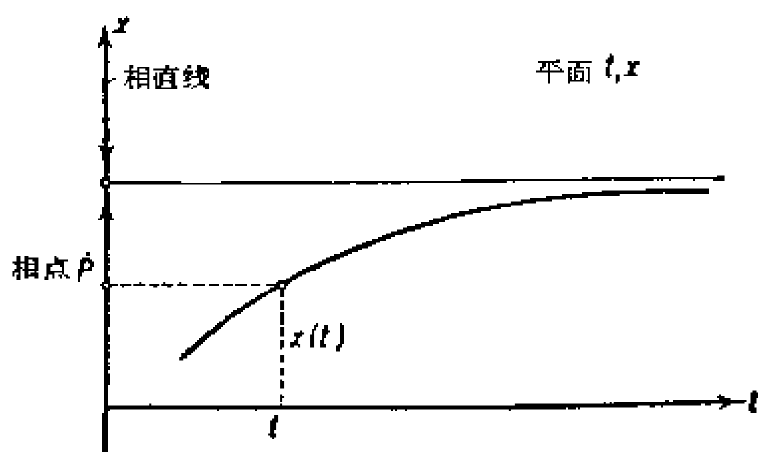


图 162

§4. 平衡状态的稳定性

我们曾在前面给出了平衡状态的李亚普诺夫稳定性的定义. 我们来看这个定义在这里所研究的情况下是怎样的, 以及平衡状态的稳定或不稳定性是怎样用解析法判定的.

在这个情况中, 平衡状态 $x = x_0$ 是按李亚普诺夫稳定的, 如果给定一个任意小的正数 ε 后, 总能找到这样的 δ, 使得当 $|x(t_0) - x_0| < \delta$ 时, 则对于 $t_0 \leqslant t < +\infty$ 便有 $|x(t) - x_0| < \varepsilon$. 李亚普诺夫给出了研究平衡状态稳定性的解析步骤. 我们先叙述这个步骤, 然后再给出它的理论基础.

设我们讨论的是平衡状态 $x = x_0$ 的稳定性. 因为我们理解这个稳定性是按李亚普诺夫的稳定性, 所以我们考虑相对平衡状态的微小的偏离. 令 $x = x_0 + \xi$; ξ 就是对平衡状态的偏离. 根据假设, $f(x)$ 是解析函数, 在方程

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{4.1}$$

中把变量 x 换为变量 ξ, 得到:

$$\frac{d\xi}{dt} = f(x_0 + \xi) = f(x_0) + f'(x_0)\xi + \frac{1}{1\cdot 2} f''(x_0)\xi^2 + \cdots,$$

或因 $f(x_0) = 0$，则方程 (4.1) 的形式化为：

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \cdots, \tag{4.3}$$

其中

$$a_1 = f'(x_0); \quad a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0) \text{ 等等.}$$

李亚普诺夫给出的研究稳定性的步骤如下：弃去方程 (4.3) 中的非线性项，得线性方程：

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1\xi, \tag{4.4}$$

称为线性化方程或一次近似方程. 立即可求出这一方程的积分为：

$$\xi = ce^{\lambda t}, \quad \text{其中 } \lambda = a_1 = f'(x_0).$$

李亚普诺夫断言，如果 $\lambda < 0$，则方程 (4.1) 的解 $x = x_0$ 是稳定的，即平衡状态是稳定的；如果 $\lambda > 0$，则平衡状态不稳定；如果 $\lambda = 0$，则一次近似方程，一般来说，不能解决稳定性的问题. 于是，李亚普诺夫断言，在某些情况中，由弃去非线性项而得到的方程，可以对非线性方程的解的稳定性的问题作出正确的回答.

在这里所研究的简单情况中，很容易给出这一研究稳定性的步骤的理论依据. 在方程 (4.3) 的两端乘以 ξ，便有：

$$\frac{1}{2}\frac{d(\xi^2)}{dt} = a_1\xi^2 + a_2\xi^3 + \cdots = F(\xi). \tag{4.5}$$

利用台劳定理来表示 $F(\xi)$，注意到

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F''(0) = 2a_1,$$

$$F(\xi) = \frac{\xi^2}{1\cdot 2} F''(\vartheta\xi) \quad (\text{其中 } 0 < \vartheta < 1),$$

并令 $\rho = \xi^2/2$；这时方程 (4.5) 化为

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\xi^2}{1\cdot 2} F''(\vartheta\xi). \tag{4.6}$$

如果 $F''(0) < 0$（或即 $a_1 < 0$），则由函数 $F''(\xi)$ 的连续性，对于充分小的 $|\xi|$，有 $F''(\vartheta\xi) < 0$. 由此可知，按 (4.6) 对于充分小的 $|\xi|$ 也有 $d\rho/dt < 0$. 如果 $\rho = \xi^2/2$ 减小，则 $|\xi|$ 也减小，并且永远不会增加. 由此可见，条件 $a_1 = f'(x_0) < 0$ 是判定所研究的平衡状态 $x = x_0$ 按李亚普诺夫稳定的充分条件，因为在这一情况下，环绕 $x = x_0$ 总存在这么一个初值区，使得由这个区域出发的相点渐近地趋近于平衡状态.

完全类似地可以证明，当 $a_1 = f(x_0) > 0$ 时，平衡状态是按李亚普诺夫不稳定的.

这样，李亚普诺夫的步骤便得到了证明，因为如果 $a_1 \neq 0$，利用完全的非线性方程

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \cdots$$

研究平衡状态的稳定性的结果，和用线性方程

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1\xi$$

研究稳定性的结果相同. 所以，弃去非线性项的根据在于当 ξ 值微小时，非线性项比基本的线性项要小得多；当线性项等于零时，问题便需要另行研究.

以上我们所以讨论了弃去非线性项的做法，这是因为，以后在研究更复杂的动力学系统时还要作类似的讨论，亦因为在这个最简单的情况中，作为上述李亚普诺夫方法根据的概念，显得特别地清晰. 但是，另一方面，在这个一阶微分方程的具体情况下，经过研究函数 $f(x)$ 在平衡状态 $x = x_0$ 邻近的特性，不难直接地对平衡状态的稳定性或不稳定性，作出同样的结论.

因为 $f(x_0) = 0$，于是这里可能有三个本质上不同的情况：

1）当 x 增加时，$f(x)$ 在平衡状态 $x = x_0$ 邻近由正号变到负号(图 163). 由此，根据前面所讲的，充分接近平衡状态 $x = x_0$ 的相点，当 t 增加时，将渐近地趋近于平衡状态. 很明显，这时平衡状态是按李亚普诺夫稳定的.

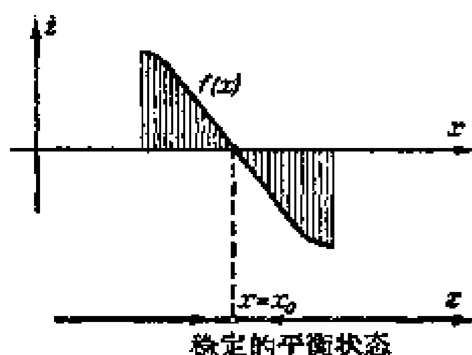


图 163

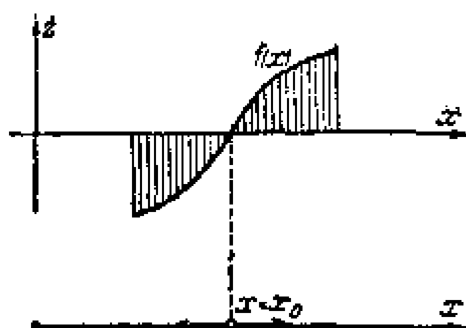


图 164

2) 当 x 增加时 $f(x)$ 在平衡状态 $x=x_0$ 邻近由负变正(图 164)。这意味着，充分邻近平衡状态的相点将远离平衡状态；由此可知，平衡状态是按李亚普诺夫不稳定的。

3) 当 x 增加时 $f(x)$ 在平衡状态 $x=x_0$ 邻近不变号（图 165）。这意味着，相点在一边充分接近平衡状态时将趋向它，而在另一边将远离它。很明显，这时的平衡状态亦是按李亚普诺夫不稳定的。

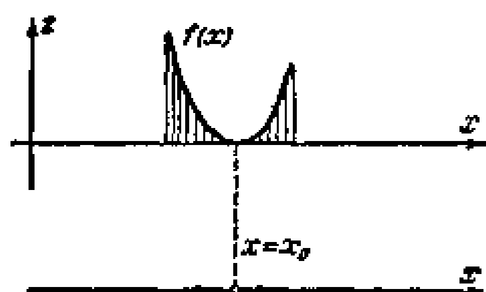


图 165

对所研究的情况，稳定性条件还可以叙述得更简单些．把坐标原点移至 x_0 点。这时如果稳定，必须 x 与 f 在平衡位置的两边都异号，否则 dx/dt 与 x 同号时，一旦偏离平衡位便会越偏越多，即平衡状态将是不稳定的。

对所有这些情况，都能进行解析的研究。

如果 $a_1\neq 0$，我们得到的结果，便恰好和前面用李亚普诺夫方法得到的完全一样。

§ 5. 运动特性对参数的依赖关系

在所有的真实系统中，由方程(4.1)确定的速度与坐标间的关系在不同的程度上受到许多因素的影响．例如，若我们研究机械系统，其中这一关系是和干摩擦有关的，则摩擦的大小依赖于一系

列的因素：摩擦面间的压力，表面温度等等．这些因素常常认为是不变的，虽然严格说来，它们不是永远绝对不变的．因为，这些因素在所有的真实系统中，都不可避免地会有一点改变，所以这种情况必需加以考虑；也就是说，必需知道当这些因素有些不大的改变时，运动的特性如何变化．此外，在许多情况中，我们对于当某一个因素改变时，系统的运动特性有怎样的变化，特别地有兴趣．用数学的语言，我们可以把这个问题叙述如下：微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\lambda) \tag{4.7}$$

的右端依赖于某个参数 λ，我们感兴趣的是，当参数 λ 改变时，系统的运动特性是怎样变化的．我们说过，平衡状态是完全确定相直线上运动特性的基本元素．

系统的平衡状态决定于方程

$$f(x,\lambda)=0. \tag{4.8}$$

这一方程在平面 λ, x 上确定一条表示平衡状态坐标和参数 λ 的依赖关系的曲线（图 166）．

根据以前的结果，如果

$$f'_x(\bar{x},\lambda)<0, \tag{4.9}$$

则平衡状态 $x=\bar{x}$ 是稳定的；如果

$$f'_x(\bar{x},\lambda)>0, \tag{4.10}$$

则是不稳定的．

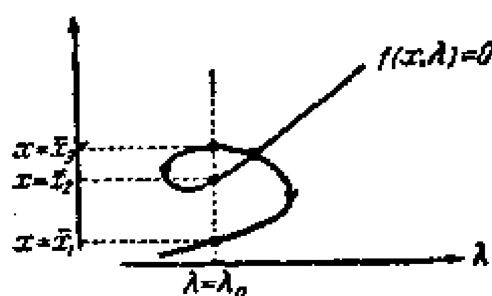


图 166

于是我们看到，一阶动力学系统的平衡状态和参数的依赖关系的理论，和最简单的单自由度保守系统的平衡状态和参数的依赖关系的理论完全相同．这里同样也有参数分枝值，稳定性交替等问题．

我们将不去重复阐述过的分枝理论（见第二章 §5），而直接地就转入研究一些实际系统，在对其性质进行了相应的简化假设之后，这些系统便化为一阶的动力学系统（模型）．

1. 含有电阻与自感的电弧电路　属于这一类的系统的线路，有含有电动势为 E 的电池和电阻 R 及自感 L 的电弧电路（图

167). 如果我们只考虑图 167 上表示出的电路元件，并忽略所有真实系统中必然存在的寄生参数，还假定电路中振动过程的速度比电弧的电流所引起的离子过程建立的速度小得多，这时就可以把电路化为一阶的非线性微分方程．使方程成为非线性的原因在于，电弧是不服从欧姆定律的导体，亦即，流过电弧的电流是电弧端电压的非线性函数．电弧端电压与流过电弧的电流之间的关系可用所谓的电弧的静态特性 $i = \varphi(u)$ 或 $u = \psi(i)$ 来给定，其中 u 是电压，i 是电流强度（图 168）．

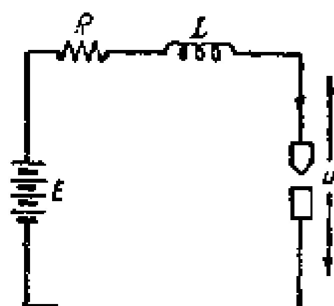


图 167

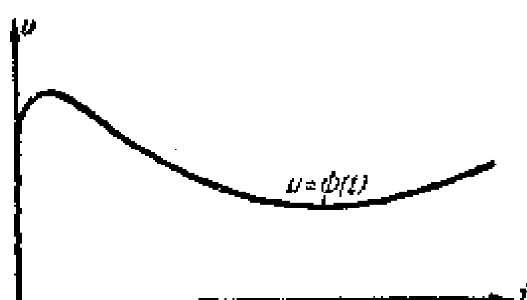


图 168

在所作的假设下，由克希霍夫第二定律，对该电路可得下列一阶微分方程：

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \psi(i) = E,$$

或

$$\frac{di}{dt} = f(i) = \frac{E - Ri - \psi(i)}{L}. \tag{4.11}$$

平衡状态 ($i = I$) 决定于条件 $f(i) = 0$，亦即方程

$$E - Ri - \psi(i) = 0. \tag{4.12}$$

要找出这个方程的根，象普通电工学中那样，在同一个平面上，作出电弧的特性曲线 $u = \varphi(i)$ 与所谓的"负荷"直线 $u = E - Ri$；其交点就表示出平衡状态中的电流值 I（图 169）．图中还画出了曲线 $u = E - Ri - \psi(i)$，它以某一比例尺表示了函数 $f(i)$，知道了 $f(i)$，便可立即在相直线上作出轨线（图 170）[1]．在我们研究

1）因为我们选了能单值地确定 u 与 di/dt 的电流 i 作为系统的坐标，于是相线便是直线 i．值得注意的是，直线 u 不能用作相线，因为电流 i 不是电弧电压 u 的单值函数，所以给定了 u 之后，还是不能单值地确定系统的状态．

的情况中，有三个平衡状态：$i = I_1$，$i = I_2$，$i = I_3$，根据前述的关于稳定性的判据，这里第一个与最后一个平衡状态是稳定的，而中间的是不稳定的。

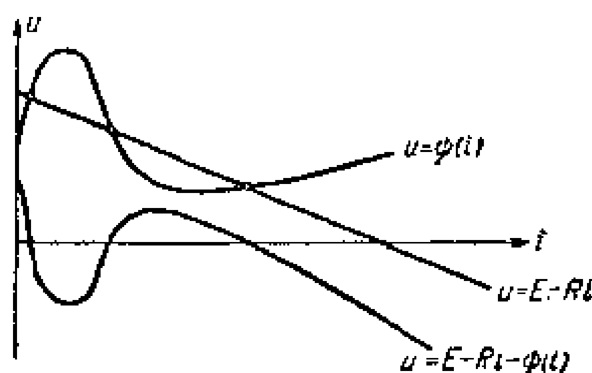


图 169

下面我们建立这个动力学系统的运动特性和参数 E 或 R 的依赖关系。

令 E 是变化的参数。按一般的规则，在平面 E，I 上作曲线 $f(I, E) = 0$ 或

$$E - RI - \phi(I) = 0$$

(图 171)。从图上可以看到这条曲线有两个分枝点，因而参数 E 有两个分枝值：

$$E = E_1 \text{ 与 } E = E_2.$$

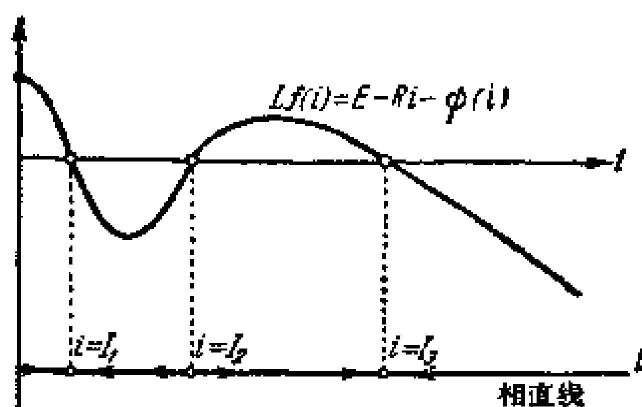


图 170

参数的分枝值 $E = E_2$ 对应于相当大的电池电压（对于给定的 R），在此电压下，平衡状态汇合后就消失了，因而再增大 E 时，就只剩下了一个对应于大电流的稳定的平衡状态 $i = I_3$。参数的分枝值 $E = E_1$，对应小的电池电压（对于给定的 R），使得平衡状态 $i = I_2$ 与 $i = I_3$ 汇合后而消失，进一步减少 E，便只剩下一个对应小电流的稳定平衡状态 I_1。由图可知，如果缓慢而连续地改变 E，则系统在分枝点上跳跃地由一个平衡状态过渡到另一个。电弧电路中的电流，根据方程 (4.11)，由 I_6 增加到 I_7（当 $E = E_2$ 时）或由 I_4 降到 I_5（当

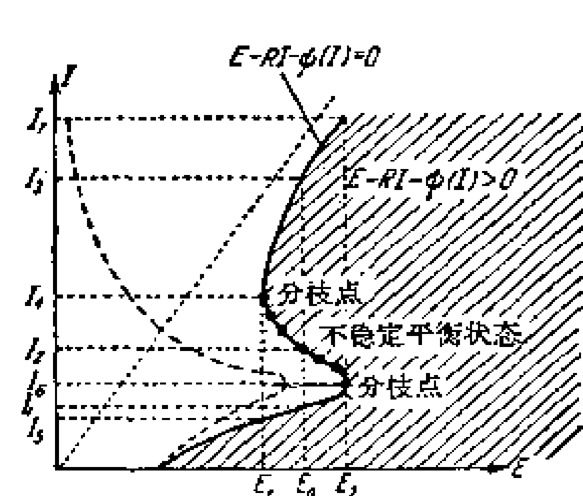


图 171

$E=E_1$时). 定态电流I对电池电压E的关系图具有回滞的特性(图 172). 对于给定的E与变化的R, 亦可以类似地作出分枝图.

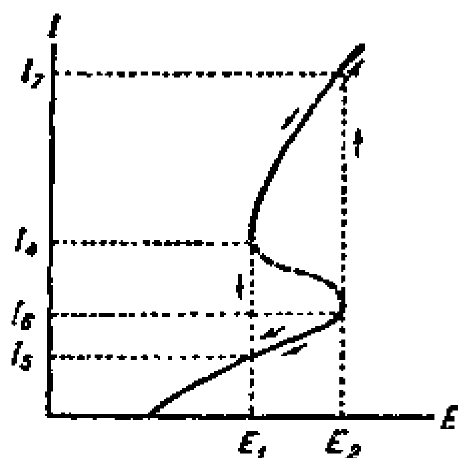


图 172

我们研究了电弧电路中电阻充分小的情况——$R<|\psi'|_{\text{极大}}$的情况, 其中$|\psi'|_{\text{极大}}$是电弧特性曲线$u=\psi(i)$在下降段上坡度的最大绝对值. 如果

$$R>|\psi'|_{\text{极大}}, \tag{4.13}$$

则对于任意的E, 只有一个平衡状态并且是稳定的(图 173). 对于任意的L, 特别是对于任意小的L, 平衡状态都是稳定的. 这个结论和实验资料是相矛盾的; 看来, 条件(4.13)并不是特性曲线下降段上的平衡状态稳定性的充分条件. 这就说明, 把电弧线路看成为一阶动力学系统(1/2 自由度)时, 我们没有考虑到某些对这一情况十分重要的参数. 在大R小L的情况下, 这些重要参数是电弧的小寄生电容及电弧中离子过程的惯性. 关于在电路中不仅有电阻与自感而且还有电容时, 关于电弧的燃烧状态的问题, 我们将在第五章 § 5 中研究[1].

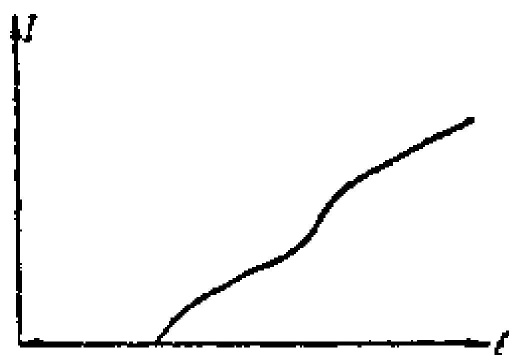


图 173

2. 含有电阻与电容电路中的负阻管 我们研究图 174 所示的电路, 作为 1/2 自由度电学系统的第二个例子[2].

这个电路的方程(当只考虑图 174 中所示的元件时), 根据克希霍夫定律, 可以写为下列形式:

---

1) 在那里我们会看到, 电弧中的离子过程的惯性, 可以近似地用与电弧串联的"等效"自感来代替.

2) 如果在四极管的屏路中没有专门加进去的电容, 那末电容C就应该理解为由四极管屏极与其他电极间的电容以及电阻R的寄生电容所组成的微小的屏极接点的寄生电容.

$$RC\frac{du}{dt}+u+Ri=E. \tag{4.14}$$

这里 $i=\varphi(u)$ 是四极管的屏流，它是屏压 u 的单值非线性函数。这个依赖关系的图形(四极管的屏极特性曲线)，正象在第一章 § 7 中所指出的那样，具有下降段(图 175)。

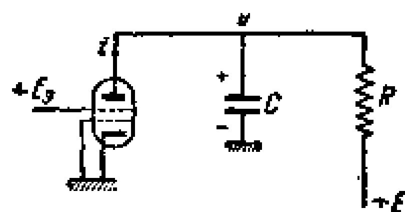


图 174

平衡状态 $u=U$ 决定于方程

$$E-u-Ri=0, \tag{4.15}$$

它们可以用找特性曲线 $i=\varphi(u)$ 与"负荷"直线 $E-u-Ri=0$ 的交点的图解法求出(见图 175)。显然给定了四极管特性曲线 $i=\varphi(u)$ 后，将有一个或三个平衡状态，这要由 E 与 R 的值来确定。如果把屏路电源电压 E 当作电路的参数，而电阻 R 当作固定的参数，就可以在 E, U 平面上作出表示平衡状态坐标 U 对参数 E 的关系曲线(4.15)(当 R 固定时)。其图形如图 176 所示。这里可能有两种情况。如果电阻 R 充分小 ($R|\varphi'|_{最大}<1$，其中 $|\varphi'|_{最大}$ 是特性曲线之下降段的互导的最大绝对值)，那末对于任意的 E 只有一个平衡状态(图 176, *a*)。如果 $R|\varphi'|_{最大}>1$，那末在电压 E 的某一区间上，将有三个平衡状态(图 176, *б*)。在后一情况中，E_1 与 E_2 的值都是分枝值。

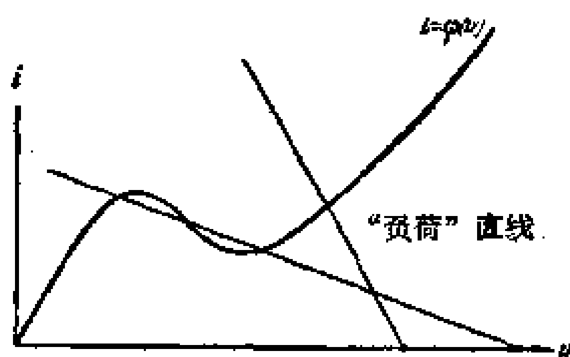


图 175

将

$$E-u-Ri>0$$

或 $du/dt>0$ 的区域画上阴影线，便不难确定出平衡状态的稳定性。亦即，曲线(4.15)上的点在阴影区以上时，对应于稳定的平衡状态，而在阴影区以下的点，对应于不稳定的平衡状态。这样，在有一个平衡状态的情况中，这个平衡状态总是稳定的；如果有三个平衡状态，则最大与最小的状态(图 176, *б* 中的 $u=U_1$ 与 $u=U_3$)

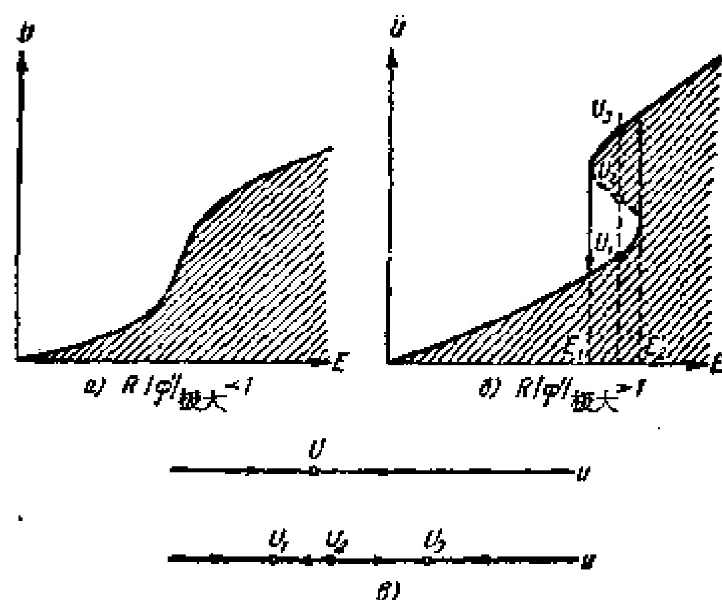


图 176

是稳定的，而中间的（$u = U_2$）是不稳定的．存在一个和三个平衡状态时的相直线如图 176，$\mathit{в}$ 所示；在任意的初始条件下，系统将趋近于平衡状态中的一个．

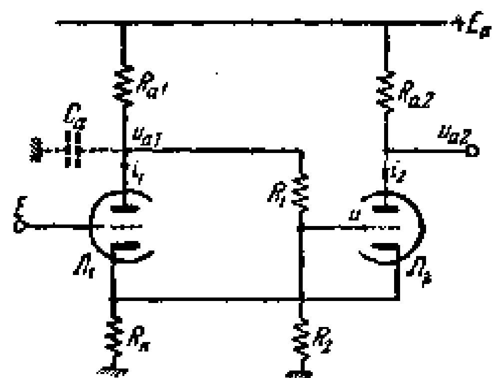


图 177

3. 电子管继电器　对图 177 所示的电子管继电器（线路图中的电容 C_a 表示电子管 $Л_1$ 的屏极接点的微小寄生电容）进行研究时，也会导出一阶动力学系统[1]．

根据克希霍夫定律，对电子管 $Л_1$ 的屏极接点可得方程

$$C_a \frac{du_{a1}}{dt} + i_1 + \frac{u_{a1} - E_a}{R_{a1}} + \frac{u_{a1}}{R_1 + R_2} = 0 \qquad (4.16)$$

（我们在列这个方程时，忽略了电子管 $Л_2$ 的栅流，因为继电器实际上总是在电子管没有栅流时工作的）．忽略阴极接点的寄生电容后，可以认为电子管的屏流是电子管 $Л_1$ 与 $Л_2$ 的栅压 E 与 u 的函数（u 是电路状态的坐标，E 当作为参数来考虑；电压 u，E 及 u_{a1}

1）我们将不考虑其他的寄生电容与寄生参数．可看出，图中的电子管 $Л_2$ 的栅极接点之寄生电容通常都被加入的平行于电阻 R_1 的电容所补偿．

都从电路中的接地点量起).

图 178 表示电子管组(有公共阴极电阻的电子管 $Л_1$ 与 $Л_2$) 的特性曲线族,这些曲线给出了电子管 $Л_1$ 的屏流 i_1 和电压 u 的关系(当电压 E 不同但为常数时).

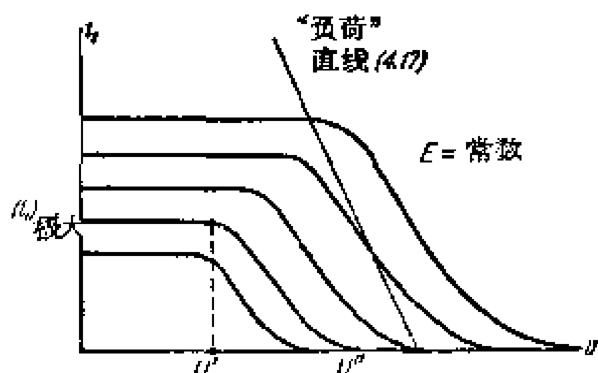


图 178

对于充分小的 $u(u\leqslant U')$, 电子管 $Л_2$ 闭塞 $(i_2=0)$, 而电子管 $Л_1$ 的屏流 i_1 不依赖于 $u(i_1=(i_1)_{极大}=$ 常数). 当 $u>U'$ 时, 电子管 $Л_2$ 的屏流不为零,同时 u 的增加引起 u_2 与阴极电压 u_k 的增加, 因而使 i_1 减小, 直到 $u=U''$, 电子管 $Л_1$ 闭塞为止. 当 $u>U''$ 时,电子管 $Л_1$ 闭塞, $i_1=0$. 分别地使电子管 $Л_1$ 与 $Л_2$ 闭塞的电压 U' 及 U'', 以及极大电流 $(i_1)_{极大}$, 显然依赖于电压 E(随 E 的增加而增加). 同时我们假设特性曲线下降段上的最大互导(其绝对值记为 S_0)不依赖于 E.

再者,电子管 $Л_2$ 栅压为

$$u=\beta u_{a1},$$

其中 $\beta=R_2/(R_1+R_2)$ 是电阻 R_1 与 R_2 组成的分压器的传递系数[1]. 利用这关系式, 从方程 (4.16) 中消去 u_{a1}, 便得到下列关于电压 u 的一阶微分方程:

$$\frac{C_a}{\beta}\frac{du}{dt}=\frac{E_a}{R_{a1}}-i_1(u,E)-\frac{u}{\beta}\left(\frac{1}{R_{a1}}+\frac{1}{R_1+R_2}\right). \quad (4.16a)$$

平衡状态由方程

$$\frac{E_a}{R_{a1}}-i_1-\frac{u}{\beta}\left(\frac{1}{R_{a1}}+\frac{1}{R_1+R_2}\right)=0 \quad (4.17)$$

确定,也可用图解法求出,它们是电子管特性曲线 $i_1=i_1(u,E)$ 与

1) 我们曾略去了电子管 $Л_2$ 的栅极接点的寄生电容. 如果这个接点的寄生电容等于 C_2, 则正文中分压器的传递系数的表达式仍然正确, 只要电阻 R_1 的分路电容等于 C_2R_2/R_1.

"负荷"直线(4.17)的交点．根据电子管 $Л_1$ 的栅压 E 与电路中其他参数的大小的不同，可能有一个或者三个平衡状态．

如果"负荷"直线(4.17)的坡度 $\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{R_{a1}}+\frac{1}{R_1+R_2}\right)$ 大于特性下降段的最大坡度 S_0，而这在

$$\beta\frac{S_0R_{a1}}{1+\frac{R_{a1}}{R_1+R_2}}<1$$

时是必定成立的，那末对于每一个 E，都有唯一的平衡状态，同时不难证实它是稳定的．在这一情况中(见图 178)电子管 $Л_2$ 的栅压的平衡值 U 连续地随 E 的增加而单调减小，而电子管 $Л_2$ 屏极的输出电压 U_{a2} 对 E 的依赖关系如图 179 所示．输出电压 U_{a2} 是输入电压的连续函数(在 E 变化得充分缓慢的条件下)，而继电器便象普通电压放大器一样地工作(由于电路中有正反馈存在，具有很高的放大系数)．

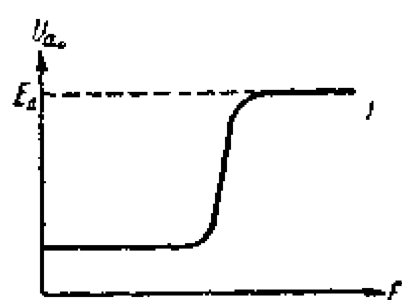


图 179

如果

$$\beta\frac{S_0R_{a1}}{1+\frac{R_{a1}}{R_1+R_2}}>1,$$

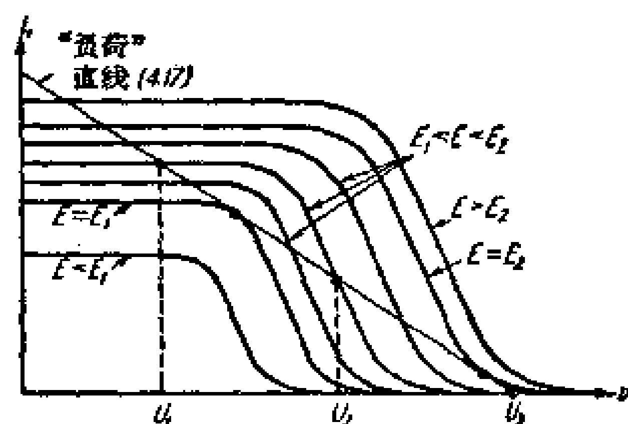


图 180

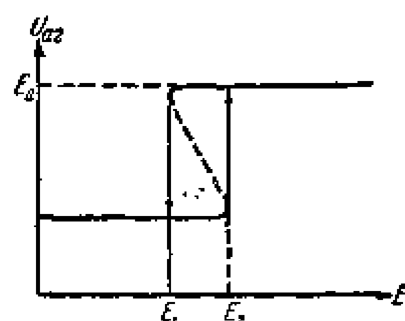


图 181

亦即直线(4.17)的坡度小于电子管组特性曲线下降段的最大坡度(图 180),则在某个电压区间 $E_1 < E < E_2$ 中,电路有三个平衡状态: U_1, U_2 与 U_3, 其中两个(U_1 与 U_3)是稳定的,一个(U_2)是不稳定的[1]. 因此,现在输出电压 U_{a2} 和 E 的依赖关系可以表为 S 形曲线的形状(图 181); 虚线段对应不稳定的平衡状态. 在电压 $E = E_1$ 与 $E = E_2$ 时, 平衡状态汇合而其数目也有了改变, 所以电压的 E_1 与 E_2 值是分枝值. 严格地说, 图 181 所示的电路的特性曲线是静态的, 因为它只给出了输出电压 U_{a2} 的平衡值和电子管 $Л_1$ 栅压的不随时间变化的 E 值间的依赖关系. 但是,这个特性曲线对于变化的 E, 在一定程度上还是精确的(E 改变得越慢越精确). 因此, 如果我们充分慢地(而又连续地)改变输入电压 E(当 $E = E_2$ 时使 $\dot{E} > 0$, 而当 $E = E_1$ 时使 $\dot{E} < 0$), 那末在分枝点上就会使输出电压根据方程(4.16a)发生迅速的变化(回路的寄生电容越小,变化越快).

于是, 所研究的电路在这一情况中象一个电子管继电器一样地工作,它具有继电器的基本特性(迅速地由一个平衡状态过渡到另一个,并有"滞后"的特性).

4. 快艇的运动 现在来讨论若干力学系统的例子, 其运动可以满意地用一个一阶微分方程来描述. 以快艇的直线运动(不计纵摇与侧摇)作为第一个例子. 根据牛顿第二定律,运动方程可写为:

$$m\frac{dv}{dt} = T(v) - W(v), \tag{4.18}$$

其中 v 是船速, m 是船的质量, T 与 W 分别是船的螺旋桨推进力

---

1) 实际上,在平衡状态 $u = U$ 附近成立的线性化方程为

$$\frac{C_a}{\beta}\frac{d\xi}{dt} = -A\cdot\xi,$$

其中

$$\xi = u - U \text{ 及 } A = \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{R_{a1}} + \frac{1}{R_1 + R_2}\right) + \left(\frac{di_1}{du}\right)_{u=U}.$$

对于平衡状态 $u = U_1$ 与 $u = U_3$ 有 $A>0$, 而对 $u = U_2$ 有 $A < 0$; 因此前两个平衡状态是稳定的,而后一个是不稳定的.

与阻力．T 与 W 都是速度 v 的函数，并且螺旋桨的推进力随速度的增加单调地减小（在给定了船的发动机的工作状态时），而船的阻力特性曲线在速度的某个区间中具有下降段（如图 182 所示）[1]．

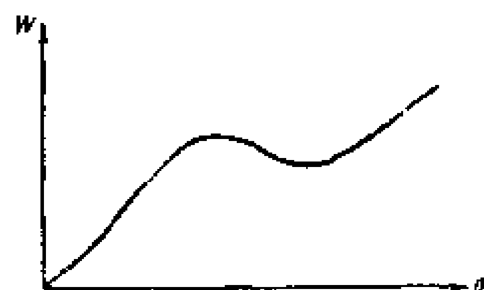


图 182

“平衡状态” $v = V =$ 常数（对应船作匀速运动的状态）显然决定于条件

$$T(v) = W(v).$$

根据阻力特性曲线 $W = W(v)$ 与螺旋桨推进力特性曲线 $T = T(v)$ 的不同形状，通常有一个或者三个等速运动状态．典型的情况如图 183, a 与 $б$ 所示（图中还分别地表示出了相直线的相轨线划分）．不难看出，只有一个等速状态时（图 183, a），这个状态总是稳定的；当存在有三个等速状态时（图 183, $б$），速度为 $v = V_1$ 与 $v = V_3$ 的状态是稳定的，而具有中间速度 $(v = V_2)$ 的状态是不稳定的．当速度增加而螺旋桨推进力 $T = T(v)$ 变化很小时，特别是在试验池中用拖动快艇的模型作试验时，如果拖动推进力 T 不变，就会产生有三个等速状态的情况．

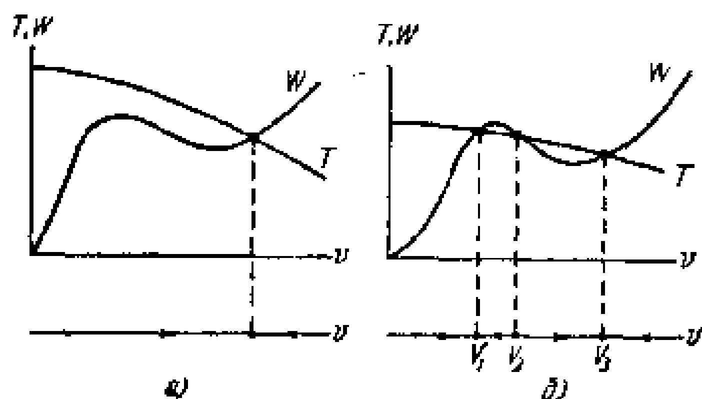


图 183

显然，对于任意的初始条件，快艇最后必定到达一个稳定的等速状态．

1）当运动速度甚小时，快艇处于“飘浮状况”，船的重量被静水浮力所平衡；当速度增加时，运动阻力也随之增大．随着速度的不断增加，船重被作用在船底上的水动力学的升力所平衡的部分越来越大，船体也越来越露出水面．结果使船的排水面显著地减少，因而使得在某个速度区间中，阻力随速度的增加反而减少．当运动速度甚大时，船处于“滑行状况”．排水面随速度的增加的减少已非常微小，阻力又重新随速度的增加而增大．

5. 单相异步电动机 我们研究单相异步电动机转子的转动问题作为第二个例子. 这种电动机有一些缺点(在研究过程中我们将说明这些缺点), 使得这种电动机在普通的条件下很不适用, 因此单相异步电动机的功率都设计得很小, 并且只有在起动及低转数时负荷不大的情况中才用它. 这些条件限制了单相异步电动机的用途——例如, 它们被用来驱动小电扇. 当向电动机的定子输入单相交流电时,就得到了旋转力矩,它和转速的依赖关系大致如图 184 所示. 另一方面,转子的旋转受到摩擦(轴承的)和空气阻力(扇叶运动受到的); 考虑了第一种("固体的")和第二种("流体的")阻力, 我们可以将阻力矩对速度的依赖关系大致表示为如图 185 所示那样的曲线.

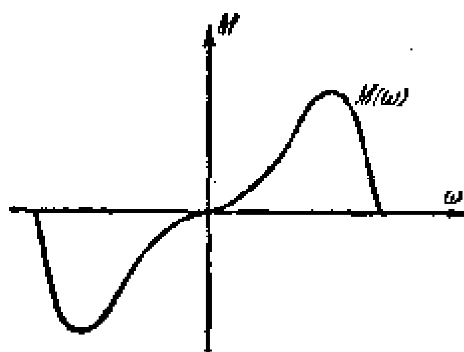


图 184

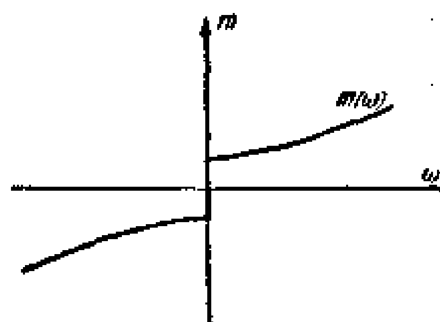


图 185

以 $M(\omega)$ 表示转矩, 以 $m(\omega)$ 表示阻力矩, 并以 I 表示惯性矩,可以把转子的运动微分方程写为

$$I\frac{d\omega}{dt}=M(\omega)-m(\omega).$$

这样,我们就遇到只依赖于一个变数(转速 ω)的情况.

"平衡状态"(对应于电动机的静止状态 ($\omega=0$) 和等速转动状态)可由方程

$$M(\omega)-m(\omega)=0$$

得出. 为了求出这一方程的根,我们作两根辅助曲线: $z=M(\omega)$ 和 $z=m(\omega)$, 并求出其交点(图 186). 然后, 象前例中一样, 求出函数 $f(\omega)=[M(\omega)-m(\omega)]/I$, 并在相直线上作出轨线

(图 187).

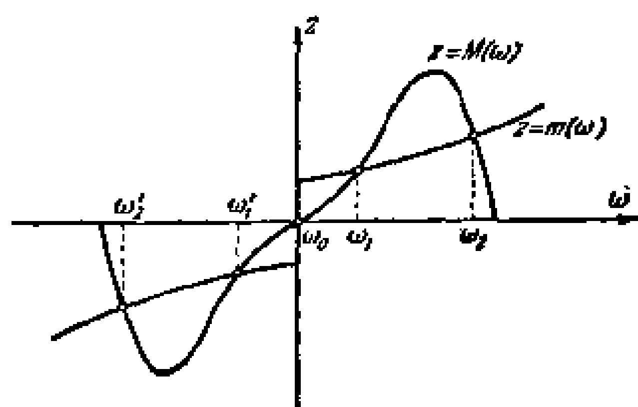


图 186

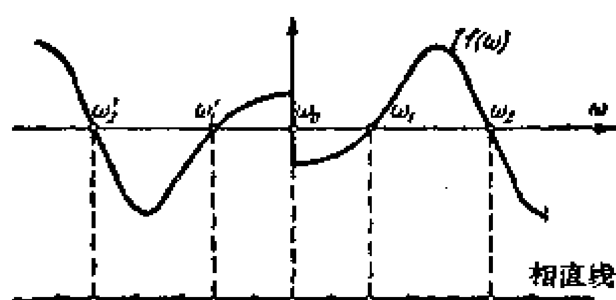


图 187

在这个情况中，我们有三个稳定的平衡状态：$\omega=\omega_0$；$\omega=\omega_2$；$\omega=\omega_2'$；及两个不稳定的平衡状态：$\omega=\omega_1$及$\omega=\omega_1'$. 根据对应于完全静止的状态(无转动的) $\omega=\omega_0=0$ 的稳定性可知，一般来说，转子自己是不会转动，必须把它“抛到”状态 ω_1 或 ω_1' 以外，亦即，将转子先转到具有高于 ω_1 的转速以后，才能自行到达额定转速 ω_2. 电动机可以向两边转动(有两个稳定的平衡状态 ω_2 与 ω_2')，建立起来的转动的方向只决定于转子开始是向那边转动的. 为了使电动机不必要先加以初转动，就要采取特殊的措施(附加绕组，电极等)，使得能破坏向两边转动的对称性，这样出现了的初转矩使电动机能自行起动，当然总是向一边转的.

但是利用来破坏对称性的初转矩不会太大，因此电动机起动总不太好. 这种缺点(我们在前面也说过)大大地限制了单相异步电动机的应用范围.

6. 摩擦式调速器 再研究一个机械系统——摩擦式调速器，在适当简化假设下，可以将它化为一个一阶动力学系统，调速器的结构示意图见图 188. 这种摩擦式调速器用在许多天文仪器，电报设备，电唱

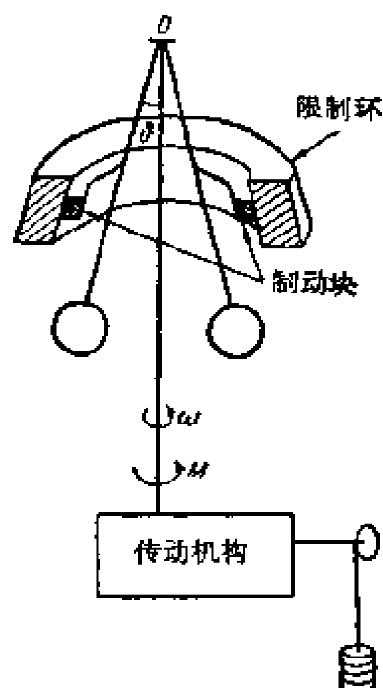


图 188

机等中以镇定轴的转速．它的作用是这样的，随着调速器轴转速的增加，调速器的球随着张开，在到达某一个角度 $\vartheta=\vartheta_0$ 时，制动块开始与限制环摩擦，产生制动力矩，转速越大则制动力矩也越大（因制动块对限制环的压力增加）．制动力矩（随转速的增加而急剧地增加）使系统达到等速转动的状态，这个转速和力矩 M（传动机构作用到调速器轴上的）的依赖关系是很小的．

我们假定调速器的所有各部件都是理想地刚硬，并设在整个调速过程中 $\vartheta\equiv\vartheta_0$，于是便得到 1/2 自由度的动力学系统（其运动将由一个一阶微分方程描写）．

但是为了找出制动块对限制环的压力的依赖关系，我们暂时不令 $\vartheta=\vartheta_0$，而把调速器看成是两个自由度的系统（以 φ 与 ϑ 为广义坐标）．这一系统的拉格朗日函数是

$$L=\frac{1}{2}I(\vartheta)\omega^2+\frac{1}{2}J_\vartheta\dot{\vartheta}^2-V(\vartheta),$$

其中 $I(\vartheta)$ 是调速器对其轴的惯性矩，J_ϑ 是几个球对 O 点的惯性矩，而 $V(\vartheta)$ 是调速器的势能．除了制动块对限制环的干摩擦力以外，所有其余的阻力都忽略不计．这些摩擦力的矩 m（对调速器轴的），我们假定是与制动块对限制环的压力的矩（对 O 点的矩）N 成正比的，亦即令

$$m=N\varphi(\omega),$$

其中 $\varphi(\omega)$ 是正比于摩擦系数的函数，因此决定于制动块与限制环接触面的性质（函数的形状如图 189 所示）．于是得到下列调速器的运动方程，即第二类拉格朗日方程的形式的方程：

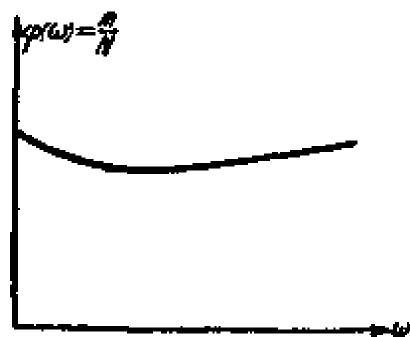


图 189

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\omega}\right)=M-m,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\vartheta}=-N,$$

或

$$\left.\begin{aligned}&I(\vartheta)\dot{\omega}+I'(\vartheta)\omega\dot{\vartheta}=M-m,\\&J_\vartheta\ddot{\vartheta}-\frac{1}{2}I'(\vartheta)\omega^2+V'(\vartheta)=-N.\end{aligned}\right\}\tag{4.19}$$

在方程中令 $\vartheta \equiv \vartheta_0$，首先得到制动块对限制环的压力矩的表达式：

$$N = \frac{1}{2} I'(\vartheta_0)\omega^2 - V'(\vartheta_0),$$

或

$$N = a(\omega^2 - \omega_0^2), \tag{4.20}$$

其中 $a = I'(\vartheta_0)/2$ 及 $\omega_0^2 = 2V'(\vartheta_0)/I'(\vartheta_0)$——这里的 ω_0 是这样的转速，在这个转速下，$\vartheta = \vartheta_0$ 是没有限制环也能平衡的位置；其次，还可得到一阶动力学模型的运动方程：

$$I(\vartheta_0)\dot{\omega} = M - a\varphi(\omega)(\omega^2 - \omega_0^2). \tag{4.21}$$

平衡状态（即调速器的等速转动状态）$\omega = \Omega$，显然决定于方程

$$a\varphi(\Omega)(\Omega^2 - \omega_0^2) = M. \tag{4.22}$$

等速转动的速度 Ω，当然，和传动机构作用于调速器轴上的力矩 M 有关（这个关系式通常称为调速器的静态特性，它由隐式方程 (4.22) 给出）. 我们可以把这个关系式用导数

$$\frac{d\Omega}{dM} = \frac{1}{2a\Omega\varphi(\Omega) + a\varphi'(\Omega)(\Omega^2 - \omega_0^2)} \tag{4.23}$$

来表征[1].

等速转动状态的稳定性决定于一次近似方程

$$I(\vartheta_0)\frac{d(\Delta\omega)}{dt} = -a\{2\Omega\varphi(\Omega) + \varphi'(\Omega)(\Omega^2 - \omega^2)\}\Delta\omega^*,$$

或

$$I(\vartheta_0)\frac{d(\Delta\omega)}{dt} + \frac{\Delta\omega}{\left(\frac{d\Omega}{dM}\right)} = 0 \tag{4.24}$$

显然，如果 $d\Omega/dM > 0$，则等速转动状态是稳定的，如果 $d\Omega/dM < 0$，则是不稳定的.

---

1) 在 (4.20)—(4.23) 和以下的表达式中，我们应该假定 $\omega > \omega_0$. 只在这时才有 $N > 0$，制动块才会压在限制环上.

* 原书漏 $\Delta\omega$——译者注.

随着函数 $\varphi(\omega)$ 的形状(阻尼特性下降段的坡度)和调速器的参数 ω_0 的大小的不同[1]，调速器的静态特性 $\Omega = \Omega(M)$ 可以是单值单调的曲线(图 190，*a*)，这时对应每一个 M 值，系统有唯一而稳定的等速转动状态，也可以是 S 形的曲线(图 190，*б*)．在后一种情况中，当 $M_1 < M < M_2$ 时，系统有三个等速转动状态，转速各为 Ω_1，Ω_2 与 Ω_3，其中两个 ($\Omega = \Omega_1$ 与 $\Omega = \Omega_3$) 是稳定的，一个 ($\Omega = \Omega_2$) 是不稳定的．$M = M_1$ 与 $M = M_2$ 的值就是分枝值．当力矩 M 通过这些分枝值时，系统便从一个等速转动状态过渡到另一个等速转动状态[2]．

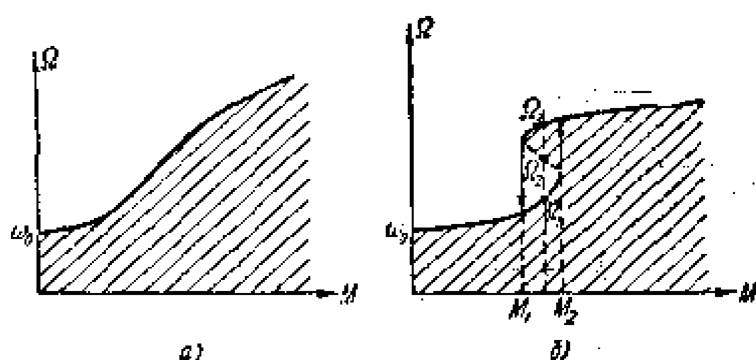


图 190

§6. 周 期 运 动

在我们研究过的一阶动力学系统中，唯一的定常运动是平衡状态．系统中没有任何的周期运动．这是很显然的，因为我们限于研究运动是由一阶方程

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{4.1}$$

---

1) 移动限制环，可以使 ω_0 在一定范围内变化．

2) 我们的这个摩擦式调速器的动力学模型中，没有任何的周期振动，它的任何运动最后都到达一个稳定的等速转动状态．其实在某种条件下，在真实的摩擦式调速器中，没有稳定的等速转动状态，而将发生自振[152,9]．要说明调速器的自激和自振的建立，就必须抛弃调速器各部件都是绝对刚硬的假定，并考虑固定制动块的板簧的很大的但有限的刚性．这样就导致具有一个半自由度的动力学模型(其运动由一个三阶微分方程描写)．这种研究超出了本书的范围．

描写的系统，而方程具有单值的右端（单值函数 $f(x)$）——这种方程一般是不容许有周期运动的. 实际上，如果发生了周期的运动，那末系统就会在两个相反的方向两次地通过同一个 x 值，亦即具有两个不同的速度值 dx/dt，由于函数 $f(x)$ 的单值性，这是不可能的.

一阶系统中若要有周期运动存在，只有在这种情况中才可能，就是方程 (4.1) 的右端——函数 $f(x)$——即便在 x 变化的某一个区间内是非单值的.

下面便是一个例子. 设总能量给定为 h，则谐振子的运动方程式可写作：

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2=h\text{（常数）},$$

或化为 (4.1) 的形式

$$\dot{x}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{h-\frac{kx^2}{2}},$$

大家知道，它有周期解

$$x=\sqrt{\frac{2h}{k}}\cos(\omega_0 t+\alpha),$$

其中 $\omega_0=\sqrt{k/m}$，α 是任意常数. 应注意，对于这个一阶系统，相线已经不是 x 的直线线段：$-A\leqslant x\leqslant +A$，其中 $A=+\sqrt{2h/k}$ 是给定的振动振幅，因为给定 x 后，还不能单值地确定系统的速度 $\dot{x}$（区间 $-A<x<+A$ 上的每一个 x 值都对应两个不同的 $\dot{x}$ 值）. 我们可以另取任意的一条简单（不自交的）闭曲线，例如取一圆（图 191）作为相线. 每一个 x 的值都对应圆上的两个点，这样就有可能建立圆上的点与具有给定能量的谐振子的状态间的单值连续的对应关系. 例如，我们可以令在上半圆上有

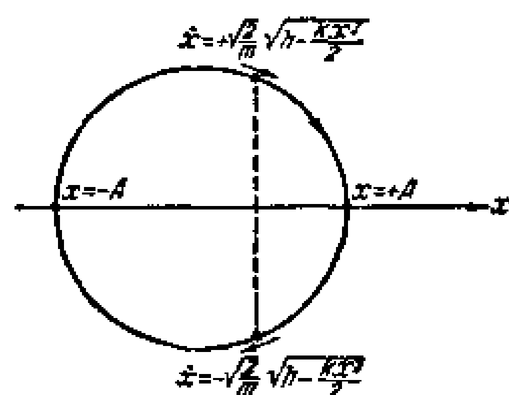


图 191

$$\dot{x} = +\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{h - \frac{kx^2}{2}},$$

而在下半圆上

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{h - \frac{kx^2}{2}};$$

这时给定圆上的点就能单值地确定 x 与 $\dot{x}$，亦即，能单值地确定系统的状态.

一阶动力学系统中普遍存在这样一种情况：只有相线具有封闭部分的系统才可能有周期运动（只有这种相线才容许有对应于周期运动的闭相轨线）. 因此，方程(4.1)右端在 x 变化的某区间上的非单值性，是方程具有周期解的必要条件.

下面我们来研究两个实际系统的例子，对系统的性质作了一定的简化假设之后，就可以将其化为一阶动力学系统，其方程(4.1)的右端是双值的.

1. 双位式温度调节器 第一个例子是双位(继电)式温度调节器，其原理图如图 192 所示. 对于炉温 θ（我们假定炉内各处温度相同，并且炉温可由测温计周围是从周围介质温度算起的）可得下列热平衡方程：

$$C\frac{d\theta}{dt} = W - K\theta, \quad (4.25)$$

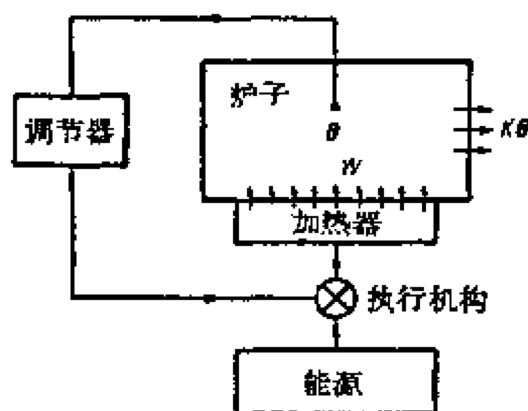
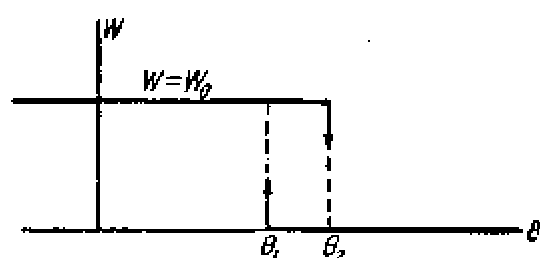


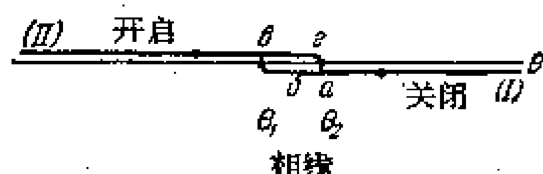
图 192

其中 C 是炉子的热容量（假定 C 不依赖于温度），W 是加热器传给炉子的功率，$K\theta$ 是炉子向外面介质散热的功率（近似地可以假定散热功率与炉子和外面介质的温度差成正比，亦即假定是根据所谓的牛顿散热定律得来的；系数 K 称为散热系数）. 炉温用热电偶测量（或其他测温计），然后通过调节器与执行机构控制传入功率到炉内.

我们来研究双位式调节器，亦即“开-关”型的调节器，随着炉温 θ 的不同，调节器或者完全关闭加热器（$W = 0$），或者完全开启加热器并供应一定的功率（$W = W_0$）。这种调节器的特性曲线如图 193 所示。特性曲线总是具有回滞的特性：如果在炉温 θ_1 时开启炉子的加热器，那末关闭加热器的温度是 $\theta_2 > \theta_1$；在温度区间 $\theta_1 < \theta < \theta_2$ 中，调节器的特性曲线 $W = W(\theta)$ 是双值的[1]。



调节器的特性曲线



相线

图 193

对应于调节器特性曲线的这一双值性，系统（带调节器的炉子）的相线是有“重迭”的直线（图 193），它由两条半直线组成，一条半直线（I）（$\theta > \theta_1$）对应于关闭的加热器，另一条半直线（II）（$\theta < \theta_2$）对应于启开的加热器。这时相点只在 в 点（$\theta = \theta_1$）处由半直线（I）过渡到半直线（II）上，而在 a 点（$\theta = \theta_2$）才作相反的过渡。相线有一个封闭的部分 aбвгa，所以如果系统有周期运动，则对应于周期运动的相轨线只可能是闭曲线 aбвгa（因为相线上没有其他的闭相轨线）。

加热器关闭时（$W = 0$，相点在半直线（I）上）方程（4.25）的解显然可以写为

1）现在最常用的 ЭРМ-47 型双位式温度调节器的结构如下．在测炉温的热电偶上接电流计，在电流计指针上装有铝片（“小旗”），插在电子管振荡器回路线圈与反馈线圈之间．温度改变时小旗移动，因而改变了振荡器线圈间的互感系数（小旗伸入线圈间隙中作为两个线圈间的屏蔽，使互感系数下降）．电子管振荡器是在自振的硬激状况下工作的（见下册第九章），因此在小旗的几个一定位置上改变互感系数就会使振荡器产生有限振幅的自振或是使自振中止．因为电子管振荡器的平均屏流在没有自振时要比有自振时大得多（振荡器在栅路中有自动的偏移），控制绕组接在电子管屏路中的继电器，随着小旗的位置的不同，亦即随着炉温的变化，就能开关加热器．大家知道，在硬激状况下，自振的产生和中止对应于振荡器线圈间的互感系数的不同值（中止自振时的互感系数比产生自振的要小）．这样就使调节器的特性曲线具有了回滞的特性．

$$\theta = Ae^{-\frac{K}{C}t}, \tag{4.26}$$

而当加热器启开时（$W = W_0$，相点在半直线（II）上），解为

$$\theta = \frac{W_0}{K} + Be^{-\frac{K}{C}t}. \tag{4.27}$$

当 $\theta_\infty = W_0/K < \theta_2$（$\theta_\infty$ 是加热器一直启开时，在炉内所达到的定常温度）时，系统（在半直线（II）上）有唯一的平衡状态

$$\theta_0 = \frac{W_0}{K}.$$

在这一情况中，不难证实，在任意的初始条件下，系统中将建立起这一平衡状态．平衡温度 θ_0 依赖于加热器的功率（W_0），也依赖于散热条件（K），当它们改变时也随之改变，因为加热器在接近 θ_0 的温度下总是启开的．

现在设

$$\theta_\infty = \frac{W_0}{K} > \theta_2. \tag{4.28}$$

这时在整个半直线（II）上 $d\theta/dt > 0$，而在半直线（I）上 $d\theta/dt < 0$（当然，在半直线（I）上总是如此）．因此相线上没有任何平衡状态，而相点在调节器第一次开关后就描绘出闭的相轨线 $a\delta e z a$．系统中建立起了自振的状态．自振时炉温便在 θ_1 到 θ_2 的范围内，亦即在调节器特性曲线的双值区内振动．在这种自振的状态下，尽管加热器的功率 W_0 可能改变或散热条件可能变化，炉温都不

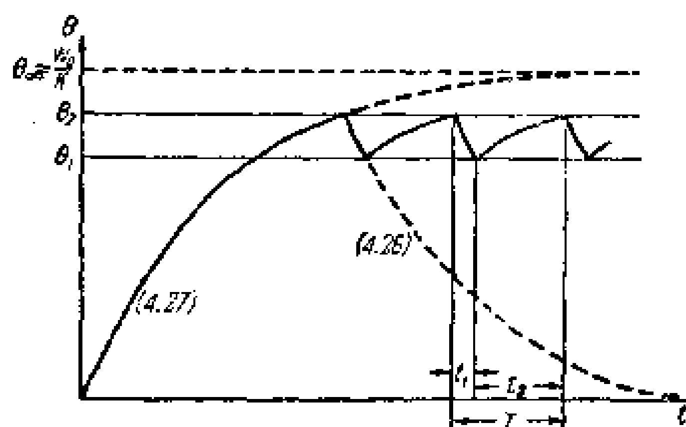


图 194

会超出这区域的范围之外(而这个区域可以做得充分狭窄)．

图 194 表示了温度振动的波形图(为确定起见,初始温度取为零)．波形图由(4.26)与(4.27)的指数曲线段组成，并"缝合"得使温度 θ 是时间的连续函数．周期振动是"张弛的"振动，亦即，形状与谐振动大不相同，并具有"锯齿形"特性的振动．

我们来求自振的周期．在时间间隔 t_1 内加热器关闭使温度由 θ_2 改变到 θ_1，根据(4.26)，t_1 决定于关系式

$$\theta_1=\theta_2 e^{-\frac{K}{C}t_1},$$

由此

$$t_1=\frac{C}{K}\ln\frac{\theta_2}{\theta_1}.$$

类似地，在时间间隔 t_2 内加热器启开，使温度由 θ_1 增加到 θ_2，根据(4.27)，t_2 决定于关系式

$$\theta_2=\frac{W_0}{K}+\left(\theta_1-\frac{W_0}{K}\right)e^{-\frac{Kt_2}{C}},$$

或

$$t_2=\frac{C}{K}\ln\frac{\dfrac{W_0}{K}-\theta_1}{\dfrac{W_0}{K}-\theta_2}.$$

这样，自振周期就是

$$T=t_1+t_2=\frac{C}{K}\left\{\ln\frac{\theta_2}{\theta_1}+\ln\frac{\dfrac{W_0}{K}-\theta_1}{\dfrac{W_0}{K}-\theta_2}\right\},$$

或

$$T=\frac{C}{K}\ln\frac{\dfrac{\theta_\infty}{\theta_1}-1}{\dfrac{\theta_\infty}{\theta_2}-1}. \qquad (4.29)$$

显然，调节器特性曲线的双值区域越窄(θ_1 与 θ_2 越接近)自振周期

越小，调节器的开关（炉子的加热器的开与关）越频繁[1]。

2. 有氖管之电路中的振荡 作为第二个1/2自由度的动力学系统的例子，我们研究氖管张弛振荡器回路（图195）[2]，其振荡由一具有双值右端的一阶微分方程（4.1）来描述。范德波尔及弗里德伦德（Friedländer）等人都研究过类似的电路[152,153,183,146,143]。

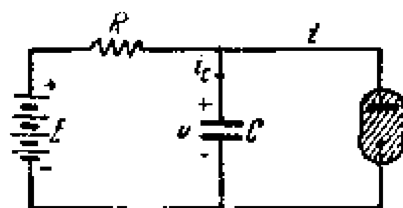


图 195

研究这个电路时，我们不考虑电路元件的任何寄生参数，并假定通过氖管的电流 i 是氖管上电压 u 的函数，这个函数决定于氖管的静态特性 $i=\varphi(u)$[3]。由此可得出用一阶非线性微分方程：

$$C\frac{du}{dt}+i=\frac{E-u}{R},$$

或

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{RC}\{E-u-R\varphi(u)\}=f(u) \qquad (4.30)$$

描述的1/2自由度的动力学系统。电路的非线性是由于电路中的氖管所引起的，因此电流 i 和电压 u 间的关系，不决定于欧姆定律，而是由具有回滞特性的非线性关系 $i=\varphi(u)$ 表示的。氖管静态特性的最典型的特点，在我们研究的过程中，起着很重要的作用，我们将加以考虑，这些特点是这样的：电压小时氖管中没有电流

---

1) 在提出我们研究过的关于双位式温度调节器的问题时，我们假定了在每一瞬时炉子各处的温度都相同。当然这只有当温度变化得充分慢时才正确（慢得使炉内各处的温度分布几乎是均匀的）。如果我们考虑到炉内各部分间之热交换的有限速度的话，那末就将得到更高阶的动力学系统，甚至得到分布系统。在自振状态下，炉温将要稍微超出调节器特性的双值区一些，而自振周期在 θ_1 与 θ_2 接近时也不会趋近于零，这与双位式调节器的实验数据是相符的。

我们所研究的双位式温度调节器的动力学模型，只有在双值区充分宽以及炉内各处之热交换充分快时，才与试验结果相符合。

2) 应指出，闸流管的锯齿形电压发生器的研究和氖管电路的研究相似。

3) 这样，我们假设氖管的状态在每一瞬时都是静态的（这和当氖管上有相应的常值电压 u 时，所建立的状态相同）。显然，只有当电路中的过程充分慢，u 的变化速度远比氖管中之气体放电的速度为小时，这才是可能的。氖管中气体放电的时间有几百个微秒的量级。因此，下面对这一电路中的周期运动所得的结果，只有对于振荡频率不超过（在数量级上）每秒万次的电路才是正确的。

通过（"不亮"），只在一定的电压 U_1（点火电压）下氖管中才有电流通过．这时就立刻产生某个不等于零的电流 I_1．进一步增加电压 u 时，电流按接近线性的规律增加．随着电压的减少，当电压达到 U_1 值之前（对于"亮"着的氖管），氖管还不会熄灭．进一步减小 u，通过氖管的电流便逐渐减小，最后，氖管在某一电压 U_2（熄灭电压）下且当电流为 I_2 时，突然熄灭，这里 $U_2 < U_1$ 及 $I_2 < I_1$．所有这些对于氖管振荡器非常重要的静态特性曲线 $i = \varphi(u)$ 的特点，都表示在图 196，a 的曲线上．

当然，实际上氖管回路中具有一些微小的寄生自感，因而气体放电需要的时间虽甚小，但总还是有限大的；因此通过氖管之电流的改变便不能是瞬时的．但是既然我们忽略了这些因素，所以可以假定氖管着火与熄灭时，通过的电流都是瞬时地、跳跃地由 0 变到 I_1 和由 I_2 变到 0．

同时，尽管电流有跳跃式的变化，电压 u 还是连续地改变，因为电压的这种跳跃式改变（$du/dt = \infty$）将引起无限大的电流（电容器充电电流 $i_c = C du/dt$）与电压，这在我们的电路中是不可能的．因此，在氖管着火（当 $u = U_1$）与熄灭（当 $u = U_2$）时，电流 i 的改变如图 196，a 中的箭头所示[1]．氖管静态特性曲线的虚线段 M_1M_2（相点跳跃地越过其上的点），通常由于其不稳定性在静态中就不存在了．图 196，a 所示的特性曲线，从其基本特点来看，和

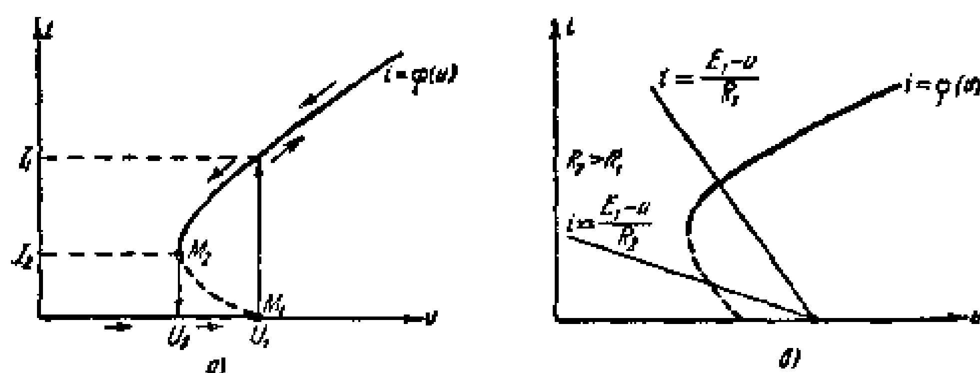


图 196

1）因而，我们假定在通过氖管的电流 i 作迅速（跳跃式的）改变时，电流 i 已经不决定于静态特性 $i = \varphi(u)$，而系统也不满足方程（4.30）．

由试验所得的特性曲线是符合的.

系统的平衡状态决定于条件 $f(u)=0$, 亦即方程

$$\frac{E-u}{R}=\varphi(u). \tag{4.31}$$

要求出这个方程的根,可作曲线 $i=\varphi(u)$ 与直线 $i=(E-u)/R$, 并求出其交点. 在 $E>U_1$ 的情况中,亦即,当电池电压大于氖管着火电压时(我们只限于研究这种情况), 静态特性曲线 $i=\varphi(u)$ 与"负荷"直线 $i=(E-u)/R$ 只有一个交点,同时这个交点的位置依赖于参数 E 与 R 的值(图 196, $б$). 我们知道,平衡状态 $u=U$ 的稳定性决定于 $f'(u)$ 的符号. 很容易证实,如果平衡状态位于特性曲线的上升段, 那末就是稳定的, 如果在下降段, 就是不稳定的[1]. 因而,对于每一个 $E>U_1$, 我们可以增加 R, 使平衡状态由稳定的过渡到不稳定的,同时 E 越大,则临界电阻 $R_{临界}$ 便也越大,当电阻大于临界电阻时,交点移到特性曲线的下降段上,且使唯一的平衡状态变成不稳定的.

在氖管回路的所有振荡中,我们仅研究有这样起始状态的振荡,对应于这些起始状态的、表示氖管状态的点 (u, i), 或者位于 $i=0$ 的那一段上, 或者位于静态特性曲线的上升段上[2]. 这样我们就可以完全不去注意特性曲线的下降段, 因为氖管无论何时都不会到达下降段上的点所表示的状态.

---

1) 后一结果和实验资料有一些矛盾. 这就是, 如果电阻 R 充分大而电容 C 充分小时,那末,下降段上的平衡状态就会是稳定的(见第五章 §5). 这是气体放电惯性的镇定作用,和在氖管中建立定态状态需要有限的速度而决定的. 关于特性曲线下降段上平衡状态不稳定的结论, 以及所有我们关于氖管电路振荡问题的研究,只有在电容 C 充分大时才是正确的,而这时电路中的振荡是很缓慢的.

2) 如果我们感兴趣的是从别的初始状态(甚至是从特性曲线的下降段上的初始状态)开始的振动, 那么研究这些振动时, 这里的一阶动力学系统就不再适用了. 我们应该放弃这一理想化,并再考虑到现在为止被忽略掉的、但却很重要的那些微小的寄生参数中的一些参数(特别是必需考虑气体放电的惯性,并且不用氖管的静特性,而取能够反映气体放电动力学的微分方程). 但是, 这并没有什么意义,因为系统很快地(经过几百个微秒)就到达了对应于氖管静态特性曲线上升段或对应于 $i=0$ 的那一段上的某一点的状态, 以后的振荡就将由这里所研究的一阶动力学系统所描写了(见下册第十章 §7 第1小节).

通过氖管的电流 i，在区间 $U_2 < u < U_1$ 上，将是电压 u 的双值函数，而在区间之外是单值函数（图 197，a）．和上例中一样，与此对应的相线是“有重迭”的线（图 197，$б$），由两条半直线（I）$u < U_1$ 与（II）$u > U_2$ 组成，第一条对应氖管熄灭时系统的状态，第二条对应着火时的状态．这时相点由一半直线过渡到另一半直线（氖管着火和熄灭）分别地通过 $u = U_1$ 和 $u = U_2$，亦即这些半直线的端点．因为相线只允许有唯一的闭轨线 $aбвга$，所以在我们的系统中只可能有唯一的周期过程．

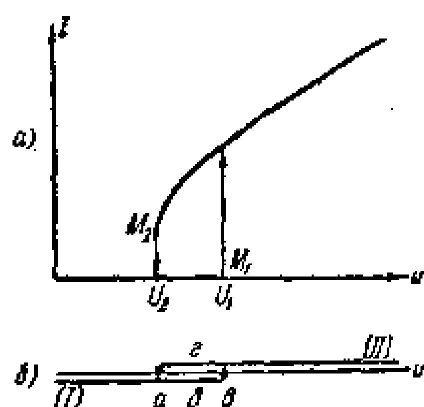


图 197

利用这个相线，很容易研究在各种情况下系统的运动．当 R 充分小并且平衡状态是稳定的（当 $E > U_1$ 时，平衡位在半直线（II）上）情况下，把氖管和电容器连接后立即着火，然后氖管上的电压和通过的电流开始减小．着火的氖管上电压变化的速度决定于系统的参数，亦即方程（4.30）的参数，但在所有情况中它总是有限大的．电压 u 一直减小到达稳定平衡状态 $u = U$ 为止（图 198），电路也就保持在这个状态上（严格地说，系统当 $t \to +\infty$ 时渐近地趋近于这个平衡状态）．

如果 R 大到使半直线（II）上没有平衡状态（在这一情况中，

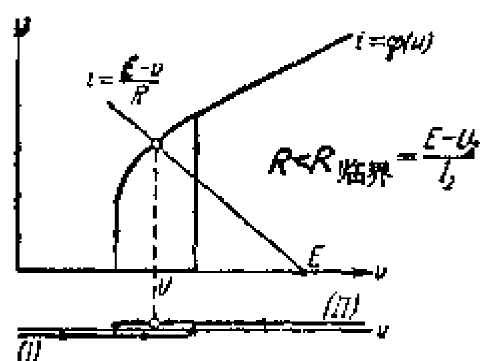


图 198

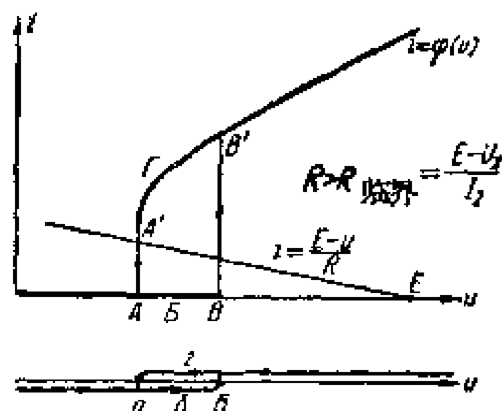


图 199

平衡状态位于氖管特性曲线的下降段上，并且是不稳定的），那末在整个半直线（II）上 $du/dt<0$，又因在半直线（I）上 $du/dt>0$（因为 $E>U_1$），在氖管第一次熄灭或着火后，在电路中便建立起**周期过程**，在相线上就表示为闭的相轨线 $a\delta\text{в}\text{г}a$，或者是 u，i 平面上的闭曲线 $AБBB'ГA'A$（图 199）。闭相轨线的 $aбв$ 段对应于氖管熄灭时电容器 C 通过电阻 R 充电的过程，$вга$ 段对应氖管着火时电容器的放电。

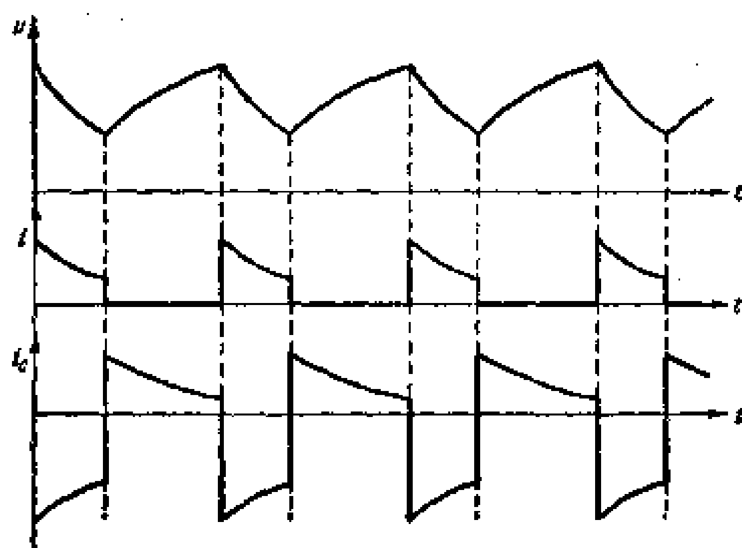


图 200

振荡波形图，亦即，曲线 $u(t)$，$i(t)$ 和 $i_c=C\,du/dt$ 的形状如图 200 所示。在建立起周期过程之前的曲线形状都依赖于初条件。例如，若在初瞬时 $u_0=E$（图 201 中的电路上开关 B_1 是早已闭合的，现在合上开关 B_2），那末曲线的形状便如图 202 所示。如果在初瞬时 $u_0=0$（图 201 中开关 B_2 原已闭合，现在合上开关

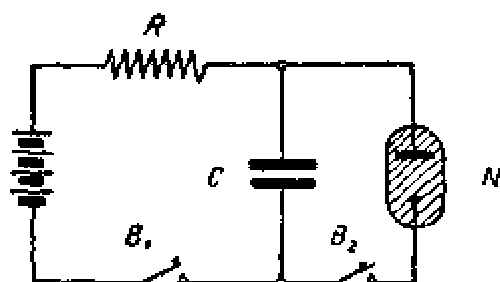


图 201

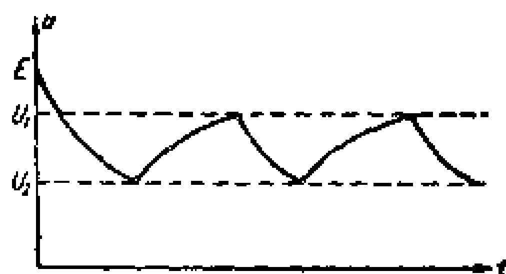


图 202

B_1)，那末曲线的形状便如图 203 所示.

这里我们描述了氖管电路自振的定性图形. 要确定其定量特性(周期，振幅，波形图的形状)，必需具体给定非线性函数 $i=\varphi(u)$. 我们对由直线段组成的分段线性函数 $\varphi(u)$ 进行计算(图 204). 令氖管静态特性曲线的稳定段(不考虑特性曲线的下降段)是由下列方程给定的:

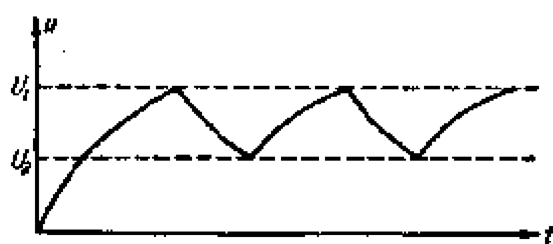


图 203

$$i=\begin{cases}0 & \text{在半直线}(I)\text{上(当氖管熄灭时)},\\ \dfrac{u-U_0}{R_i} & \text{在半直线}(II)\text{上(当氖管着火时)}\end{cases}$$

(常数 $U_0=\dfrac{U_2I_1-U_1I_2}{I_1-I_2}<U_2$ 及 $R_i=\dfrac{U_1-U_2}{I_1-I_2}$ 各有电压与电阻的量纲，它们表征着氖管着火时的性质).

我们从氖管熄灭而相点在 a 点(图 204)的瞬时开始研究. 在 $a\delta\textit{в}$ 段(氖管未着火，$i=0$)有下列运动方程:

$$RC\frac{du}{dt}=E-u. \qquad (4.32)$$

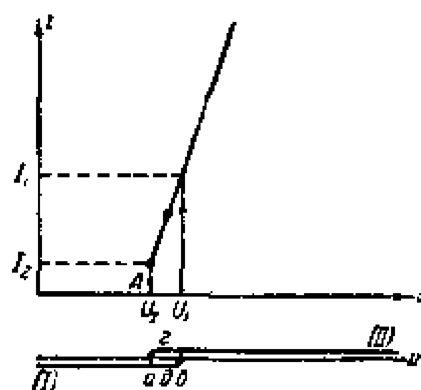


图 204

因为 $E>U_1$，所以电容器上的电压 u 将增加(当 $u<U_1$ 时 $du/dt>0$)，经过某个时间 τ_1 后达到着火电压 U_1. 因为方程(4.32)的满足初始条件 $t=0$ 时 $u=U_2$ 的解是

$$u=E-(E-U_2)e^{-\frac{t}{RC}}, \qquad (4.33)$$

故 τ_1 决定于关系式

$$U_1=E-(E-U_2)e^{-\frac{\tau_1}{RC}},$$

或

$$\tau_1=RC\ln\frac{E-U_2}{E-U_1}. \qquad (4.34)$$

此后氖管着火，运动方程取形式

$$C\frac{du}{dt}=\frac{E-u}{R}-\frac{u-U_0}{R_i}.$$

令 $\rho=RR_i/(R+R_i)$，方程化为

$$C\frac{du}{dt}=\frac{E}{R}+\frac{U_0}{R_i}-\frac{u}{\rho}. \tag{4.35}$$

设 $\frac{U_2}{\rho}>\frac{E}{R}+\frac{U_0}{R_i}$，当

$$R>R_{临界}=\frac{E-U_2}{I_2}, \tag{4.36}$$

时，这一假设成立．于是当 $U_2<u<U_1$ 时 $du/dt<0$ 时，电容器上电压将减小，因为在 $R>R_{临界}$ 时，电容器之通过着火的氖管的放电电流，总是大于通过电阻 R 的充电电流的；经过某个时间 τ_2，电容器放电到电压 U_2，氖管便熄灭．方程（4.35）的解在初始条件为 $t=0$，$u=U_1$ 时是

$$\frac{u}{\rho}=\frac{E}{R}+\frac{U_0}{R_i}+\left(\frac{U_1}{\rho}-\frac{E}{R}-\frac{U_0}{R_i}\right)e^{-\frac{t}{\rho C}}. \tag{4.37}$$

把 $t=\tau_2$ 时 $u=U_2$ 代入，对 τ_2 解之得：

$$\tau_2=\rho C\ln\frac{\frac{U_1}{\rho}-\frac{E}{R}-\frac{U_0}{R_i}}{\frac{U_2}{\rho}-\frac{E}{R}-\frac{U_0}{R_i}},$$

或者，注意到：$(U_1-U_2)/R_i=I_1$ 及 $(U_2-U_0)/R_i=I_2$，有

$$\tau_2=\rho C\ln\frac{RI_1+U_1-E}{RI_2+U_2-E}. \tag{4.38}$$

自振周期等于

$$\tau=\tau_1+\tau_2. \tag{4.39}$$

于是我们得到了自振周期和确定波形图形状的解析式．电容器 C 的电压的自振波形图，是由指数曲线段组成的（见方程（4.33）与（4.37）），它和正弦曲线大不相同．自振的周期和电容器 C 的电容

成正比，而和其他电路及氖管的参数成复杂的依赖关系. 图 205 上表示出了当其他参数不变时自振周期 τ 对电池电压 E 的定性依赖关系. 自振只有当

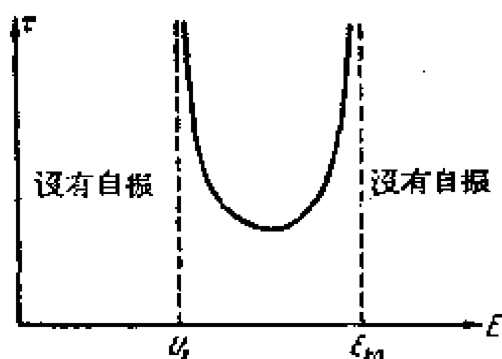


图 205

$$U_1 < E < E_{临界} = U_2 + RI_2$$

时才存在. 当 E 接近 U_1 或 $E_{临界}$ 时，都有 $\tau \to +\infty$（对前一种情形，τ_1 趋于无穷，而在后一情形中，τ_2 趋于无穷）.

最后再提醒一次，我们研究的一阶动力学系统，只有当电容 C 充分大时，亦即，振荡不是快得使氖管中的离子过程的惯性发生影响时，才能满意地反映氖管张弛振荡电路中的过程.

§7. 有一个 *RC* 回路的多谐振荡器

所谓的多谐振荡器（有一个 RC 回路的）是另一个可以作为电自振系统的例子，其电路如图 206 所示. 这种振荡器产生形状象“矩形”的电压振荡——近似于矩形的电压脉冲的周期序列.

如果只考虑在图 206 上标出的电路的元件，并忽略电子管 $Л_2$ 的栅流，则多谐振荡器的振荡方程是：

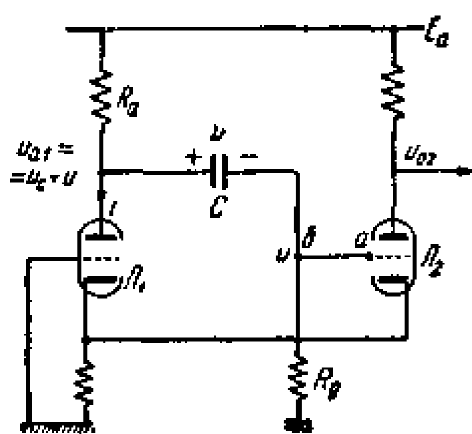


图 206

$$i + C\frac{dv}{dt} + \frac{u + v - E_a}{R_a} = 0,$$

$$C\frac{dv}{dt} = \frac{u}{R_g}. \qquad (4.40)$$

忽略屏极反应，我们假定电子管的屏流是电子管 $Л_2$ 栅压 u 的单值函数. 其中电子管 $Л_1$ 的屏流 i 和这个电压的关系由电子管组的特性曲线 $i = \varphi(u)$ 给出，象我们在本章 §6 第 3 小节中所见到的，具有如图 207 所示的形状. 为了对振荡电路的研究作某些简化，

下面我们假定下降段的中点——互导最大处——即电压 $u=0$ 的地方（以 S_0 记特性曲线下降段的最大互导的绝对值：$S_0=-\varphi'(0)$，这里 $|\varphi'(u)|\leqslant S_0$）[1]。

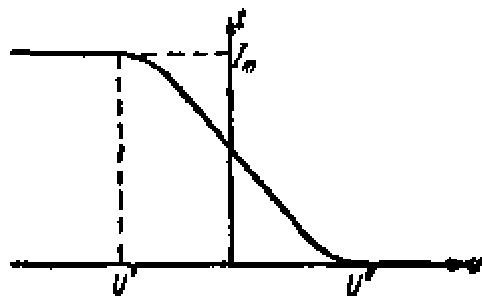


图 207

从方程 (4.40) 中消去 v（电容器 C 上的电压），我们得到对于电子管 $Л_2$ 的栅压 u 的一阶微分方程：

$$C(R_a+R_g)\left[1+\frac{R_aR_g}{R_a+R_g}\varphi'(u)\right]\frac{du}{dt}+u=0. \quad (4.41)$$

因为电流 i 是电压 u 的单值函数，给定 u 就单值地确定了 du/dt，亦即这个多谐振荡器动力学模型的状态．因此我们可取直线 u 为相线．

根据方程 (4.41)，唯一的平衡状态是状态 $u=0$．其稳定性显然决定于下列线性化方程（一次近似方程）：

$$C(R_a+R_g)[1-K]\frac{du}{dt}+u=0, \quad (4.42)$$

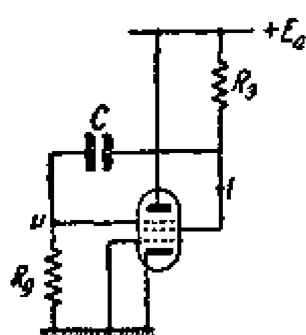


图 208

其中

$$K=\frac{S_0R_aR_g}{R_a+R_g}$$

是系数，具有放大器传递系数的意义，把多谐振荡器电子管 $Л_2$ 的栅路开断（开断图 206 上连接点 a 与 $б$；a 点是放大器的输入，$б$ 点是输出）就成了这个放大器．

如果放大系数 $K<1$，那末平衡状态 $u=0$ 是稳定的，并且在任意初始条件下，系统中都将建立起这个平衡状态，因为，根据不

1) 有处于"负互导"状态的电子管的多谐振荡器（图 208）的动力学，和我们研究的电路的动力学相似．这种电路的振荡方程和方程 (4.40) 相同，而帘栅极的电流 i 和第三栅极上电压 u 的依赖关系由和图 207 所示的相似的特性曲线给出．这个特性曲线的下降段是由于第三栅极上电压 u 变化，使从电子管阴极出发的电子流在帘栅极与屏极间重新分布而引起的（这一电压 u 减小时，从阴极发出的电子流大部分落到帘栅极上，亦即，电流 i 增加而屏流减少）．

等式 $|\varphi'(u)|\leqslant S_0$，当 $u<0$ 时 $du/dt>0$，而 $u>0$ 时 $du/dt<0$。对于这个多谐振荡器的未激励的状况，相直线的相轨线划分如图 209，a 所示。

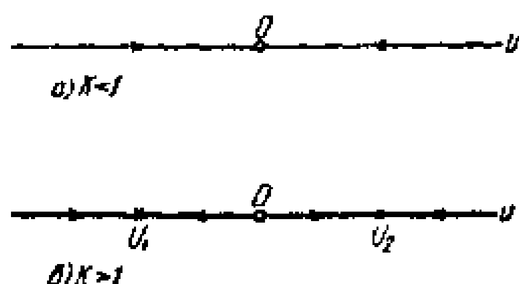


图 209

当 $K>1$ 时，得到另一种图象（图 209，б），这时平衡状态 $u=0$ 是不稳定的（多谐振荡器自激）。以 U_1 与 U_2 表示的能使方程（4.41）中 du/dt 之系数为零的 u 值（亦即 du/dt 趋于无限时的 u 值）。显然，U_1 与 U_2 决定于方程

$$\frac{R_aR_g}{R_a+R_g}\varphi'(u)=-1,$$

且 $U'<U_1<0<U_2<U''$。当通过 $u=U_1$ 或 $u=U_2$ 时 du/dt 变号，因此当 $u<U_1$ 时 $du/dt>0$，当 $U_1<u<0$ 时 $du/dt<0$，当 $0<u<U_2$ 时 $du/dt>0$，以及当 $u>U_2$ 时 $du/dt<0$。

因而，相点在任意初始条件下，或走向点 $u=U_1$ 或走向点 $u=U_2$，不过这都不是平衡状态，且没有从这些点跑出的相轨线。

这样，我们采用的多谐振荡器动力学模型的方程（方程（4.41））使系统到达这样的状态（$u=U_1$ 或 $u=U_2$），从这些状态没有运动开始。多谐振荡器的这一动力学模型，是只考虑了真实多谐振荡器的某些性质的结果，所以用方程（4.41）来描写振荡器是不合适的、矛盾的，因而不能反映真实多谐振荡器中的振荡。

这里的问题在于，在建立多谐振荡器的模型时，没有考虑某些重要的因素，这些因素在运动的某些阶段上，对多谐振荡器中的振荡过程的规律，有决定性的影响。

这些在某些运动阶段上决定多谐振荡器中振荡的规律性的重要参数，就是电路中的微小的寄生电容（电子管 $Л_1$ 的屏极与电子管 $Л_2$ 的栅极接点的电容 C_a 与 C_g，或阴极接点的电容 C_k）。这些电容虽小，在电子管 $Л_2$ 的栅压 u 迅速变化时，却起着决定性的作用，这就构成多谐振荡器振荡的特点之一。考虑了寄生电容 C_a 与

C_g 或电容 C_k，我们就得到二阶动力学模型（有一个自由度），就能充分满意地反映出在多谐振荡器中发生的振荡．多谐振荡器的这种动力学模型将在下册第八章 § 5 与第十章 § 4 中研究．

能够研究多谐振荡器中的振荡的另一方法，在于引入一些补充假设来对一阶动力学模型加以"修正"，这些假设在振荡的某些阶段上代替了方程 (4.41)，并指出系统从状态 $u=U_1$ 和 $u=U_2$ 开始的运动的规律．这些补充假设，或者是根据关于多谐振荡器中振荡过程的实验资料和一些补充的物理概念而作出的，或者是从研究考虑了重要的寄生参数然后令它们充分小（精确些说是令它们趋于零）而得的"更完全的"动力学模型而作出的．后一种方法我们在第十章中研究一系列产生"不连续"振动的振动系统时将要用到[1]．

现在我们利用一阶动力学模型，附加以关于电子管 $Л_2$ 栅压 u 的跳跃假设，来研究多谐振荡器中的振荡．显然，当 $K>1$ 时，多谐振荡器产生具有"不连续"特性的自振：电压 u 周期地在作较慢的变化后又作很快的变化．电压 u 作快变化时的速度，决定于电路寄生电容再充电的速度，寄生电容越小这一速度越大（其中以电容 C_a 与 C_g 最为重要）．当寄生电容充分小时，我们就可以把电压的快变化看成是无限快的，象是瞬时的、跳跃的变化．

与此同时，我们就在多谐振荡器的这个动力学模型之外，再附加一个假设：在模型内，除了服从方程 (4.41) 的运动以外，电压 u 还将作不服从方程 (4.41) 的瞬时的、跳跃式的变化．方程 (4.41) 当然已经不适宜用来描写系统到达状态 $u=U_1$ 或 $u=U_2$ 以后的运动；因此，我们便假设，系统是以跳跃的方式由这些状态走出，到达又可以用方程(4.41)决定运动规律的状态的．为了确定系统跳到的状态，必需再加以某些物理的考虑．假设在电路中不可能有无限大的电压与电流．根据这个假设，电容器充电电流 Cdv/dt 总是有限的；因而，当电压 u 跳跃时，电容器 C 上的电压 v 不会改变；

1) 不连续振动是这样的振动，在振动过程中，系统的状态既作较慢的改变，同时也作很快的变化．多谐振荡器就是不连续振动发生器的典型代表．

否则 $dv/dt=\infty$，而这是不可能的．电容器 C 上电压的这个连续性条件（"跳跃条件"），在我们研究的问题中，已经足以单值地确定系统所跳到的状态[1]．

从方程（4.40）消去 Cdv/dt，便得到 v 为电压 u 的函数：

$$v=F(u)=E_a-R_a\varphi(u)-\left(1+\frac{R_a}{R_g}\right)u \qquad (4.43)$$

（当然，这个关系式只有对于多谐振荡器中服从方程（4.41）或（4.40）的那些状态才正确）．很明显，v 是 u 的单值连续函数．当 $K>1$ 时，其图形如图210，a 所示（不难看出，当 $u=U_1$ 及 $u=U_2$ 时 $F'(u)=0$）．因为多谐振荡器的状态在紧接跳跃之前（当 $u=U_1$ 或 $u=U_2$）及跳跃之后（$u=U_1'$ 或 $u=U_2'$）都是使方程（4.41）成立的状态，因而亦是使关系式（4.43）成立的状态，且当跳跃时，v 并不变化，多谐振荡器从状态 $U_j(j=1,2)$ 跳到紧接跳跃之后的状态（$u=U_j'$），决定于方程

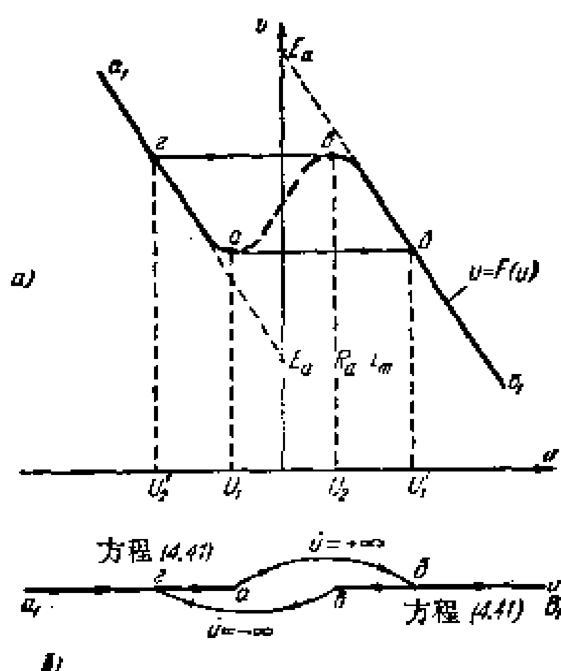


图 210

$$F(U_j)=F(U_j')$$

或

$$R_a\varphi(U_j')+\left(1+\frac{R_a}{R_g}\right)U_j'=R_a\varphi(U_j)+\left(1+\frac{R_a}{R_g}\right)U_j. \quad (4.44)$$

1）在别的问题中，例如关于两个相耦合的多谐振荡器中的振荡的问题[37]，在跳跃时，用电容器上电压的连续条件，不足以单值地确定系统在跳跃后的状态．在这些情况下，必须再补充某些假设，才能单值地确定这些状态．

如果系统中的跳跃规律，是在对"较完全的"动力学模型作极限过渡时得到的（考虑了重要的寄生参数，但假定它们趋近于零），那末，系统在跳跃后的状态，不需要任何补充条件，总是能够单值地确定的（见下册第十章）．注意到，在对多谐振荡器的"较完全的"动力学模型作极限过渡的研究之后，可证明，电压 v 在跳跃时实际上是不变的，而跳跃不仅能在 $u=U_1$ 和 $u=U_2$ 时开始，也能在区间 $U_1<u<U_2$ 中的任何 u 上开始．

这一方程的图解如图 210, a 所示. 显然, 多谐振荡器在跳跃后的状态,单值地决定于跳跃前的状态 (U_1' 与 U_2' 分别由 U_1 与 U_2 单值地确定).

这样,多谐振荡器中的振荡是周期的,由电压 u 的两种变化组成,由 U_1' 到 U_2 和由 U_2' 到 U_1 的慢变化 (有有限大的速度) 服从方程 (4.41), 而由 U_1 到 U_1' 和由 U_2 到 U_2' 的快变化决定于跳跃条件. 周期运动在图 210, a 上对应于闭曲线 $абвга$ ($бв$ 段与 $га$ 段对应于电压 u 的有限速度的"慢变化", 而 $аб$ 段与 $вг$ 段对应于跳跃式的"快变化"). 电压 u, v 和 u_{a2} 的振荡波形图如图 211 所示. 电容器 C 的电压 v 的振荡是连续的, 并具有"锯齿形"的形状, 而电子管 $Л_2$ 的屏压 u_{a2} 的振荡则接近于"矩形"波.

要确定自振周期,就要在从 $u = U_2'$ 到 $u = U_1$ 和从 $u = U_1'$ 到 $u = U_2$ 的范围内积分方程 (4.41) 或

$$dt = - C(R_a + R_g)\left[1 + \frac{R_a R_g}{R_a + R_g}\varphi'(u)\right]\frac{du}{u}, \quad (4.45)$$

因为我们假设了, 电压 u 作跳跃变化时的持续时间为零. 我们只用最简单的对称分段线性的电子管组特性曲线(图 212, a) 来计算

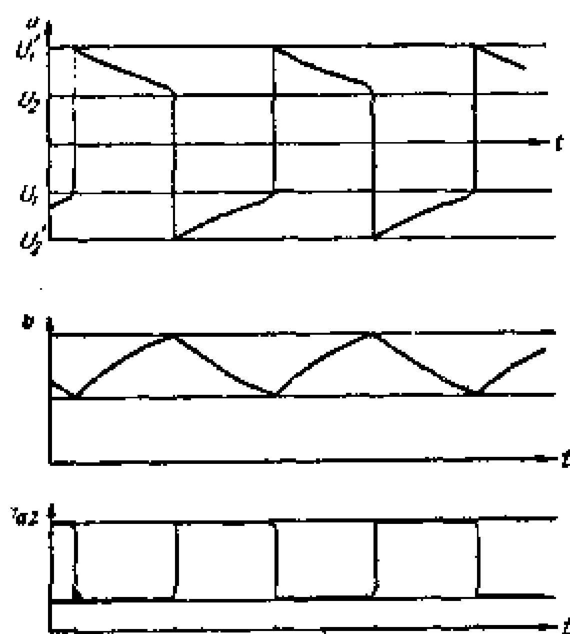


图 211

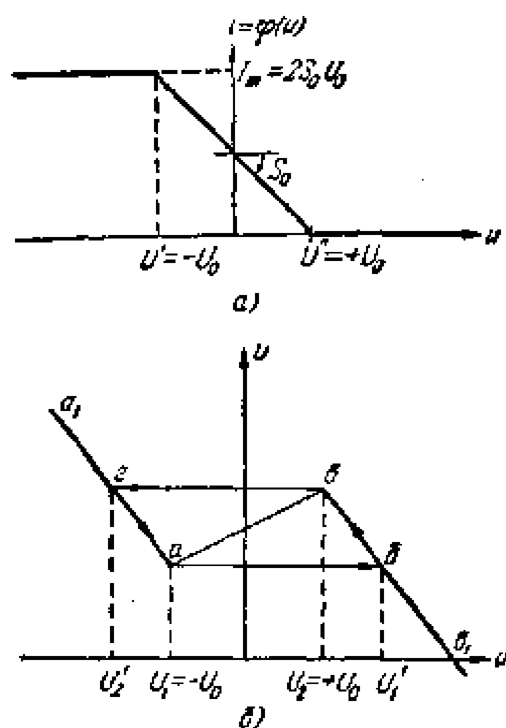


图 212

周期. 在必需作积分的区域内——在电流等于零的区域以及电流的饱和区域内 ($i = I_m = 2S_0U_0$), 这种特性曲线能充分满意地反映出真实电子管组的性质(有公共阴极电阻的电子管). 在这些区域中, $\varphi'(0) = 0$, 方程 (4.41) 是线性方程:

$$C(R_a + R_g)\frac{du}{dt} + u = 0,$$

很容易积分出来. 积分后, 便得到最能表征类似过程而又简单的周期公式[1]:

$$T = 2C(R_a + R_g)\ln(2K - 1), \tag{4.46}$$

其中,象前面一样,

$$K = \frac{S_0R_a}{1 + \frac{R_a}{R_g}}.$$

在这个公式中,除了时间常数 $C(R_a + R_g)$ 外,还有对系数 K 的对数函数关系,由后者可见,在接近激励边界时($K \to 1$ 时),振荡频率急剧地增加. 减小电容 C 时,振荡频率也增加. 不过,严格地说,当振荡频率很大时,我们就不能再把多谐振荡器看成是 1/2 自由度的系统了(不考虑电路中的微小的寄生电容),因为在这种情况下,寄生电容的作用非常重要,以致使得振荡不再是不连续的,而在形状上已接近于正弦形了.

总之,在一阶动力学模型之外,再"补充"以关于电子管 $Л_2$ 的栅压 u 之跳跃假设后,我们已经能研究多谐振荡器中的振荡了.

---

1) 在"慢"运动时间内,电容器 C 上的电压 v* 和电子管 $Л_2$ 的栅压 u 的依赖关系,如图 212, б 所示. 按方程 (4.44),对于 бв 段有:

$$\left(1 + \frac{R_a}{R_g}\right)U_1' = R_aI_m - \left(1 + \frac{R_a}{R_g}\right)U_0,$$

即

$$U_1' = U_0(2K - 1).$$

因此,沿 бв 段作"慢"运动的持续时间等于

$$C(R_a + R_g)\ln(2K - 1).$$

根据电子管组特性曲线的对称性,沿 га 段之"慢"运动的持续时间也相同;因此,求全周期的公式就是 (4.46).

* 原书为 u——译者注.

在这种"补充"了的动力学模型中，电压 u 在区间 $U_2' < u < U_1'$ 内已不能单值地确定系统的状态，因为在电压具有这些值时，运动可以有不同的规律，要看发生那种运动("慢"的或"快"的，跳跃式的)而定. 因此，补充了跳跃假设的模型的相线已不是直线 u，而是有"重迭"的线，如图 210，$б$ 所示，这个相线拓扑地等价于图 210，a 中的线 $a_1aб$ 与 $в_1вг$. 在线段 a_1a 与 $в_1в$ 上，运动决定于方程(4.41)，而用细线表示的由 a 到 $б$ 与由 $в$ 到 $г$ 的跳跃，决定于电压 u 的跳跃假设 (在 $aб$ 段上 $du/dt = +\infty$，在 $вг$ 段上 $du/dt = -\infty$). 象本章 §7 中所分析过的其他例子一样，相线也有闭的相轨线，它对应于多谐振荡器中的不连续周期振荡.

我们就此结束对一阶动力学系统的研究 (以后在下册第十章中还要讨论这种系统中的不连续振动)，下面我们转入对二阶动力学系统的研究.

第五章　二阶动力学系统[1]

在这一章中，我们将研究(单自由度的)二阶自治动力学系统，亦即其运动用两个一阶微分方程

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y) \tag{5.1}$$

来描述的动力学系统(真实物理系统的动力学模型). 这种系统是我们研究的对象中最一般的情况. 正象我们说过的，可以化为两个一阶方程进行研究(在适当的简化假设下)，有各种电工的与无线电的系统，特别是普通简化假设下的电子管振荡器；此外，还有许多机械系统，一系列的飞行动力学问题等，都可归为这种问题来研究.

必须着重指出，为了对这种物理系统的运动进行数学研究，只用微分方程组(5.1)是不够的：除了方程组(5.1)表示的运动规律外，还必需知道该系统的各种可能的状态，换句话说，还要知道动力学系统的相空间，此相空间内的点和系统的状态是相互单值且连续地相对应的[2].

不过，相空间的特性应该从物理问题中导出，微分方程的形式也是这样. 例如，若我们知道，当 x 改变了 2π 时，系统回到原来的状态，那末，这就给我们指出了相空间的特性，它的连通性，它的“圆柱性”. 当相空间尚未选定之前，微分方程本身并不能确定系统的可能运动的特性，以及相空间中可能的相轨线的特性. 要说明这点，我们讨论一个最简单的线性系统：

---

1) §5与§12是 H. A. 热列佐夫改写的，§1，§3(第1小节)，§7(第2，第3小节)，§9和§11是他重写的.

2) 当然，在现在讨论的(单自由度的)二阶动力学系统的情况中，相空间是二维的，即某一曲面，因为系统的状态可以用一对数 x，y 完全给定.

$$\frac{dx}{dt}=a,\quad \frac{dy}{dt}=b.$$

如果 x 与 y 是相平面上的普通笛卡儿坐标，那末相轨线就是直线。相平面上出现"逃逸"运动的连续统．如果 x 与 y 是环面*上的正交曲线坐标（例如，x 是子午面的方位角，而 y 是顶点在环面轴上的极角），那末对于同一个微分方程组，相轨线或者形成闭曲线的连续统(如果 a 与 b 可通约)，亦即周期解的连续统，或者是环面上处处稠密的轨线连续统（如果 a 与 b 是不可通约的），亦即所谓的概周期解连续统．这个例子说明了，相空间的性质和连通性对相轨线性状图象的意义．由同一组积分曲线方程决定的性状的一般规律，在平面与环面的情况中是不同的．

在这一章中，我们只讨论对应用来说最重要的情况，即相面是普通平面的情况．以后在下册第七章中，将以例子的形式，来讨论对力学具有重要意义的相柱面，而在下册第八章中，还研究一些有多叶相面的系统．

§1. 相平面上的相轨线与积分曲线

我们将研究两个自治的一阶微分方程的组[1]：

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y),\tag{5.1}$$

它描述的是某一二阶动力学系统的运动，并假设这个动力学系统的状态，相互单值地、连续地对应于相平面 x, y 上的点．又设函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$（在整个相平面上)是解析的[2]．

关于微分方程组之解的存在性与唯一性的科希定理条件（见

---

* "环面"是玉石手镯形物体之表面——译者注．

1) 应指出，如果我们有一个二阶方程 $\ddot{x}=f(x,\dot{x})$，那末作代换 $\dot{x}=y$，总可以把它化为 $\dot{x}=y$，$\dot{y}=f(x,y)$ 的形式，即(5.1)的形式．

2) 要求函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 解析，只是为了简化证明．这一要求，可以用这些函数存在一定阶次（在许多情况下是一阶）的连续偏导数的比较弱的要求来代替．

下册附录 I)，对于方程 (5.1) 显然是满足的，因此存在唯一的函数组：$x = x(t)$，$y = y(t)$，满足方程 (5.1) 与给定的初始条件：当 $t = t_0$ 时，$x = x_0$，$y = y_0$。因为解依赖于初始条件，故有时为了着重表示这一关系，我们将把解写为下列形式：

$$x = \varphi(t - t_0;\ x_0,\ y_0),\quad y = \psi(t - t_0;\ x_0,\ y_0)^{1)}. \tag{5.2}$$

应注意到，φ 与 ψ 不仅是时间 t 的解析函数，而且还是系统初始状态的坐标 x_0，y_0 的解析函数.

我们可以把任一解 (5.2) (具有给定的 x_0，y_0，t_0) 看成是相平面 x，y 上某一曲线的参数方程，在给定系统的运动中，相点将沿这一曲线运动. 按照我们所用的术语，这种曲线就称为**相轨线**.

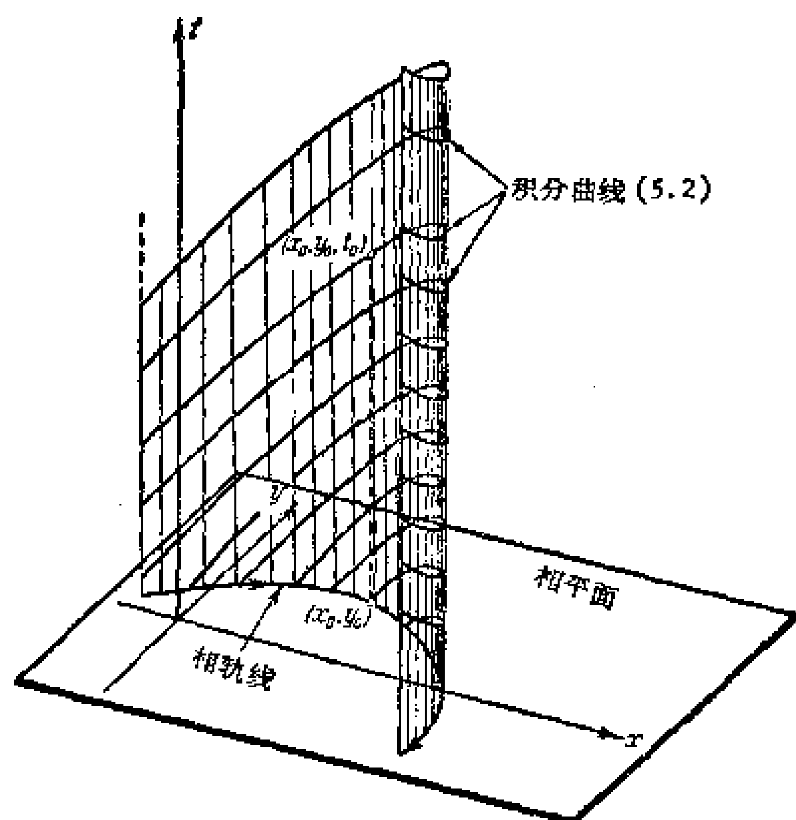


图 213

1) 只是由于方程 (5.1) 的自治性，才能把我们所研究的系统的解写为这种形式. 实际上，令 $x = \varphi(t;\ x_0,\ y_0)$，$y = \psi(t;\ x_0,\ y_0)$ 是方程 (5.1) 的满足初始条件：当 $t = t_0$ 时，$x = x_0$，$y = y_0$ 的解；显然，函数 φ 与 ψ 是这样的，对它们来说有：$\varphi(0;\ x_0,\ y_0) \equiv x_0$ 与 $\psi(0;\ x_0,\ y_0) \equiv y_0$. 因为方程 (5.1) 是自治的 (其右端——函数 P 与 Q——不明显地依赖于时间 t)，所以函数组 (5.2) 是它的解，它们是(由柯希定理)满足初始条件：$t = t_0$ 时，$x = x_0$，$y = y_0$ 的唯一解.

另一方面，我们也可以把解（5.2）看成是空间 x, y, t 中的曲线方程——看成是方程组（5.1）的积分曲线的方程．很明显，每条相轨线都是空间 x, y, t 中某条积分曲线在相平面上的投影[1]．并且，由方程（5.1）的自治性，其所有具有同一的 x_0, y_0，但有不同的 t_0 的积分曲线（5.2），在空间 x, y, t 中形成母线平行于 t 轴的柱面，因此，投影到相平面上就是同一条相轨线（图 213）．换句话说，每一条相轨线对应于动力学系统的一个运动的集合，这些运动都通过同一个状态，但彼此间的起始时间是不相同的．

因为方程（5.1）满足科希定理的条件，那末通过空间 x, y, t 的每一点，只有该方程组的一条积分曲线，亦即，空间 x, y, t 中的积分曲线不可能相交．同样，由方程（5.1）的自治性可知，相轨线也不能相交，因为通过相平面上的每一点，只能有一条相轨线[2]．

为了说明我们以上所说的，研究下面的例子．如果函数 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 在某个点 $(\bar{x}, \bar{y})$ 上都等于零，那末方程（5.1）就有解：$x \equiv \bar{x}, y \equiv \bar{y}$（而在空间 x, y, t 中，有平行于 t 轴的积分直线）；对应这一平衡状态的相轨线，就是一个（孤立的）点．根据已指出的相轨线的性质，沿其他相轨线运动的相点，在任何有限的 t 时，都不能到达平衡状态．完全相同，不在极限环上的相点，在任何有限时间之内，也不可能到达极限环上．这样，在右端满足科希定理条件的方程（5.1）所描述的系统中，要建立起平衡状态或建立起周期振动，只能是渐近的（只当 $t \to +\infty$ 时）．

如果把方程（5.1）中的两式相除，消去时间，便得到一个一阶方程：

1）积分曲线（5.2）在平面 x, t 与 y, t 上的另外两个投影，显然，就是系统的这一运动的 x 与 y 的波形图．

2）事实上，例如，如果通过相平面上的某点 (x^*, y^*) 有两条相轨线，那末，就将有方程（5.1）的两条不同的积分曲线通空间 x, y, t 中直线 $x = x^*, y = y^*$ 上的每一点，这与科希定理矛盾．

为了比较，可看出，如满足科希定理的条件，非自治系统 $\dot{x} = P(x, y, t)$，$\dot{y} = Q(x, y, t)$ 的积分曲线，和前面一样，在空间 x, y, t 中不相交．但在平面 x, y 上的投影一般地将是相交的．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \tag{5.3}$$

在许多情况下，这个方程都比二阶方程组(5.1)更容易积分．这一方程的解 $y=y(x; C)$ (或隐式的 $F(x, y)=C$)，其中 C 是积分常数，给出一积分曲线族，亦即给出平面 x, y 上的曲线族，其上每一点都有着由方程(5.3)确定的切线斜率[1]．把科希定理用于方程(5.3)，可以证明，由于函数 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 的解析性，除去使方程失去意义的奇点外，通过平面 x, y 的每一点，有一条且只有一条方程 (5.3) 的积分曲线． 在所研究的情况中，奇点只是使 $P(x, y)=0$ 及 $Q(x, y)=0$ 的点，亦即，系统 (5.1) 的平衡状态[2]．在这些点上，积分曲线是可以相交的．

很容易看出，每条相轨线都是积分曲线，或者至少是它的一部分，而不通过奇点的积分曲线 (或它的弧段) 必定是相轨线．另一方面，通过奇点的积分曲线总是由几条相轨线组成的．同时，积分较简单的方程 (5.3)，并求出其积分曲线，我们同时就得到了相平面的相轨线划分：相轨线可以是奇点 (平衡状态)，不通过奇点的积分曲线，和两个奇点间的 (或在奇点与无限远间的) 积分曲线线段．当然，积分曲线(5.3)不能给我们指出相点沿求出的相轨线之运动的方向，因为其中消去了时间．相点运动的方向要由方程(5.1) 来确定．

§ 2. 一般形式的线性系统

先研究(5.1)型的最简单的动力学系统，也就是由两个一阶线性微分方程

$$\frac{dx}{dt}=ax+by, \quad \frac{dy}{dt}=cx+dy \tag{5.4}$$

1) 以后我们将积分曲线理解为方程 (5.3) 的积分曲线．

还要注意到，两条相互为解析延拓的微分方程(5.3)之解的曲线，虽然通过使方程失去意义的点，通常仍称为是一条积分曲线．例如，在方程 (5.3) 可以求积的情况中，我们自动地就得到了对应于这样理解之积分曲线的解．

2) 其证明与最简单的保守系统中所作的证明 (见第二章 § 2) 完全相似．

所描述的系统，其中 a, b, c, d 是常数，同时 x 与 y 我们假定是相平面上的笛卡儿坐标.

我们知道，方程组 (5.4) 的通解是[1]

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}, \\ y &= C_1\kappa_1e^{\lambda_1 t} + C_2\kappa_2e^{\lambda_2 t}, \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

其中 λ_1 与 λ_2 是特征方程

$$\lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0 \tag{5.6}$$

的根，而所谓的"分布系数" κ_1 与 κ_2 决定于关系式:

$$\left.\begin{aligned} a - \lambda_k + b\kappa_k &= 0, \\ c + (d - \lambda_k)\kappa_k &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

(二式组成相容的方程组，因为 λ_k 是特征方程的根)或

$$\kappa_1 = \frac{\lambda_1 - a}{b} = \frac{c}{\lambda_1 - d}, \quad \kappa_2 = \frac{\lambda_2 - a}{b} = \frac{c}{\lambda_2 - d}. \tag{5.8}$$

注意到

$$\kappa_1 + \kappa_2 = \frac{\lambda_1 - a}{b} + \frac{\lambda_2 - a}{b} = \frac{d - a}{b}$$

及

$$\kappa_1\kappa_2 = \frac{\lambda_1 - a}{b} \cdot \frac{\lambda_2 - a}{b} = -\frac{c}{b},$$

因此，分布系数是方程

$$b\kappa^2 + (a - d)\kappa - c = 0 \tag{5.9}$$

的根.

我们将不研究运动(作为时间函数)特性和特征方程之根的特性间的依赖关系，在 λ 与 κ 是复数的情况下[2]，也不把解化为实数形式，而直接地转入分析相平面上可能有的轨线的特性.

为此，利用在第一章中对 $a = 0$ 的特殊情况曾用过的那种线性齐次坐标变换. 也就是用线性齐次变换

$$\xi = \alpha x + \beta y, \quad \eta = \gamma x + \delta y, \tag{5.10}$$

---

1) 设两个根均有不为零的实部，且不是重根.

2) 不难看出，若 $(a - d)^2 + 4bc < 0$，则 λ 与 κ 都是复数.

就可以把方程组(5.4)化为所谓的"正则"形式:

$$\frac{d\xi}{dt}=\lambda_1\xi,\quad \frac{d\eta}{dt}=\lambda_2\eta, \tag{5.11}$$

其中 λ_1 与 λ_2 是某两个暂时还不知道的常数.

不难证明,在对方程(5.6)的根所作的假设下,这个变换总是可能的. 微分变换公式(5.10),得:

$$\frac{d\xi}{dt}=\alpha\frac{dx}{dt}+\beta\frac{dy}{dt};\quad \frac{d\eta}{dt}=\gamma\frac{dx}{dt}+\delta\frac{dy}{dt}.$$

将基本的微分方程组(5.4)中的 dx/dt 与 dy/dt 的表达式代入,则得到关系式:

$$\lambda_1(\alpha x+\beta y)=\alpha(ax+by)+\beta(cx+dy),$$
$$\lambda_2(\gamma x+\delta y)=\gamma(ax+by)+\delta(cx+dy).$$

比较等式左右两端 x 与 y 的系数,得出四个对 α, β, γ, δ 的线性齐次方程的方程组:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha(a-\lambda_1)+\beta c=0,\quad \gamma(a-\lambda_2)+\delta c=0,\\&\alpha b+\beta(d-\lambda_1)=0,\quad \gamma b+\delta(d-\lambda_2)=0.\end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

要使这些方程不恒等于零,并能给出 α, β, γ, δ 的解, λ_1 与 λ_2 必需是方程

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0 \tag{5.6}$$

的根,亦即普通特征方程的根. 线性齐次方程组(5.12)的每一对方程,都只能确定未知量间的比值. 第一对确定比值 α/β, 第二对确定 γ/δ. 因为按照我们的假设,特征方程的根不互等,故这些比值也不互等,因而可以选 α, β, γ, δ 使行列式

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0.$$

这个行列式不为零,保证了方程(5.10)可以给出 x 与 y 的解,因而保证了变换的相互单值性. 这样,我们看到,在非退化情况下*,把系统变换为正则形式总是可能的.

* 行列式 $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0$ 的情况称为非退化情况,否则称为退化情况,在后一情况中, ξ 与 η 成比例,因而失掉面对面之变换的意义——译者注.

我们来讨论可能出现的各种情况:

1) λ_1 与 λ_2 为实根且同号. 这时,变换的系数是实数,我们把实平面 x, y 变换成实平面 ξ, η (我们将在积极的意义下来解释相平面的变换). 我们的任务在于研究变换后的相平面 ξ, η, 其上正则方程组

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1\xi, \quad \frac{d\eta}{dt} = \lambda_2\eta \tag{5.11}$$

成立,然后在原来的平面 x, y 解释所得的结果.

把两个正则方程相除,得:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\eta}{\xi}. \tag{5.13}$$

积分这个方程,求出:

$$\eta = C|\xi|^a, \quad 其中\ a = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \tag{5.14}$$

约定以 λ_2 表示特征方程的根中模数较大的一个 (显然, 这并不使讨论有失一般性). 这时,由于 λ_1 与 λ_2 同号, $a > 1$, 故积分曲线是抛物线型的 (图 214). 所有的积分曲线 (除 η 轴外, η 轴对应于 $C = \infty$) 都在坐标原点与 ξ 轴相切, ξ 轴也是方程(5.13)的积分曲线. 坐标原点是奇点. 我们知道它是一个结点型的奇点. 不难说明相平面上运动的方向.

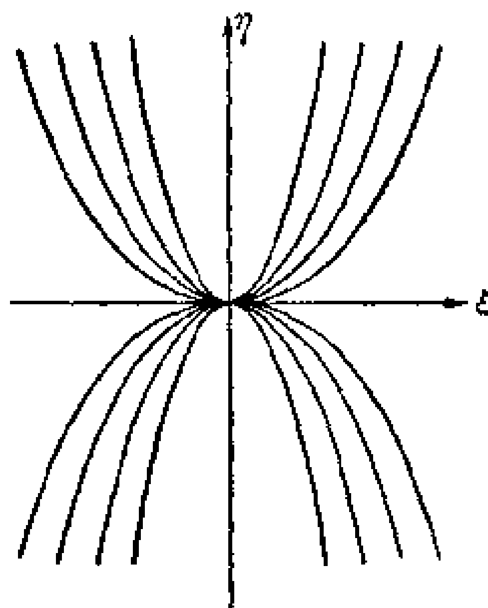


图 214

如果 λ_1 与 λ_2 是负的, 那末, 从方程 (5.11) 可以看到, $|\xi|$ 与 $|\eta|$ 随时间而减少. 相点随时间增加而向坐标原点接近, 但是在有限时间内, 总不会到达原点, 因为在整个平面 ξ, η 上科希定理成立,而"到达原点"却是与科希定理矛盾的. 由此可见, 坐标原点是个稳定的结点. 如果 λ_1 与 λ_2 是正的, 那末

随时间的增加，$|\xi|$ 与 $|\eta|$ 增加，而相点将远离坐标原点．因此，我们得到不稳定的结点．

现在反过来看相平面 x, y．我们知道，这时积分曲线之性状的一般性质，在平衡状态附近并不改变，但是积分曲线在奇点的切线已经不与坐标轴重合．在平面 x, y 上，阐明积分曲线在奇点的切线方向是很重要的．因为在平面 ξ, η 上，轴 $\xi=0$ 或 $\eta=0$ 就是这样的切线，所以，只要说明平面 x, y 上的什么直线对应于平面 ξ, η 上的直线 $\xi=0$ 与 $\eta=0$，就能回答这个问题．从方程 (5.10) 可知，轴 ξ（亦即直线 $\eta=0$）在平面 x, y 上对应于通过坐标原点的直线

$$\gamma x+\delta y=0, \quad \text{或 } y=-\frac{\gamma}{\delta} x, \tag{5.15}$$

其角系数是（根据 (5.12)）

$$\kappa_1=-\frac{\gamma}{\delta}=\frac{c}{a-\lambda_2}=\frac{d-\lambda_2}{b}.$$

类似地，轴 η（直线 $\xi=0$）在平面 x, y 上对应于直线

$$\alpha x+\beta y=0, \quad \text{或 } y=-\frac{\alpha}{\beta} x. \tag{5.16}$$

这一直线也通过原点，但角系数不同：

$$\kappa_2=-\frac{\alpha}{\beta}=\frac{c}{a-\lambda_1}=\frac{d-\lambda_1}{b}.$$

不难看出，这些直线的角系数就等于由关系式 (5.7) 或 (5.8) 确定的分布系数 κ_1 与 κ_2，因此，可以当作方程 (5.9) 的根来求．

直线 $y=\kappa_1 x$ 与 $y=\kappa_2 x$，一方面是方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{cx+dy}{ax+by}$$

的积分曲线[1]（与直线 $\xi=0$ 和 $\eta=0$ 是方程 $d\eta/d\xi=a\eta/\xi$ 的积分曲线相似）．另一方面，第一根直线（对应于平面 ξ, η 上的轴 ξ）

1) 直线 $y=\kappa_1 x$ 或 $y=\kappa_2 x$ 都不是一条轨线，而是由三条轨线组成的（两条是向着或背着平衡状态的运动，一个就是平衡状态本身）．

还是所有的积分曲线的切线，除了直线 $y=\kappa_2 x$ 以外[1]. 根据前面的讨论，不难得出当 λ_1 与 λ_2 是实数且同号时，在一般情况下，相轨线在稳定的（图 215）或不稳定的（图 216）结点附近的特性.

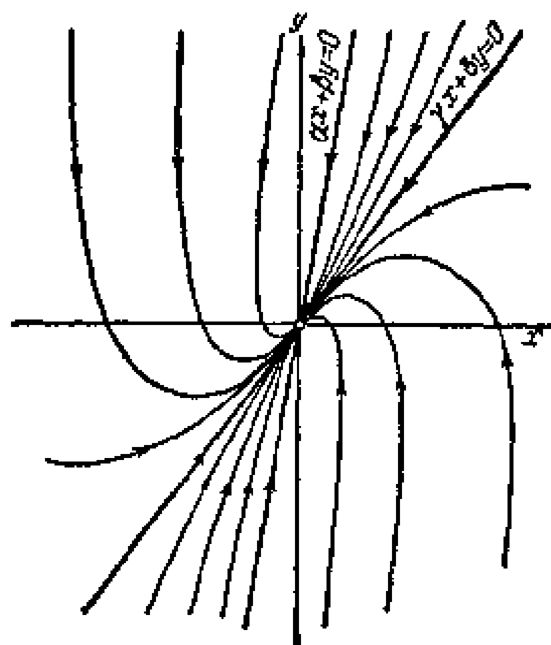


图 215

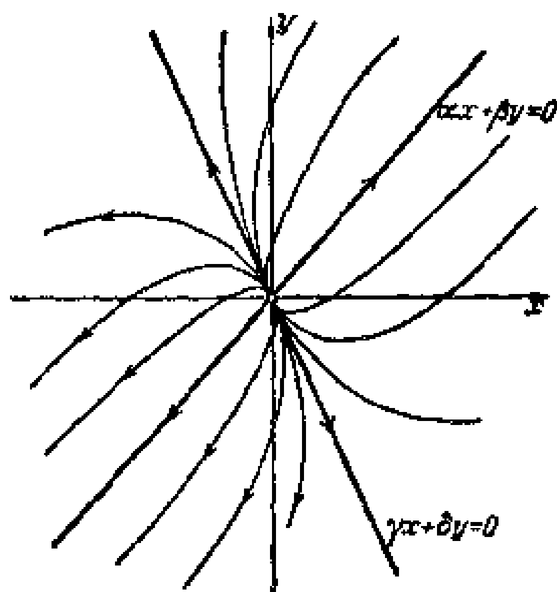


图 216

2）λ_1 与 λ_2 是实根但不同号. 由坐标 x, y 到坐标 ξ, η 的变换也是实的. 平面 ξ, η 上的正则组也同样是

$$\frac{d\xi}{dt}=\lambda_1\xi, \quad \frac{d\eta}{dt}=\lambda_2\eta, \tag{5.11}$$

不过现在 λ_1 与 λ_2 不同号.

相平面上曲线的方程是

$$\frac{d\eta}{d\xi}=-a\frac{\eta}{\xi}, \quad 其中\ a=\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}. \tag{5.17}$$

积分这个方程，求出：

$$\eta=C|\xi|^{-a}. \tag{5.18}$$

这个方程决定一个双曲线型的曲线族，以两个坐标轴为渐近线（当

1）对于积分曲线连续统（在结点）的切线，根据特征方程的小模数的根 λ_1，其方向 κ_1 决定于关系式 (5.7) 或 (5.8). 如果积分曲线在结点的切线方向，不预先从特征方程的解来确定，而作为方程 (5.9) 的根来确定，那末积分曲线的切线方向显然对应于使式 $|a+b\kappa|$ 有较小值的根 κ，因为根据 (5.7)，$\lambda_k=a+b\kappa_k$.

$a=1$ 时，便得到普通的等边双曲线). 坐标轴在这个情况中也是积分曲线：它们是通过坐标原点的唯一的两条积分曲线(图 217)[1].

坐标原点在这里当然也是奇点. 我们知道，这就是所谓的"鞍点"型的奇点(在山地的鞍形区附近的水平线就象这样).

根据已有的知识，在这一情况下，可以说明相点在平衡状态附近沿相轨线运动的特性. 例如，令 $\lambda_1>0$，而 $\lambda_2<0$，这时，在 ξ 轴上的相点将远离坐标原点，而在 η 轴上的就将无限地接近坐标原点，但在有限时间内不能到达. 根据连续性，很容易指出沿其余相轨线的运动方向 (图 217).

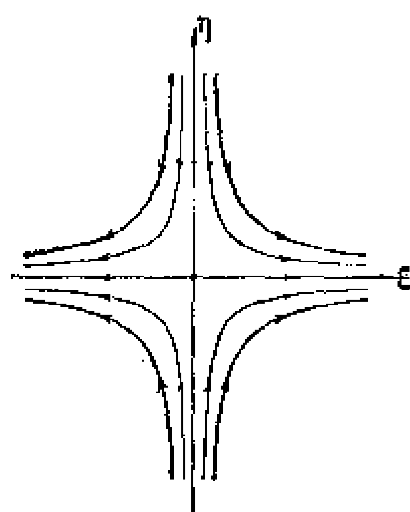


图 217

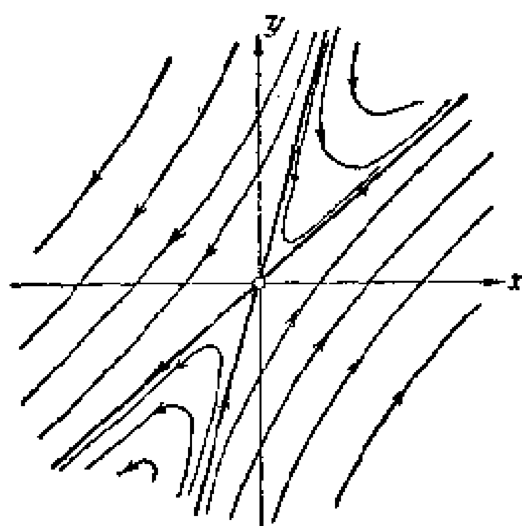


图 218

我们已经知道，鞍点型的奇点是不稳定的. 现在回到坐标 x, y，按照多次应用过的讨论方式，在坐标原点附近，我们得到完全相同的轨线性质的定性图象 (图 218). 象前一情况那样，通过奇点之直线(鞍点的分界线)的角系数决定于方程

$$b\kappa^2+(a-d)\kappa-c=0.$$

当 $ad-bc=0$ 时，就发生特征方程 (5.6) 的一个根 (设为 λ_1) 等于零的情况，这就是研究过的结点与鞍点情况之间的边界情况. 在这个情况中，方程 (5.4) 右端的系数互成比例 ($a/c=b/d$)，因

1) 每一条通过坐标原点的积分直线都由方程组 (5.11) 的三条相轨线组成：两条是向着(或背着)平衡状态的运动，一个是平衡状态.

而直线 $ax+by=0$ 上所有的点都是方程组(5.4)的平衡状态. 其余的积分曲线组成角系数为 $\kappa_2=c/d$ 的平行线族，相点沿这些直线或接近平衡状态，或离开平衡状态，这决定于特征方程第二个根 $\lambda_2=a+d$ 的符号(图 219)[1].

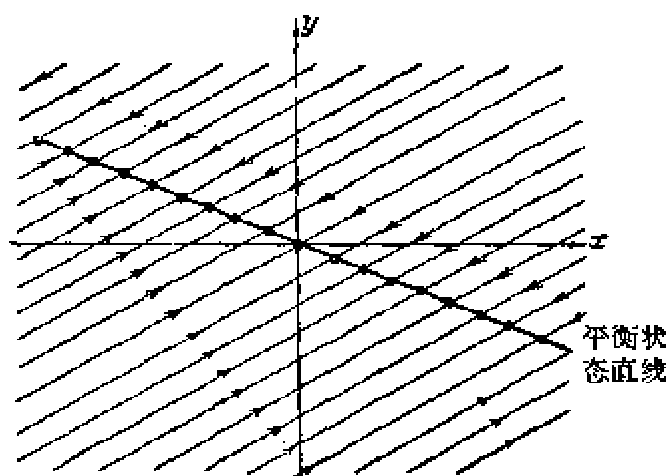


图 219

3) λ_1 与 λ_2 是共轭复根. 不难看出，当 x 与 y 是实数时，ξ 与 η 却是复数共轭的. 不过，若再引入一个中间变换

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1=a_1+jb_1,\ \xi=u+jv,\\ \lambda_2=a_1-jb_1,\ \eta=u-jv,\end{aligned}\right\}\tag{5.19}$$

那末在这一情况中，也可以容易地化为实线性齐次变换. 给 a_1, b_1, u, v 以实数值，就可以证明在我们的假设下，由 x, y 到 u, v 的变换是实的，线性的，齐次的，并具有异于零的行列式.

由方程(5.19)，得:

$$\frac{du}{dt}+j\frac{dv}{dt}=(a_1+jb_1)(u+jv),$$

由此，

$$\frac{du}{dt}=a_1u-b_1v;\quad \frac{dv}{dt}=a_1v+b_1u.\tag{5.20}$$

为了研究这个微分方程组，先来分析积分曲线在相平面上的形状. 这些曲线的微分方程

$$\frac{dv}{du}=\frac{a_1v+b_1u}{a_1u-b_1v}\tag{5.21}$$

在化为极坐标后，很容易积分. 令 $u=r\cos\varphi$, $v=r\sin\varphi$. 化为极坐标 r, φ, 得:

---

1) 图 219 上表示的是 $a+d>0$ 的情况，这时平衡状态都是稳定.

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{a_1}{b_1} r,$$

从此方程，得到：

$$r = Ce^{\frac{a}{b}\varphi}. \tag{5.22}$$

这样，我们看到，相平面 u, v 上的积分曲线族是对数螺线族，每条螺线都以坐标原点为渐近点．坐标原点是焦点型的奇点(图 220)．

我们来说明相点沿相轨线之运动的特性．把方程(5.20)中的第一个方程乘 u，第二个乘 v，再相加，便得：

$$\frac{1}{2}\frac{d\rho}{dt} = a_1\rho, \quad 其中\ \rho = u^2 + v^2. \tag{5.23}$$

这样，当 $a_1 < 0(a_1 = \mathrm{Re}\,\lambda)$，相点连续地趋近于坐标原点，但在有限时间内不能到达这一点(因这和科希定理矛盾)，这也就意味着，$a_1 < 0$ 时，原点是**稳定的焦点**．

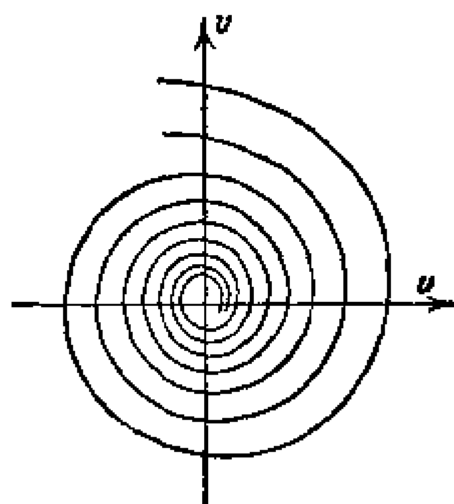


图 220

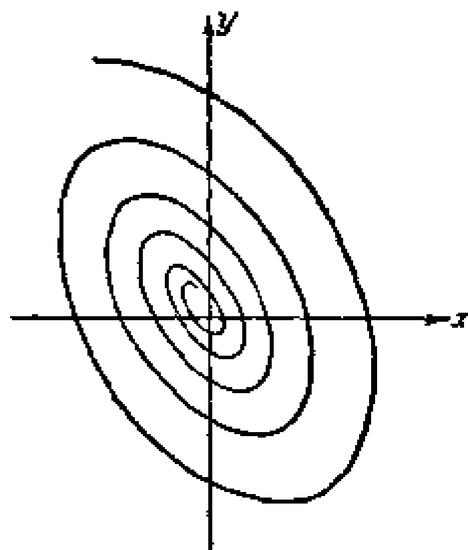


图 221

如果 $a_1 > 0$，那末相点将连续地离开坐标原点；而原点便是**不稳定的焦点**．

当从平面 u, v 过渡到原来的相平面 x, y 时，螺线仍然是螺线，不过有所变形(图 221)[1]．

1) 在平面 u, v 上，圆 $u^2 + v^2 =$ 常数就是所谓的"无切环"，亦即和相轨线相交(没有切点)的闭曲线．这些圆过渡到平面 x, y 上就是椭圆．

$$by^2 + (a - d)xy - cx^2 = 常数,$$

因而在奇点是焦点型的情况下，这就是方程组 (5.4) 之相轨线的无切环．

当 $a_1 = 0$ 时，平面 u, v 上的相轨线是圆 $u^2 + v^2 =$ 常数，在平面 x, y 上对应于椭圆

$$by^2 + (a - d)xy - cx^2 = \text{常数}$$

(注意，当 $a + d = 0$ 时，有 $a_1 = 0$)，在这一情况中，奇点是中心型的（图 222）.

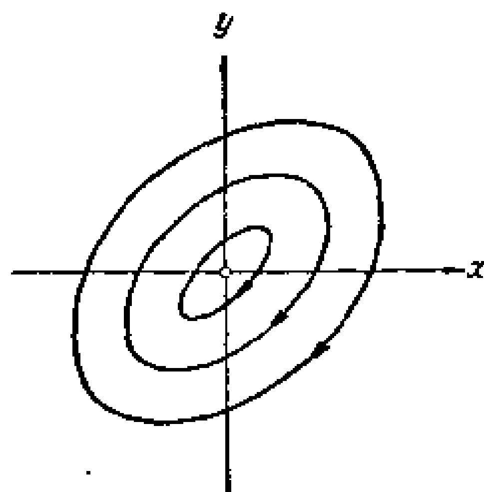


图 222

现在综述一下我们研究的结果. 在我们研究的一般的线性系统中，在非退化的情况下（亦即当 $ad - bc \neq 0$ 时），可以按特征方程的根的特性，把平衡状态分为六种类型:

1）稳定的结点（λ_1 与 λ_2 是负实数）;

2）不稳定的结点（λ_1 与 λ_2 是正实数）;

3）鞍点（λ_1 与 λ_2 是异号的实数）;

4）稳定的焦点（λ_1 与 λ_2 是复数，且 $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$）;

5）不稳定的焦点（λ_1 与 λ_2 是复数，且 $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$）;

6）中心（λ_1 与 λ_2 是虚数）.

前五种平衡状态是“粗的”：当方程（5.4）右端有充分微小的改变时，其特性不改变（方程的右端及其一阶导数的变化都微小时）.

平衡状态的类型和特征方程的根的特性间的联系，可以用以下方式清晰地表示出来.

引入记号:

$$\sigma = -(a + d), \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

这时，特征方程化为

$$\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0. \tag{5.24}$$

对于不同的 σ 与 Δ 有不同的根 λ_1 与 λ_2. 研究以 σ 与 Δ 为直角笛

卡儿坐标的平面，并在平面上标出对应于不同平衡状态特性的区域(图 223)。

不难看出，平衡状态稳定的条件就是 λ_1 与 λ_2 有负实部．而 λ_1 及 λ_2 有负实部的充分必要条件是不等式：$\sigma>0$；$\Delta>0$．在这个图上，这些条件对应于分布在第一象限中的点．如果 λ_1 与 λ_2 是复数，奇点是焦点型的．平面 σ，Δ 上有 $\sigma^2-4\Delta<0$ 的点，即在抛物线 $\sigma^2=4\Delta$ 内部的点满足这个条件．半轴 $\sigma=0$，$\Delta>0$ 对应中心型的奇点．类似地，如果 $\Delta<0$，λ_1 与 λ_2 就是异号的实数，即奇点是鞍点型的，等等．总之，我们获得了把参数 σ，Δ 的平面划分为对应于不同类型平衡状态的区域的图象(图 223)．如果线性方程组的系数 a，b，c，d 依赖于某个参数，那末当这个参数变化时，σ 与 Δ 也相应地改变．这样，在平面 σ，Δ 上，我们将有一条曲线，它在参数的某些分枝值上，从一个区域过渡到另一个区域．从图上可以看出这种过渡是怎样发生的．如果除去特殊情况(通过坐标原点)，那末不难看出，鞍点会过渡到稳定或不稳定的结点；稳定的结点可以过渡到鞍点或稳定的焦点，等等．我们指出(以后要用到)，等根的情况对应于结点区与焦点区之间的边界．如果线性方程组的系数依赖于两个参数，那末通常作出这些参数的平面，然后在这个参数平面上，画出对应于我们刚讨论过的分区图的图形，最为合适．

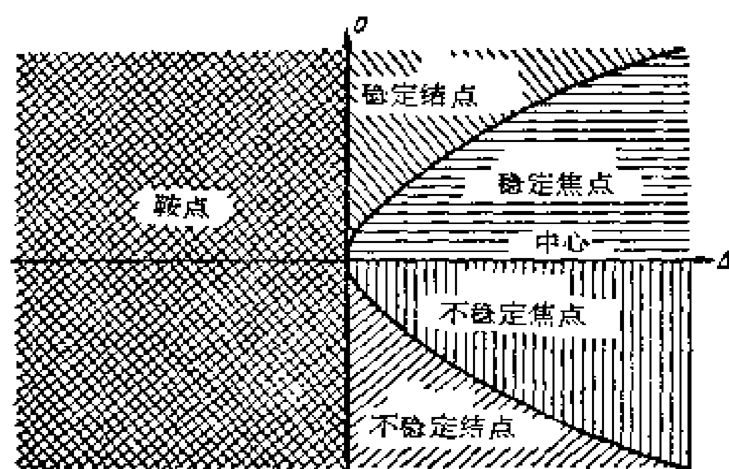


图 223

§ 3. 线性系统的例子

我们举两个电路的例子来说明上述线性系统的平衡状态的类

型，这两个电路，在相应的简化假设下，可用线性微分方程来描述，改变其中的参数就可以得到任何类型的平衡状态．

1. 负阻管振荡器的微振荡　　在第一章（§7，第2小节）中，我们已经把这个电路当作具有"推力"的系统（当 $RS_0 > 1$）的例子讨论过了．现在我们来研究，当工作点在四极管特性曲线下降段时，负阻管振荡器在平衡状态附近的微振荡．对于这种电路，可得（见方程（1.76））以下二阶线性微分方程：

$$LC\frac{d^2u}{dt^2} + [RC - LS_0]\frac{du}{dt} + [1 - RS_0]u = 0,$$

如果引入无量纲时间 $t_{新} = \omega_0 t$，其中 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$，及无量纲参数 $r = \omega_0 RC$，$s = \omega_0 LS_0$，便化为

$$\ddot{u} + (r - s)\dot{u} + (1 - rs)u = 0 \tag{5.25}$$

（这里字母上的点号代表对新的无量纲时间的微分）．

特征方程

$$\lambda^2 + (r - s)\lambda + (1 - rs) = 0 \tag{5.26}$$

的根，以及所研究之平衡状态的类型，是依赖于电路参数 r 与 s 的．为了说明这个关系，我们在这两个无量纲参数平面上（在第一象限内），作出对应于负阻管振荡器在特性曲线下降段上的各种平衡状态的区域（图224）．

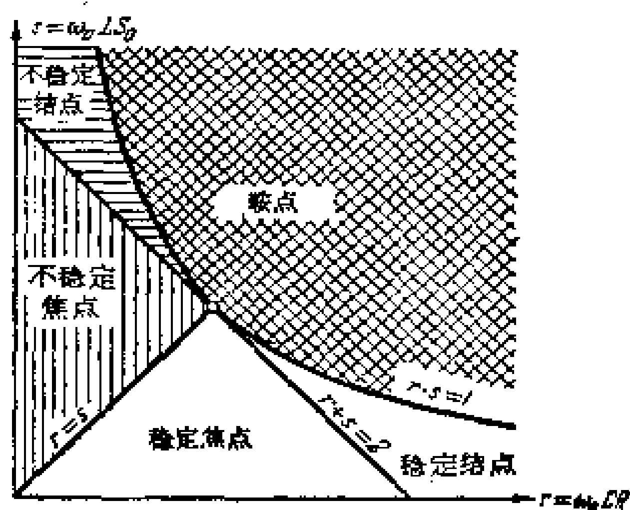


图　224

当 $rs > 1$，亦即在双曲线 $rs = 1$ 以上，特征方程（5.26）有异号的实根，亦即，平衡状态是鞍点．当

$$(r - s)^2 < 4(1 - rs)$$

或

$$(r + s)^2 < 4$$

时，亦即，在直线 $r + s = 2$ 以下的参数值，特征方程有复根，这时，平衡状态是焦点．在这一直线与双曲线 $rs = 1$ 之间的参数值的区域中，平衡状态是结点．结点或焦点的稳定性，我们

已见到过，决定于特征方程中 λ 之一次项的系数的符号：就是说，当 $r > s$ 时，结点或焦点是稳定的，而当 $r < s$ 时，是不稳定的。于是，直线 $r = s$ 到与双曲线 $rs = 1$ 的交点的一段，和双曲线在交点右边的一段，组成振荡器的稳定区域的边界。如果平衡状态不稳定，那末负阻管振荡器会走出这个平衡状态的邻域。但是，利用线性方程，我们不能肯定振荡器中会建立什么样的状态。

图 225

2. “万能”电路 作为一般线性系统的第二个例子，我们取所谓的“万能”电路[125]，如图 225 所示，图 226 是它的等效电路，当然这是经过适当的理想化，特别是“线性化”所得到的。就是说，我们把两个电子管的特性曲线都当作是线性的。我们已不止一次地指出过，这种假设只有当电子管栅压在小范围内变化时才有意义，因此，利用线性化我们不可能考虑在变数变化的整个区域中的系统的性状。不过在一定的有限区域中，我们可以认为系统是线性的，而系统的性状在这区域内将能得到正确的描述。

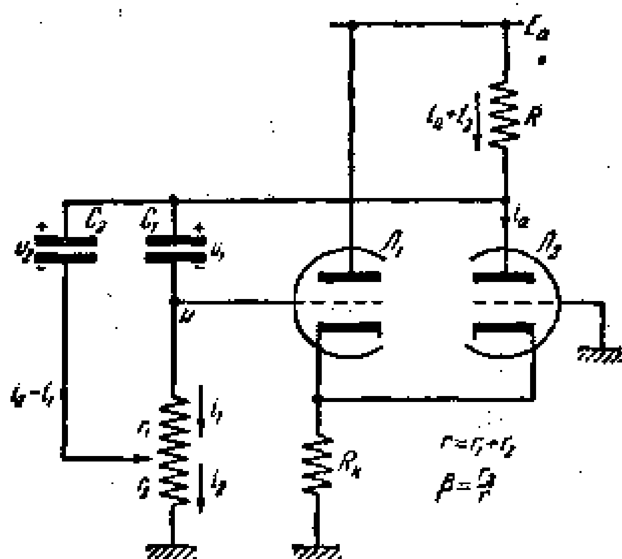


图 226

此外，我们还要象前面那样，忽略栅流与屏极反应。在这种简化假设下，根据克希霍夫方程，对这一电路(用图 226 中的符号)得出下列方程:

$$\left.\begin{aligned} & r_1 i_1 = u_2 - u_1, \\ & R(i_a + i_2) + u_2 + r_2 i_2 = E_a, \\ & C_1 \frac{du_1}{dt} = i_1, \\ & C_2 \frac{du_2}{dt} = i_2 - i_1, \end{aligned}\right\} \tag{5.27}$$

同时，在线性近似中(对于邻近于平衡状态: $i_1 = i_2 = 0$, $u = 0$ 的状态)

$$i_a = i_{a0} - Su = i_{a0} - S(r_1 i_1 + r_2 i_2),$$

其中 S 是电子管组 (有公共阴极电阻 R_k 的电子管 $Л_1$ 与 $Л_2$) 特性曲线的下降段在工作点(在平衡状态中)上的互导的绝对值。对时间微分前两个方程，并利用后两个方程和电子管 $Л_2$ 之屏流的表达式，我们得到对于电流 i_1 与 i_2 的两个一阶(线性)微分方程:

$$\left.\begin{aligned} & \frac{di_1}{dt} = \frac{-\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i_1 + \frac{1}{C_2} i_2}{r_1}, \\ & \frac{di_2}{dt} = \frac{\left[\frac{1}{C_2} - RS\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\right] i_1 + (RS - 1)\frac{1}{C_2} i_2}{R + r_2(1 - RS)}, \end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

或引入 $k = RS \geqslant 0$, $r = r_1 + r_2$ 及 $\beta = r_2/r_1 (0 \leqslant \beta \leqslant 1)$, 得:

$$\left.\begin{aligned} & \frac{di_1}{dt} = \frac{-\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i_1 + \frac{1}{C_2} i_2}{(1 - \beta) r}, \\ & \frac{di_2}{dt} = \frac{\left[\frac{1}{C_2}(1 - k) - \frac{1}{C_1} k\right] i_1 + (k - 1)\frac{1}{C_2} i_2}{R - \beta r(k - 1)}. \end{aligned}\right\} \tag{5.29}$$

作出线性微分方程组 (5.29) 的特征方程以确定奇点(平衡状态 $i_1 = i_2 = 0$) 的特性:

$$C_1C_2(1-\beta)r[R-\beta r(k-1)]\lambda^2$$
$$+[R(C_1+C_2)-(k-1)r(C_1+\beta C_2)]\lambda+1=0. \tag{5.30}$$

方程(5.30)的根 λ 的特性以及奇点的特性，依赖于电路的四个无量纲参数 k, β, R/r 与 C_2/C_1. 取这些参数的各种值，就可以得到所有上面讨论的几类奇点. 下面我们将假定只有 k 与 β 是变化的参数(k 可以用变化 S 来改变，β 用改变电位计 r 之滑动接点的位置来改变)，而参数 R/r 与 C_2/C_1 假定是固定的.

把参数平面 k, β 划分为对应于一定类型奇点的区域(图 227). 首先，当 $k=0$ 时，得两个负实根，即稳定结点型的奇点[1]. 这也是应该得到的，因为当 $k=0$ 时，电子管组不起任何作用，而没有电子管时，由电容与电阻组成的电路中，便只可能产生衰减的非周期振荡，即只可能存在稳定结点型的平衡状态. 其次，当

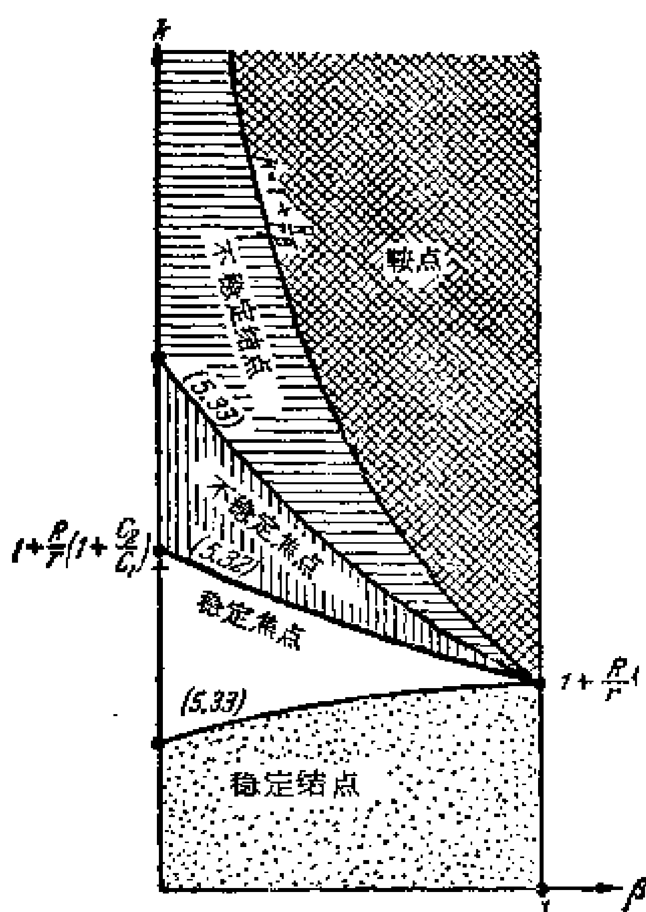


图 227

$$k>1+\frac{R}{r\beta} \tag{5.31}$$

时，λ^2 的系数是负的，因而奇点是鞍点型的(鞍点区的边界是 $k=1+(R/r\beta)$ 的双曲线). 在双曲线

$$k=1+(R/r\beta)$$

以下的点，对应结点型或焦点型的奇点. 在这一情

1) 实际上，当 $k=0$ 时，λ^2 与 λ 的系数都是正的，方程的判别式也是正的：

$$[R(C_1+C_2)+r(C_1+\beta C_2)]^2-4C_1C_2(1-\beta)r[R+\beta r]$$
$$=[C_1(R+r)-C_2(R+\beta r)]^2+4C_1C_2[R+\beta r]^2>0,$$

况下，奇点的稳定性决定于 λ 的系数的符号．这个系数在双曲线

$$k = 1 + \frac{R}{r} \frac{C_1 + C_2}{C_1 + \beta C_2} \tag{5.32}$$

上为零，而在双曲线上方是正的，下方是负的．因为 $0 \leqslant \beta \leqslant 1$，

$$\frac{1}{\beta} \geqslant \frac{C_1 + C_2}{C_1 + \beta C_2},$$

双曲线 (5.32) 在双曲线 $k = 1 + (R/r\beta)$ 的下方，因而，它也就是电路自激的边界．

划分实根区与复根区（划分结点区与焦点区）的边界，决定于特征方程 (5.30) 的判别式等于零的条件，即条件

$$[R(C_1 + C_2) - (k - 1)r(C_1 + \beta C_2)]^2 - 4C_1C_2(1 - \beta)r[R - \beta r(k - 1)] = 0. \tag{5.33}$$

由方程 (5.33) 在参数平面 k, β 上决定的曲线，不难看出，它有两条支线，其中一条（不稳定结点与不稳定焦点的边界）在双曲线 (5.32) 和 $k = 1 + (R/\beta r)$ 之间，而另一条在双曲线 (5.32) 之下方，轴 $k = 0$ 之上方[1]．

如果自激条件满足，并且奇点是不稳定的，那末我们只可以断言系统会离开平衡状态，并可以确定这种运动的特性，但是我们不能对系统以后的运动作出任何判断，因为我们采用的是线性方程．分析过"万能"电路的非线性方程（见下册第十章 § 10），就可证明，当满足自激条件时，电路中产生自振：当 $k < k_{临界} = 1 + (R/r\beta)$（或说，当 $\beta < \beta_{临界} = R/r(k-1)$）时，有连续的自振，而当 $k > k_{临界}$（或说，当 $\beta > \beta_{临界}$）时，有不连续的自振[2]．注意在后一情况中，用我们的简化模型，不能反映真实系统的运动规律：在这个情况中，平衡状态邻近发生的"快"运动，其速度不是确定于方程 (5.29)，而

---

1) 事实上，方程的判别式是 k 的二次多项式，在轴 $k = 0$ 与双曲线 $k=1+(R/r\beta)$ 上为正，而在双曲线 (5.32) 上是负的．由于判别式对 k 的依赖关系的连续性，曲线 (5.33) 的支线必定通过双曲线 (5.32) 与 $k = 1 + (R/r\beta)$ 之间以及双曲线 (5.32) 与轴 $k = 0$ 之间的区域．在每一个这种区域里，都通过曲线 (5.33) 的一条支线，因为方程 (5.33) 对每一个 β 只确定两个 k 的根．

2) 正是由于在此电路中，既可能有连续自振，也会有不连续自振，因而得名"万能"电路．

是由电路的微小寄生电容所确定的，并且电容越小时，则速度越大．因此，图 227 上之 $k > 1 + (R/r\beta)$ 的区域，称之为系统离开平衡状态的"快"运动（跳跃）区，较之"鞍点"区，将更正确些．

§4. 平衡状态．平衡状态的稳定性

研究了线性系统这一特殊情况，再回到由两个一阶微分方程

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{5.1}$$

描述的动力学系统这一一般情况．设对应的相空间是平面 x, y，其中 x 与 y 是笛卡儿坐标．

为了求相平面上的平衡状态，必需找出相平面上相速度为零的点，或换句话说，必需找出曲线

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0 \tag{5.34}$$

的交点．我们知道，这些点就是决定积分曲线的一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \tag{5.3}$$

的奇点．在这个意义下，我们将称，动力学系统的奇点就是积分曲线在相平面上的奇点．

现在来研究平衡状态的稳定性．重复一下在一般情况下稳定性与不稳定性的定义．如果给定了包含平衡状态的任意区域 ε，总可以找到对应的区域 $\delta(\varepsilon)$，使得位于区域 $\delta(\varepsilon)$ 中（当 $t = t_0$ 时）的相点，无论何时（当 $t > t_0$ 时）都不会越出区域 ε，那末这个平衡状态就是稳定的．如果存在这样一个包含平衡状态的区域 ε，竟找不到具有上述性质的区域 $\delta(\varepsilon)$，那末这个平衡状态就是不稳定的．庞卡莱[185]与李亚普诺夫[84]给出了研究平衡状态稳定性的分析方法．我们将阐述这种方法，并给出方法的理论根据．

取平衡状态 x_0, y_0（x_0, y_0 是曲线 $P(x, y) = 0$ 与 $Q(x, y) = 0$ 的交点）来研究其稳定性．因为这意味着，我们要研究当对平衡状态有偏离时的运动特性．所以为推导方便起见，引入新变量 ξ, η

代替变量 x, y，定义它们为对平衡状态的偏移(在相平面上):

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta. \tag{5.35}$$

按照我们的假设，$P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 是解析函数. 在方程 (5.1) 中把变数 x, y 换为变数 ξ, η，得:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= a\xi + b\eta + [p_{11}\xi^2 + 2p_{12}\xi\eta + p_{22}\eta^2 + \cdots], \\ \frac{d\eta}{dt} &= c\xi + d\eta + [q_{11}\xi^2 + 2q_{12}\xi\eta + q_{22}\eta^2 + \cdots], \end{aligned}\right\} \tag{5.36}$$

其中

$$\begin{aligned} a &= P'_x(x_0, y_0), \quad b = P'_y(x_0, y_0), \\ c &= Q'_x(x_0, y_0), \quad d = Q'_y(x_0, y_0), \end{aligned}$$

等等.

有严格理论根据的研究稳定性的李亚普诺夫方法如下. 弃去方程(5.34)中的非线性项，我们得到常系数的线性方程组，所谓的一次近似方程组:

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta. \tag{5.37}$$

只要知道了特征方程

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

的根，这个方程组的解立刻就能写出.

李亚普诺夫证明了: 如果这个方程的两个根有不等于零的实部，那末研究弃去非线性项而得到的一次近似方程，永远可以正确地回答关于系统(5.1)中平衡状态的稳定性的问题. 就是说，如果两个根都有负实部，因而一次近似方程的解都衰减，那末平衡状态就是稳定的; 如果只要有一个根有正实部，亦即，如果一次近似方程有增长的解，那末，平衡状态就是不稳定的.

我们来证明李亚普诺夫的这些结论. 分别考虑 λ 是实数与 λ 是复数的情况.

1. 特征方程有实根的情况 我们知道，在这个情况中，一次

近似方程组可以用线性的齐次变换[1)]

$$u = \alpha\xi + \beta\eta, \quad v = \gamma\xi + \delta\eta \tag{5.38}$$

化为所谓的"正则形式"：

$$\frac{du}{dt} = \lambda_1 u,$$

$$\frac{dv}{dt} = \lambda_2 v,$$

其中 λ_1 与 λ_2 就是特征方程的根. 把同一个变换用于方程组(5.1)，我们仍得到非线性组

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \lambda_1 u + (\bar{p}_{11}u^2 + 2\bar{p}_{12}uv + \bar{p}_{22}v^2 + \cdots), \\ \frac{dv}{dt} &= \lambda_2 v + (\bar{q}_{11}u^2 + 2\bar{q}_{12}uv + \bar{q}_{22}v^2 + \cdots). \end{aligned}\right\} \tag{5.39}$$

将第一式乘以 u，第二式乘以 v，再相加，得：

$$\frac{1}{2}\frac{d\rho}{dt} = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \cdots = \Phi(u, v), \tag{5.40}$$

其中 $\rho = u^2 + v^2$.

分别三种情况来讨论：λ_1 与 λ_2 都是负的，λ_1 与 λ_2 都是正的，λ_1 与 λ_2 异号.

1. 如果 λ_1 与 λ_2 都是负的，那末不难证明，曲线 $\Phi(u, v) = 0$ 在坐标原点有一个孤立点，而曲面 $z = \Phi(u, v)$ 在坐标原点有极大值*. 由此可知，包含着坐标原点，存在一个使 $\Phi(u, v) < 0$ 的区域 S（点 $u = 0$, $v = 0$ 除外，因为 $\Phi(0, 0) = 0$）. 这样一个区

---

1) 见§2. 这里只是把代表变量的字母改过了.

* $\Phi(u, v)=0$ 的点 (u, v)，亦即空间 (u, v, z) 中曲面 $z=\Phi(u, v)$ 与平面 $z=0$ 的交点. 由 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 的解析性，知 $\Phi(u, v)$ 亦是解析函数，因而，在原点邻域中，有 $\Phi(u, v) = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \cdots$（式5.40）. 其中点表示不低于三次的项. 在原点上：$\frac{\partial\Phi}{\partial u} = 0, \frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0, \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} = 2\lambda_1, \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} = 2\lambda_2, \frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v} = 0$，所以原点是极值点. 又由于：$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}\right)^2 > 0, \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} = 2\lambda_1 < 0$，所以原点是 $z = \Phi(u, v)$ 的极大值点. 因而 $z = \Phi(u, v)$ 和 $z = 0$ 只有唯一的公共点——切点 $(u = 0, v = 0)$——译者注.

域的存在，使我们能立即证明平衡状态的稳定性.

设给定一个含有坐标原点的某个区域 ε. 取一个完全位于区域 S 和区域 ε 里面的，以坐标原点为中心的圆为界的有限区域作为区域 δ（图 228）*. 不难看出，如果使相点位于区域 $\delta(\varepsilon)$ 之内的任何地方，那末它无论何时都不会跑出这个区域，因而也不可能到达区域 ε 的边界. 实际上，对于区域 δ 中所有的点，有 $d\rho/dt < 0$[1]；因而随着时间的流逝，相点只可能向坐标原点接近. 这样，这个平衡状态就是按李亚普诺夫稳定的. 并且还可以证明，平衡状态在这情况下，是渐近稳定的. 亦即，当时间无限增加时，相点渐近地趋向于平衡状态. 实际上，因为 $\rho = u^2 + v^2$ 随着时间的流逝，从初值 $\rho = \rho_0$ 开始单调地减少，那末，当 $t \to \infty$ 时，ρ 趋于零，或趋向某个极限 $\rho_1(\rho_1 > 0)$. 不难看出，向不为零的极限的趋近是不可能的，因为当速度是有限时（如果 $\rho_0 \geqslant \rho > \rho_1$，$|d\rho/dt| > \gamma > 0$），在无限长的时间内，$\rho$ 必定会减到任意小，而不能保持为正. 显然，回到平面 ξ，η 上，这些论断仍然有效. 对应的平衡状态是按李亚普诺夫稳定的，而平面 ξ，η 上位于平衡状态邻近的相点，也将渐近地接近平衡状态.

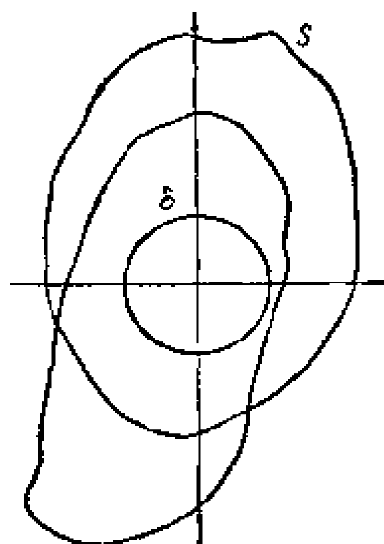


图 228

于此再作一点注记，我们以后要用到它. 平面 u，v 上完全在区域 S 以内的每一个圆都是“无切环”（或称，庞卡莱“无接环” cycle sans contact），因为所有的积分曲线与它相交（当 λ_1 与 λ_2 为负时**，所有的曲线都进入其内部），而没有一条与之相切. 我们可以作出整个的一个圆族，它们层层相套地收缩于坐标原点；这个圆族可以

* 这个区域 δ，显然是和 ε 有关的，ε 愈小，它亦应该愈小，所以前面都记作 $\delta(\varepsilon)$——译者注.

1) 除了点 $u = 0$，$v = 0$ 外；不过如果相点原来就在坐标原点，则它将在原点保持静止.

** 原书为“S_1 与 S_2”——译者注.

称为无切环族．我们看看在平面 ξ, η 上，这个图形是怎样的．因为平面 u, v 上的圆在平面 ξ, η 上对应于椭圆，所以在平面 ξ, η 上便是层层相套的并包围原点而向坐标原点收缩的椭圆族，它也是无切环族（图 229）．如果相点穿过无切环的边界环（这些椭圆中的最大的），那末它必然也穿过其余的无切环，渐近地趋向奇点．

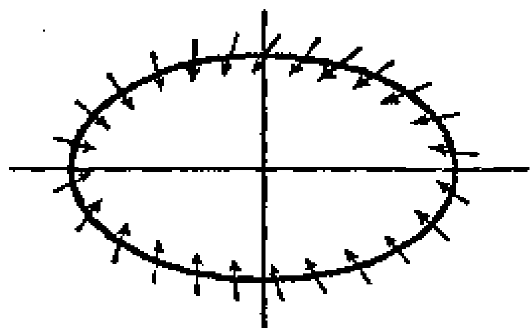


图 229

2. 如果 λ_1 与 λ_2 都是正的，那末曲线 $\Phi(u, v)=0$ 在坐标原点也有一个孤立点，不过曲面 $z=\Phi(u, v)$ 现在在坐标原点上有极小值，而不是极大值．由此可知，存在一个包含坐标原点，并使 $\Phi(u, v)>0$ 的区域（区域 S）（点 $u=0$, $v=0$ 除外，因为有 $\Phi(0, 0)=0$）．

我们证明，在这个情况下，平衡状态是不稳定的．取一个完全在区域 S 里面的，以圆为界的有限区域作为区域 ε（图 230）．可以证明，不能选出一个包含原点的区域 δ，使得位于这一区域中的任一相点，无论何时都不会到达区域 ε 的边界．我们采用反证法．假如这样的区域存在，令相点于瞬时 $t=t_0$ 位于这个区域中的不是坐标原点的任何点，因为对于整个区域 S（坐标原点除外），$\Phi(u, v)=d\rho/dt>0$，所以相点随时间的增加单调地离开原点；直到相点跑出区域 S 时，这个条件才可能被破坏．以 ρ^0 记瞬时 $t=t_0$ 的 u^2+v^2 值，以 ρ_ε 记区域 ε 边界的 u^2+v^2 值．显然，在圆 $\rho=\rho_0$ 与 $\rho=\rho_\varepsilon$ 之间的环内，$\Phi(u, v)$（也就是说 $d\rho/dt$）有一个正的下极限．因此，相点将以不为零的速度离开坐标原点，

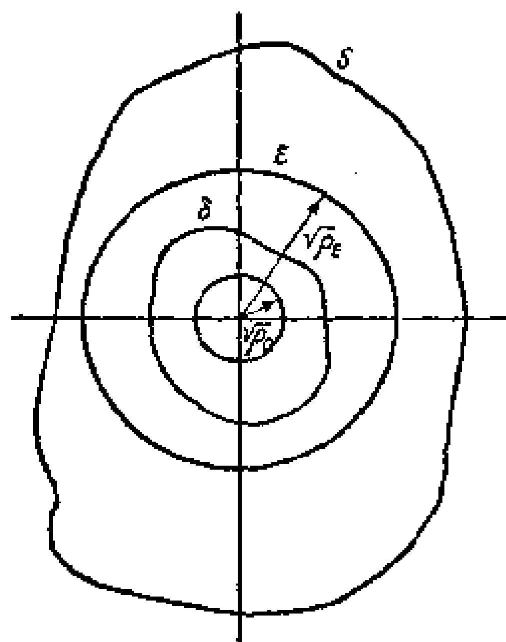


图 230

而在有限的时间内到达区域 ε 的边界[1]. 这样便产生了矛盾,也就意味着找不到所需要的区域 δ. 故平衡状态是按李亚普诺夫不稳定的.

象上一种情况中一样,所有的定性的论断,都可以不变地移到平面 ξ, η 上来. 注意,在这个情况中,平面 ξ, η 上也存在层层相套的椭圆族作为无切环族. 位于充分接近平衡状态的邻域中的相点,不可避免地要离开平衡状态,而与所有的无切环相交.

3. 如果 λ_1 与 λ_2 异号,则曲线 $\Phi(u, v) = 0$ 在坐标原点上有节点,而曲面 $z = \Phi(u, v)$ 在坐标原点上有鞍形极值. 由此可知,环绕原点依次地有使 $\Phi(u, v) > 0$ 的区域和使 $\Phi(u, v) < 0$ 的区域存在,它们的分界线就是以原点为简单节点的曲线 $\Phi(u, v) = 0$ (图 231).

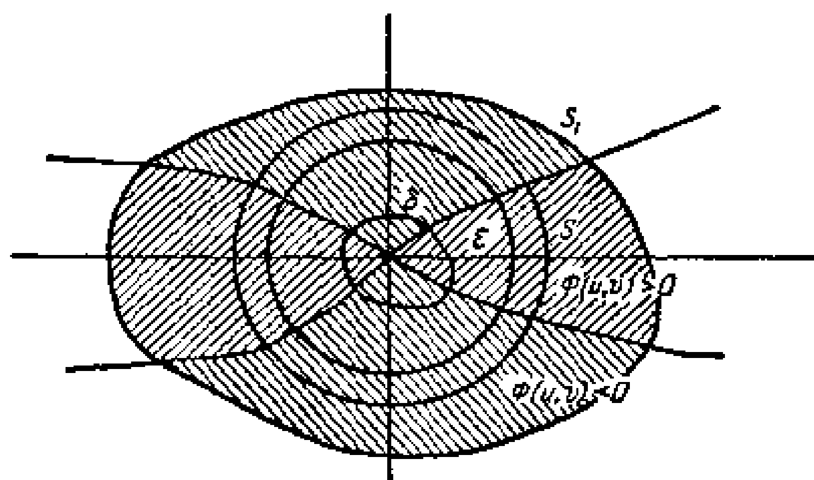


图 231

我们还可以把这个情形叙述如下: 环绕坐标原点有一个以坐标原点为中心,半径不为零的圆,这个圆和曲线 $\Phi(u, v) = 0$ 相交四次;我们称这个圆内的区域为区域 S; 区域 S 被曲线 $\Phi(u, v)=0$ 分为这样四块,在两块中 $\Phi(u, v) > 0$, 另两块中 $\Phi(u, v) < 0$. 我们证明,在这个情况下,平衡状态是不稳定的. 只要注意到 $d^2\rho/dt^2$ 在平衡状态邻域中的符号就够了. 把 $d\rho/dt$ 再微分一次,

1) 如果函数 $\Phi(u, v)$ 在环 $\rho_0 \leqslant \rho \leqslant \rho_\varepsilon$ 中的下极限等于 $\gamma(\gamma > 0)$, 则通过环区的时间 $\tau < (\rho_\varepsilon - \rho_0)/\gamma$.

并把微分方程中的 du/dt 与 dv/dt 用其值代入，便有：

$$\frac{1}{4}\frac{d^2\rho}{dt^2} = \lambda_1^2 u^2 + \lambda_2^2 v^2 + \cdots = \Phi_1(u, v).$$

不难相信，曲面 $z = \Phi_1(u, v)$ 在坐标原点有极小值. 因此，包含坐标原点存在一个使 $\Phi_1(u, v) > 0$，或就是 $d^2\rho/dt^2 > 0$ 的区域 S_1（点 $u = 0$, $v = 0$ 除外，因为 $\Phi_1(0, 0) = 0$）.

现在就进行证明. 取一个完全在区域 S 与区域 S_1 以内的，以圆为界的有限区域作为区域 ε[1]. 不难证明，选不出这样一个包含原点在内的区域 δ，使得位于区域 δ 内的任意点的相点，无论何时都不会到达区域 ε 的边界.

实际上，没有这样的区域 δ 存在. 由于它包含原点在内，那末必然也包含使 $\Phi(u, v) > 0$ 的点. 令相点在 $t = t_0$ 时，位于区域 δ 内的某点，在这一点有 $\Phi(u, v) > 0$，也就是 $d\rho/dt > 0$. 因为当 $t = t_0$ 时，$d\rho/dt > 0$，又因为在整个区域 S_1 中，$d^2\rho/dt^2 > 0$（选取区域 ε 在区域 S_1 之内，而区域 δ 不能有在区域 ε 之外的部分），那末我们的相点开始以增加的速度离开坐标原点，并在有限的时间内到达区域 ε 的边界[2]. 这就导出了矛盾. 选不出所需的区域 δ. 平衡状态是按李亚普诺夫不稳定的. 显然，对于平面 ξ、η 上的对应的平衡状态亦是一样.

2. 特征方程有复根的情况　　我们知道，在这一情况下的线性组，可以经过实线性齐次变换化为

$$\frac{du_1}{dt} = a_1 u_1 - b_1 v_1, \quad \frac{dv_1}{dt} = a_1 v_1 + b_1 u_1,$$

其中 a_1 与 b_1 是 λ 的实部与虚部 ($\lambda_1 = a_1 + jb_1$, $\lambda_2 = a_1 - jb_1$). 把这个变换用于非线性组，便又得到非线性组：

$$\frac{du_1}{dt} = a_1 u_1 - b_1 v_1 + \cdots, \quad \frac{dv_1}{dt} = a_1 v_1 + b_1 u_1 + \cdots. \tag{5.41}$$

---

1) 特别地，可以取区域 S 作为区域 ε，且 δ 总可以选得完全在区域 S_1 之内.

2) 不难估出这个时间 τ. 令 ρ_ε 表示区域 ε 之边界圆半径的平方，$\gamma(\gamma > 0)$ 是 $t = t_0$ 时，$d\rho/dt$ 的值. 于是在整个的区域 S_1 内运动的期间中，$d\rho/dt \geqslant \gamma$；由此可知，$\tau < (\rho_\varepsilon - \rho_0)/\gamma$.

把第一式乘 u_1，第二式乘 v_1，再相加，便得到下列关于向径平方 $\rho = u_1^2 + v_1^2$ 的表达式：

$$\frac{1}{2}\frac{d\rho}{dt} = a_1(u_1^2 + v_1^2) + \cdots = \psi(u_1, v_1).$$

因为后面的点号表示不低于三次的项，所以不难用普通的方法证明，$\psi(u_1, v_1)$ 在坐标原点有极大或极小值，这依赖于 a_1 的符号。完全重复在有同号实根情况中的讨论，便可以得出，当 $a_1 < 0$ 时，平衡状态是按李亚普诺夫稳定的，并且还是渐近稳定的，而在 $a_1 > 0$ 时，平衡状态是按李亚普诺夫不稳定的。在两种情况中，原点邻域中的充分小的圆都是无切环。当过渡到平面 ξ, η 上时，圆族便化为无切的椭圆族，积分曲线进入其内或由内向外，亦依赖于 a_1 的符号。

总之，对于特征方程的根不相等，且有不为零的实部的情况，我们严格地证明了弃去非线性项的李亚普诺夫方法。没有等根的限制是不重要的，——我们的这一假设只是为了简化证明。特征方程的两个根都有不为零的实部的限制，却是重要的。在所研究的方程具有一般形式的情况中，这个限制不能取消。这样，李亚普诺夫关于平衡状态稳定性的定理，在这个情况中就可叙述为：**如果特征方程的根有负实部，那末平衡状态是稳定的；如果只要有了一个正实部，那末平衡状态就不稳定。**

如果特征方程的两个根的实部都等于零，或者一个根等于零，而另一根的是负的，那末用一次近似方程不能解决关于平衡状态的稳定性问题。

这样，系统 (5.1) 的平衡状态的稳定性，在特征方程的两个根都有不为零的实部时，完全由相应的一次近似方程所确定。可以证明（我们在这里不去证明），在这个情况下，一次近似方程不仅能确定平衡状态的稳定性，而且还能确定相轨线在其充分小的邻域中的特性。此外，特征方程的根有不为零的实部的平衡状态（奇点）是**粗**的：其特性，亦即，在其充分小的邻域中的相轨线的特性，当方程 (5.1) 的右端（函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$）有任意小的改变

时保持不变(在其一阶导数也是充分小的条件下;详见下册第六章§4). 这样,完全和§2中一样,这里也有五种粗的平衡状态: 稳定结点,不稳定结点,稳定焦点,不稳定焦点及鞍点. 要研究这些粗的平衡状态的特性,采用图223的图形比较方便. 在我们的情况中

$$\sigma = -[P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0)],$$

及

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & Q'_x(x_0, y_0) \\ P'_y(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}. \quad (5.42)$$

粗的平衡状态对应于整个参数平面 σ, Δ 中的点,除了在图223中用粗线表示的轴 $\Delta = 0$ 与半轴 $\sigma = 0$, $\Delta > 0$ 以外. 我们知道,在结点与鞍点的情况中,积分曲线沿两个方向进入奇点,显然,这也可以用相应的线性方程来确定. 利用§2中的结果,我们可以写出下列方程以确定这些方向的角系数:

$$P'_y(x_0, y_0)\kappa^2 + \{P'_x(x_0, y_0) - Q'_y(x_0, y_0)\}\kappa - Q'_x(x_0, y_0) = 0.$$

轴 $\Delta = 0$ 与半轴 $\sigma = 0$, $\Delta > 0$ 上的点,对应于非粗的平衡状态(非粗的奇点),亦即特性会因方程(5.1)的右端的任意微小变化而改变的平衡状态(当函数 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 及其导数有任意小的变化时). 正是由于这个原因,其特性(包括稳定性)不能由线性化的方程——一次近似方程(5.37)确定. 半轴 $\sigma = 0$, $\Delta > 0$ 可能对应于中心型的平衡状态,也可能对应于稳定的或不稳定的焦点,轴 $\Delta = 0$ 的点——所谓**复杂**奇点,其最简单的一种(鞍结点型的奇点),如图232所示[1].

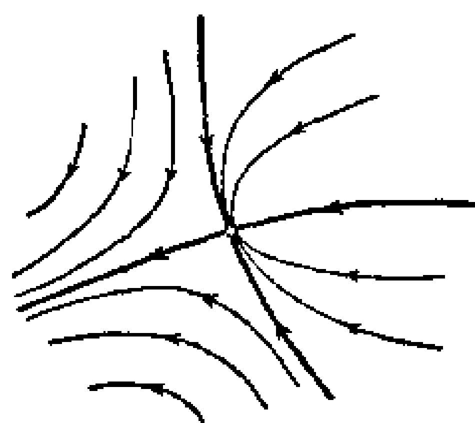


图 232

---

1) 复杂奇点(复杂平衡状态),亦即,$\Delta = 0$ 的奇点,显然是曲线 $P(x, y) = 0$ 与 $Q(x, y) = 0$ 的切点,因此,当函数 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 有任意微小的变化时,复杂奇点可能分裂为两个或更多的奇点,亦可能消失掉. $\Delta \neq 0$ 的奇点称为简单奇点,当函数 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 有充分微小的变化时,其数目并不改变.

§5. 例子：电弧电路中的平衡状态

作为说明应用李亚普诺夫方法以确定平衡状态的稳定性的例子，我们研究电弧电路中的平衡状态，电路中含有电感和并联电容（图 233）．这个电路是电弧发生器电路的某种变形；前面（第四章 §5）所研究过的，只有一个电感的电弧电路，就是假定在这个电路中没有电容（$C=0$）而得到的．假设通过电弧间隙的电流是电弧上电压的函数，亦即，又忽略掉电弧中的离子过程的惯性，不难利用克希霍夫定律写出下列的电路振荡方程（采用图 223 中的记号）：

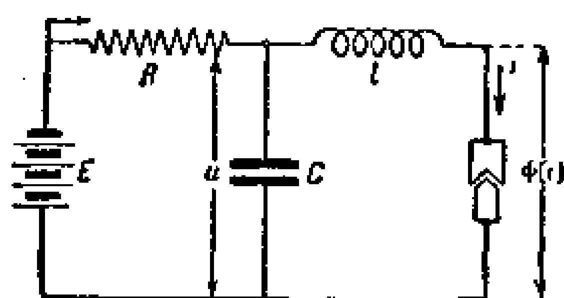


图 233

$$\left.\begin{aligned}L\frac{di}{dt}&=u-\phi(i),\\C\frac{du}{dt}&=\frac{E-u}{R}-i,\end{aligned}\right\}\tag{5.43}$$

其中 $\phi(i)=v$ 是电弧上的电压，它是通过电弧的电流的单值函数（我们把这一关系——电弧的静态特性曲线——用图形表示，见图 234）．



图 234

系统的平衡状态决定于条件 $du/dt=0$ 及 $di/dt=0$，由此得方程：

$$u=E-Ri,\quad u=\phi(i).\tag{5.44}$$

因而平衡状态就是这些直线与曲线的交点．由于 E 与 R 取值的不同，这些点可以是一个（图 235），也可以是三个（图 236）．为了分析平衡状态的稳定性，按照李亚普诺夫方法，在方程（5.43）中代入 $u=u_0+\eta$ 与 $i=i_0+\xi$，其中 u_0

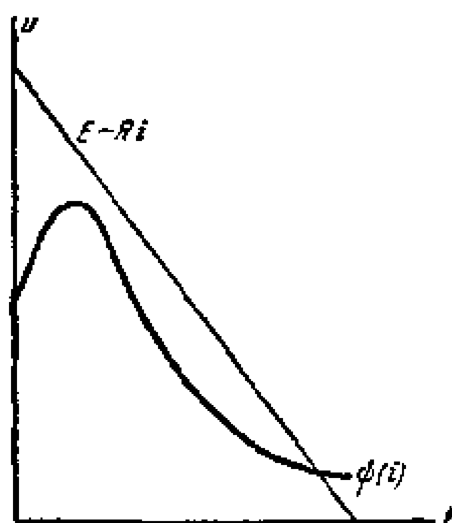


图 235

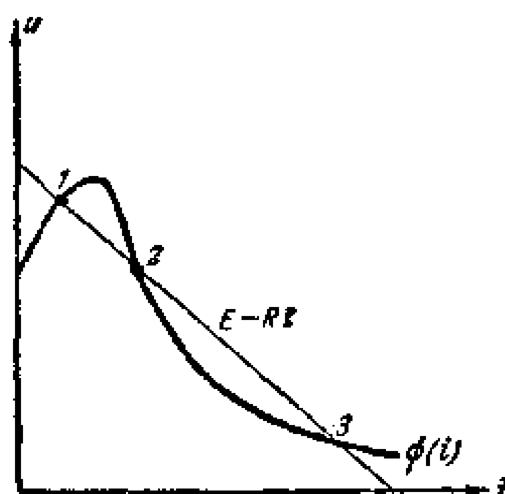


图 236

与 i_0 是对应于某一个平衡状态的值. 再把电弧的特性 $\phi(i_0+\xi)$ 展为级数 $\phi(i_0+\xi)=\phi(i_0)+\xi\phi'(i_0)+\cdots$, 并只取级数的前二项*, 于是得到两个关于 ξ 与 η 的线性微分方程(因为 i_0 与 u_0 满足方程 (5.44), 故所有包含它们的项一齐为零):

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\eta}{dt}&=-\frac{\eta}{RC}-\frac{\xi}{C},\\ \frac{d\xi}{dt}&=\frac{\eta}{L}-\frac{\rho\xi}{L},\end{aligned}\right\}\qquad(5.45)$$

其中 $\rho=\phi'(i_0)$ 是电弧的特性曲线在对应于所给的平衡状态的点上的斜率(有电阻的量纲). 电弧的电阻 ρ 是个变量, 在某些 i_0 值上它可以取负值; 但是, 利用这些概念时, 必需注意到我们在第一次引出名词"负电阻"时 (第一章 § 6) 所作的解释.

这个微分方程的特征方程, 写为行列式的形式是:

$$\begin{vmatrix}-\dfrac{\rho}{L}-\lambda & \dfrac{1}{L}\\ -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{RC}-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

由此

* 原书为首项——译者注.

$$\lambda^2 + \lambda\left(\frac{1}{RC} + \frac{\rho}{L}\right) + \frac{1}{LC}\left(\frac{\rho}{R} + 1\right) = 0. \qquad (5.46)$$

方程的根的特性依赖于四个参数的值：R, C, L 与 ρ. 为了说明这些根在所有可能的参数值时的特性，我们作三个图，即三个平面的分区图，其中每一区域对应于一定类型的平衡状态，它们是：R, ρ; L, ρ; C, ρ 平面的分区划分；这时必须注意到 L, C 与 R 都只能取正值，而 ρ 可以为正，也可以为负.

为了作出第一个 R, ρ 的图形，把复根的条件写为形式

$$[L - RC\rho]^2 - [2R\sqrt{LC}]^2 < 0. \qquad (5.47)$$

复根区域的边界决定于（关于 R 与 ρ 的）四次方程，这个方程可分解为两个二次方程：

$$L - RC\rho + 2R\sqrt{LC} = 0;$$
$$L - RC\rho - 2R\sqrt{LC} = 0.$$

每一个方程决定一个双曲线；它们的渐近线，一个是二个双曲线的公共的，即轴 ρ，而另一个，对第一个双曲线是直线 $\rho = -2\sqrt{L/C}$，对第二个则是直线 $\rho = 2\sqrt{L/C}$.

两个双曲线 *1* 与 *2* 所形成的"曲线楔"（图 237），容易看出，就是复根的区域. 有正实部的根的区域的边界，亦即，结点与焦点的稳定性的边界是曲线 $L + RC\rho = 0$，亦即，位于第四象限内的以轴 ρ 与 R 为渐近线的双曲线 *3*，它和双曲线 *1* 交于点 $R = \sqrt{L/C}$ 及 $\rho = -\sqrt{L/C}$（见图 237）. 显然，所有在这个双曲线上方的结点和焦点都是稳定的，下方的都不稳定. 最后，鞍点区域的边界是直线 *4*，它决定于方程 $R + \rho = 0$，因为我们知道，当 $R + \rho < 0$ 时，方程 (5.46) 的根总是异号的. 很明显，在直线 $\rho = -R$ 以下的区域是鞍点型奇点的区域. 结果，我们得到了把参数 ρ 与 R 的平面划分为各型奇点的区域的图形，如图 237 所示.

由图可见，当 $\rho > 0$ 时（在 R 轴以上），只存在稳定的奇点. 如果 ρ（电弧的电阻，亦即回路中的电阻）不太大，且并联回路的负荷电阻不太小时，这些点就是焦点. 当 $\rho < 0$（特性曲线的下降段）

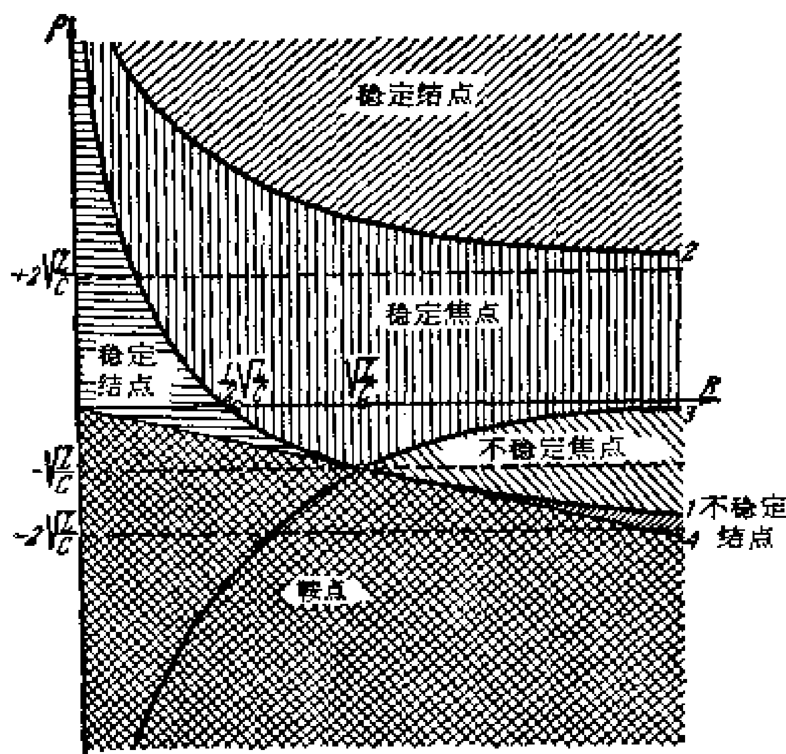


图 237

时，只要 $|\rho|$ 不太大，另一方面，R 既不太大也不太小时，平衡状态可以是稳定的。当 $\rho<0$ 时，有三种不稳定的可能：不稳定结点，不稳定焦点和鞍点。又如果 R 充分大，当 $|\rho|<2\sqrt{L/C}$ 时，便得到焦点(稳定不稳定，要看 ρ 的符号)，这个条件和普通线性回路的振荡条件相似。一般在 $\rho<0$ 和 $|\rho|<2\sqrt{L/C}$ 时，改变 R 的大小，可以得到任意一种奇点，如果 $\rho<0$，而 $|\rho|>2\sqrt{L/C}$，则只可能有不稳定的奇点——或是鞍点，或是不稳定的结点，这决定于参数 R 的大小。

为了建立奇点的类型和其他参数间的依赖关系，我们对 L, ρ 与 C, ρ 作出类似的图形（图 238 与图 239）。在这两个图中，复根的边界用方程

$$L^2+(RC\rho)^2-2RCL\rho-4R^2CL=0,$$

或

$$\rho=\frac{L}{CR}\pm 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

表示在 L, ρ 图上，这个边界是一条曲线，其渐近线为 $\rho=L/CR$，

在点 $L=0$, $\rho=0$ 上有铅垂的切线,在点 $L=R^2C$, $\rho=-R$ 上有水平切线. 在 C, ρ 图上,这个边界分解为两个以 $C=0$ 及 $\rho=0$ 为渐近线的双曲线型的曲线. 结点与焦点的稳定性区域的边界决定于方程 $RC\rho=-L$, 对于第二个 C, ρ 图, 它是以坐标轴为渐近线的双曲线, 而对于第一图就是直线. 鞍点型奇点区域的边界可由方程

$$\rho=-R$$

得出,亦即在两个图中,都是平行于横轴的直线. 结果就得到图 238 与图 239. 不难确信,这些图形完全和图 237 所示的第一个图形相符合, 并且仅是它的补充. 根据所有的三个图形就能够在参数 R, C, L 与 ρ 有任意值时判断奇点的特性.

显然,在电弧特性曲线的上升段上的平衡状态(例如图 236 上的点 1) 总是稳定的,因为对它有 $\rho>0$. 知道了 L, C, R 与 ρ 之间的关系,我们就能立即判定平衡状态是焦点型的还是结点型的. 如果平衡状态在电弧特性曲线的下降段上 (在 ρ 的负值区内), 并

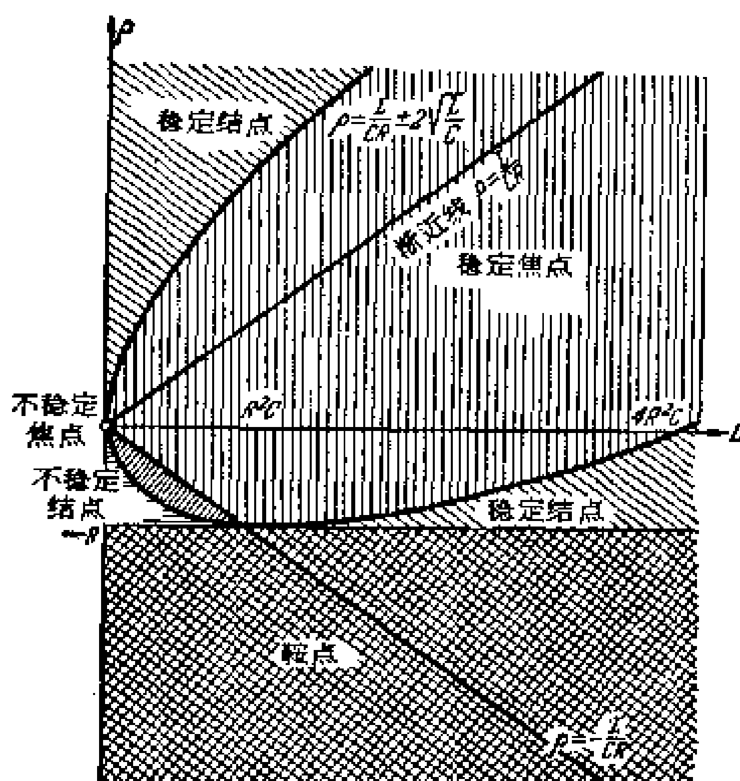


图 238

且负荷直线 $u = E - Ri$ 的斜率比电弧特性曲线的斜率小，亦即如果 $\rho < 0$，及 $|\rho| > R$ 时（在有三个平衡状态的情况中，中间的一个平衡状态——图 236 上的点 2，总是满足这个条件的），那末这个平衡状态就是鞍点，因而也是不稳定的，无论 L 与 C 是大还是小。最后，在电弧特性曲线下降段上的平衡状态（$\rho < 0$），当 $|\rho| < R$ 时（例如图 236 上的点 3），不可能是鞍点，只能是结点或焦点。这个平衡状态在 C 甚小时是稳定的（见图 239），而在 L 甚小时，由图 238 可知，是不稳定的。

图 239

在电弧特性曲线下降段上的平衡状态的两个稳定性条件：

$$|\rho| < R \quad 与 \quad L > |\rho| RC,$$

在 $L \neq 0$ 时，如果令 $C = 0$，正如我们在第 IV 章 § 6 中所求得的，化为一个条件：$|\rho| < R$。但是，因为任何一个电路都有一些微小的寄生电容，所以要使电弧特性曲线下降段上的平衡状态稳定，必须（除了满足条件 $|\rho| < R$ 以外）使电路中含有某个不太小的电感，电容愈小时，此电感亦可以更小一些。

在研究电弧电路中之平衡状态的稳定性时，我们用了静态特性曲线。严格地说，这只能表示电弧中之定态的、平衡的过程。所以，我们的讨论只有当 L 或 C 充分大，以致电路中的振荡十分缓慢时才有效。如果 L 与 C 很小，并且电路中产生高速振荡，那末在这一情况下，电弧中的离子过程的惯性就要起重要的作用，而我们在分析平衡状态的稳定性时，就不能用电弧的静态特性曲线，而应该采用能够在一定精确度上描述电弧放电的动力学的动力学（微分）

方程. 就是说，电弧放电的惯性是镇定的因素，在没有任何电感而有微小电容 C 时，足以使电路的平衡状态成为稳定的.

能够在某种程度上描述电弧在平衡状态 (u_0, i_0) 邻近的过程动力学的，最简单的一阶微分方程可以写为:

$$\tau\left(\frac{d\xi}{dt}-\frac{u_0}{i_0}\frac{d\eta}{dt}\right)+\xi-\rho\eta=0 \qquad (5.48)$$

的形式，其中 $\xi=u-u_0$, $\eta=i-i_0$, 而 u 是电弧的端电压[100,51]. 这个方程近似地考虑了主要是由电弧电极的热惯性和空气隙所引起的电弧放电的惯性（表征这个惯性的时间常数 τ 的数量级是 10^{-3}—10^{-4} 秒). 根据方程(5.48)，考虑极限情况，如果令导数等于零，我们就得到线性化的静态特性曲线 $\xi=\rho\eta$; 当电弧的热状态来不及改变，且电弧和普通导体一样地服从欧姆定律 $\xi=\eta u_0/i_0$ 时，如果假定导数很大，以致可以略去方程中的 $\xi-\rho\eta$ 项，便得到高频振荡的动态特性曲线.

对于没有电感但有电容的电弧电路，除方程(5.48)外，还有:

$$C\frac{d\xi}{dt}=-\frac{\xi}{R}-\eta \qquad (5.49)$$

（我们直接对于电压和电流对其平衡值的偏离列出了方程). 线性微分方程组(5.48)与(5.49)的特征方程是:

$$C\tau\frac{u_0}{i_0}\lambda^2+\left\{\tau\left(1+\frac{u_0}{Ri_0}\right)+\rho C\right\}\lambda+\left(1+\frac{\rho}{R}\right)=0, \qquad (5.50)$$

因而，如果

$$|\rho|<R \text{ 及 } \tau\left(1+\frac{u_0}{Ri_0}\right)>|\rho|C,$$

那末，在静态特性曲线下降段上的 $(\rho<0)$ 平衡状态便是稳定的. 当电阻 R 充分大且电容 C 充分小时，这些条件是成立的. 于是，只要 $|\rho|<R$，具有微小电容（例如 $C<\tau/|\rho|$）的电弧电路，在特性曲线下降段上，便有稳定的平衡状态，而电路中可以没有任何电感. 这个结论与实验资料在定性上是相符的.

§6. 极限环与自振

在研究过平衡状态后，我们再来研究周期运动，我们知道，周期运动在由方程

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y) \tag{5.1}$$

所描述的系统中是可能遇到的. 如果 $T(T>0)$ 是使对所有的 t 均有

$$x(t+T)=x(t),$$
$$y(t+T)=y(t)$$

成立的最小数,那末运动 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 称为周期为 T 的周期运动. 我们知道,周期运动对应相平面 x, y 上的闭相轨线,反之亦然:任一闭相轨线都对应于一周期运动的无限集合,这些周期运动的差异仅在于起始时间的选择不同. 闭相轨线在研究保守系统时已经遇到过了,那里的闭相轨线总是形成层层相套的闭轨线的连续统(例如,是环绕中心型奇点的轨线). 在我们研究过的自振系统的例子中(具有 $\int$-特性曲线的振荡器,钟表;见第三章§§ 3—5),周期运动对应于孤立的闭曲线,邻近的轨线都沿着螺线从内外两方面(当 t 增加时)接近它. 这种孤立的闭轨线称为**极限环**. 从简单的例子[1]可以确信,具有解析右端的形式如(5.1)的系统,一般说来,是允许有极限环形式的轨线的.

如果在相平面上存在有包含极限环在内的区域——环域(ε),使得所有从邻域(ε)中出发的相轨线在 $t\to+\infty$ 时,都渐近地接近极限环,则我们称此极限环为**稳定的**. 反之,如果在极限环的任

---

1) 例如系统

$$\frac{dx}{dt}=+y+x[1-(x^2+y^2)],$$
$$\frac{dy}{dt}=-x+y[1-(x^2+y^2)]$$

的轨线 $x^2+y^2=1$ 便是极限环. 其参数方程是:

$$x=\cos(t-t_0),$$
$$y=-\sin(t-t_0)^*,$$

所有其他相轨线的方程是

$$x=\frac{\cos(t-t_0)}{\sqrt{1+Ce^{-2(t-t_0)}}}, \quad y=-\frac{\sin(t-t_0)}{\sqrt{1+Ce^{-2(t-t_0)}}}^*.$$

积分常数 $C>0$ 的值对应于从里面(当 $t\to+\infty$)绕向极限环的相轨线,而 $0>C>-1$ 对应于从外面绕向极限环的相轨线.

* 原书中没有 − 号——译者注.

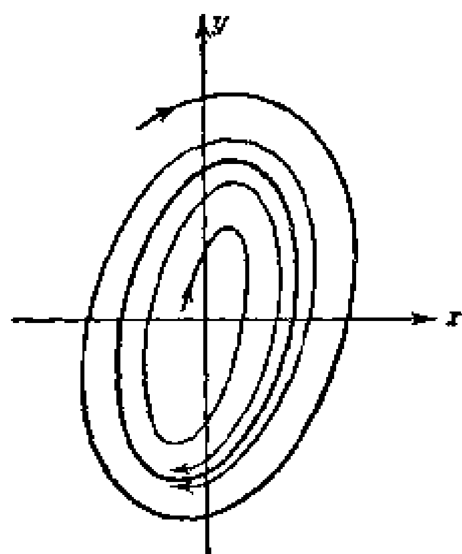


图 240

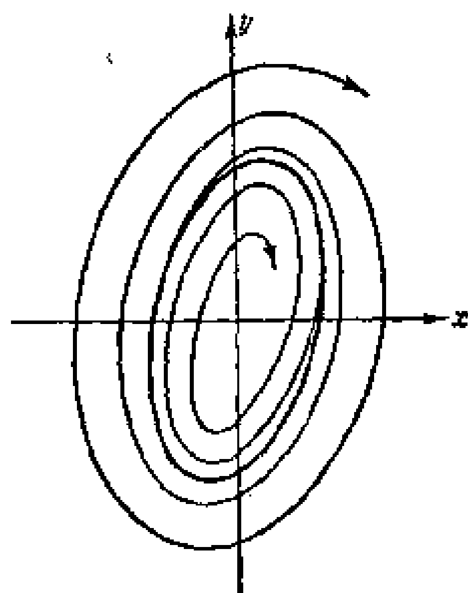


图 241

意微小邻域 (ε) 中，即便只存在一条当 $t \to +\infty$ 时不向极限环趋近的相轨线，那末这个极限环就称为不稳定的. 为了用图说明上述的情形，在图 240 上表示出了稳定的极限环，而图 241 与 242 为不稳定极限环. 可看出，类似乎图 242 所示的极限环是这样的，所有的轨线当 $t \to +\infty$ 时（例如，从外部），从同一边向它接近，而在另一边（例如，从里面）则离开它，这种极限环有时称之为"半稳定的"或双重的极限环（后一名称的来源是由于这种极限环在系统的参数有适当的变化时，一般地将分裂为二，一个是稳定的，而另一个是不稳定的）.

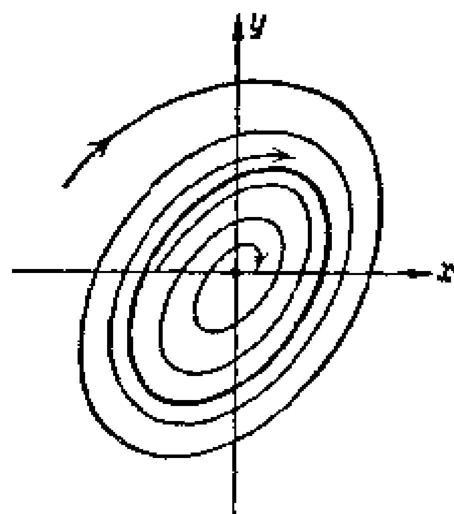


图 242

关于极限环的稳定性，除了把极限环当作轨线时，我们刚刚在上面给出的定义之外（这种稳定性我们通称之为轨道稳定性），还有对应于极限环之周期运动的李亚普诺夫意义下的稳定性. 那就是说，周期运动 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$（具有周期 T，所以有 $\varphi(t+T) \equiv \varphi(t)$ 及 $\psi(t+T) \equiv \psi(t)$）称为李亚普诺夫意义下稳定的（按李亚普诺夫

稳定)，如果对于每一个给定的正数 ε，都能找到这样的正数 δ，使得任何满足条件

$$|x(t_0)-\varphi(t_0)|<\delta \text{ 与 } |y(t_0)-\psi(t_0)|<\delta$$

的其他运动 $x=x(t)$，$y=y(t)$，在任意的 $t>t_0$ 时，都满足不等式

$$|x(t)-\varphi(t)|<\varepsilon \text{ 与 } |y(t)-\psi(t)|<\varepsilon.$$

下面我们主要是应用极限环的轨道稳定性的概念。

极限环的稳定性（以及相应的周期运动在李亚普诺夫意义下的稳定性)决定于其"特征指数"

$$h=\frac{1}{T}\int_0^T \{P'_x[\varphi(t),\psi(t)]+Q'_y[\varphi(t),\psi(t)]\}dt \qquad (5.51)$$

的符号，其中 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 是对应于该极限环的任意的周期解，而 T 是解的周期．就是说，**极限环当** $h<0$ **时稳定，而** $h>0$ **时不稳定**（$h=0$ 的值对应于稳定的，也对应于不稳定的极限环）.

为了研究周期运动 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 在李亚普诺夫意义下的稳定性，正象李亚普诺夫指出的，可以采用与研究平衡状态的稳定性时所做那样，把方程进行线性化的方法．如果令 $x=\varphi(t)+\xi$，$y=\psi(t)+\eta$，并将这些表达式代入方程 (5.1)，展开右端——函数 $P(\varphi+\xi,\ \psi+\eta)$ 及 $Q(\varphi+\xi,\ \psi+\eta)$ 为 ξ 与 η 的幂级数，弃去非线性项，那么我们便得到关于"扰动"坐标 ξ 与 η 的线性方程("一次近似方程")：

$$\frac{d\xi}{dt}=P'_x[\varphi(t),\psi(t)]\xi+P'_y[\varphi(t),\psi(t)]\eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt}=Q'_x[\varphi(t),\psi(t)]\xi+Q'_y[\varphi(t),\psi(t)]\eta.$$

这是具有周期为 T 的周期系数的线性微分方程（因为 P'_x，P'_y，Q'_x，Q'_y 是 φ 与 ψ 的函数——以 T 为周期的周期的时间函数)．其解的一般形式是：

$$\xi=C_1f_{11}(t)e^{h_1t}+C_2f_{12}(t)e^{h_2t},$$

$$\eta=C_1f_{21}(t)e^{h_1t}+C_2f_{22}(t)e^{h_2t},$$

其中 f_{ik} 是某些周期函数（周期为 T)．至于 ξ 与 η 的解的特性，它们依赖于所谓的"特征指数"：h_1 与 h_2，就是说，它们实部的符号确定着这些解是增长的，还是衰减的。

在所研究的问题中(由于原方程组 (5.1) 的自治性)，一个特征指数等于零，而另一个等于 h[185]．指数的符号决定运动是否稳定[3]，就是说：如果

$h < 0$，周期运动是李亚普诺夫意义下稳定的（当然不是绝对稳定的，因为扰动的相角并不衰减），如果 $h > 0$，则是不稳定的；又如 $h = 0$，那末一次近似方程不能解决关于周期运动稳定性的问题.

对上述极限环的稳定条件进行证明之前，在关于孤立闭轨线（极限环）的物理解释这一重要问题上，我们稍多讲一些.

如果我们要求真实系统中可能运动的定性特性，当系统有任意微小的改变时（用数学语言来说，就是当方程组 (5.1) 的右端有任意微小的改变时）并不改变，那末以后可知，这样就不许可有非孤立闭曲线的存在. 在满足这个当动力学系统有微小改变时，运动的定性特性稳定的要求的系统中——在所谓的“粗”系统中——只可能有孤立的闭轨线（只可能有极限环），并且它必定具有不为零的特征指数（因此，极限环的轨道稳定性，包含了所有与之对应的周期运动的按李亚普诺夫的稳定性）.

从物理的观点上来看，下面对稳定极限环所表示的运动所作的注记，是有意义的. 那就是可以说，对于这种运动，周期和“振幅”[1]在下述意义上不依赖于初始条件，即所有邻近的运动（对应于某一整个初值区——所谓大范围稳定区）渐近地接近于极限环上的运动，极限环上的这一周期运动有一定的周期和一定的“振幅”.

具有负的特征指数的极限环所表示的周期运动的上述性质：(a) 对于系统本身的微小改变的稳定性；(b) 周期与“振幅”对初始条件的不依赖性（在上述的意义下）——构成了真实自振过程的特点.

具体研究在各种自振情况中所遇到的 (5.1) 型的方程以及许多实例后，也可证明，如果方程 (5.1) 能充分精确地反映真实自振系统的运动规律，那末必定有特征指数为负的极限环存在，而且这些极限环实际上反映着定态周期过程.

由此我们可作出这样的结论：在由方程 (5.1) 充分精确地反映的系统中，建立起来的真实自振过程，数学上对应于具有负特征

1）精确些说，应该是：“周期及将周期运动展为富里埃级数时所得的整个振幅谱”.

指数的极限环. 在所研究的动力学系统的相图上，存在这种极限环，是系统中可能存在自振（在适当的初始条件下）的充分必要条件，亦即系统是自振系统的条件[3,5].

特征指数为正的不稳定极限环，不用说，在"粗"系统的相图中也可能存在. 但是这种极限环并不对应于真实的周期过程；它只起"分水岭"的作用，在它两侧的轨线具有不同的性状. 十分明显，这种情形也是有重要的物理意义的. 例如，存在不稳定极限环可以解释所谓的"硬"状态，在硬状态下，微小的初偏离在系统中会衰减掉，而大的却会增大起来.

§7. 点变换和极限环

我们在第三章§§3—5中看到，求极限环及确定其稳定性的方法之一，就是将问题归为为某种点变换，并且计算它的所谓的后继函数的问题.

1. 后继函数与点变换 庞卡莱导出的后继函数的概念如下.

在相平面上，过动力学系统

$$\frac{dx}{dt}=P(x,\ y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,\ y) \tag{5.1}$$

的常点，作所谓的无切线段 L，亦即在其上的每一点，系统(5.1)的相轨线均与之相交而不相切的线段[1]. 以 A 与 B 记其端点，s 记线段 L 上之点的坐标（我们假设，当沿线段由 A 向 B 运动时，s 单调地增加；例如，s 可以取为线段上的点到 A 端的距离).

设 Q 是 L 上的点. 考虑通过 Q 点的轨线 C，并设 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 是沿该轨线的运动，同时，点 Q 对应于 $t=t_0$. 我们来研究 $t>t_0$ 时的轨线 C. 当 $t>t_0$ 时，很可能轨线 C 不再与线段 L 相交. 我们就说，Q 点"在线段 L 上没有后继点".

---

1) 在某些情况中，采用无切弧，亦即采用与相轨线相交而不相切的简单光滑曲线弧，比无切线段(直线段)更为适宜. 下面全部的讨论，在这种情况中仍然成立.

但是当 $t > t_0$ 时，轨线 C 也可能与线段 L 再次相交. 令 $\bar{t}$ 是第一次 C 与 L 相交的，大于 t_0 的 t 值，$\bar{Q}$ 是线段 L 上的对应点. 这时我们说，Q 点"在线段 L 上有一个后继点 $\bar{Q}$"（图 243).

根据对初始条件连续依赖的定理，很容易证明，如果某个 Q 点有后继点且不与线段 L 的端点 A 或 B 重合，那末所有在 L 上充分邻近 Q 的点也有后继点.

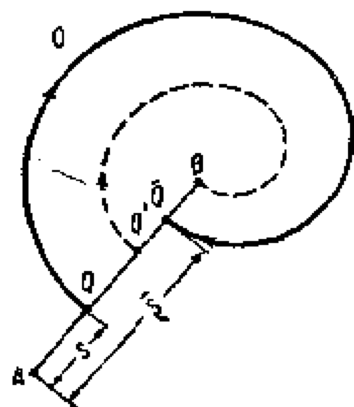


图 243

令 s 与 $\bar{s}$ 表示线段 L 上的点及其后继点的坐标. 显然，$\bar{s}$ 是 s 的函数. 这个函数

$$\bar{s} = f(s) \tag{5.52}$$

称为**后继函数**，它表示了线段 L 的某一个**点变换**的规律，这一规律建立起线段 L（或其一部分）的点及其后继点（在同一线段 L 上）间的单值对应关系. 几何上很明显，当无切线段与有螺线性之轨线或闭轨线相交时，就有"后继函数". 显然，这时如果某个值 $s = s_0$ 对应闭轨线，则 $f(s_0) = s_0$，亦即，点 Q 及其后继点 $\bar{Q}$ 重合（线段 L 上这种把自己变为自己的点，称为点变换 (5.52) 的**不动点**). 反之，求交于给定无切线段的闭轨线，便归结为求 $\bar{s} = f(s) = s$ 时的 s 值. 也不难看出，当所有与线段 L 相交的轨线封闭时，后继函数就是 $\bar{s} = s$. 庞卡莱证明了函数 $\bar{s} = f(s)$ 的许多性质，我们不加证明地引述如下.

性质 I. 如果点 Q_0 对应 $s = s_0$，在线段 L 上有后继点，那末函数 $\bar{s} = f(s)$ 在点 $s = s_0$ 上是 s 的全纯函数.

性质 II. 导数 $d\bar{s}/ds$ 恒正.

第一个性质，实质上，就是关于具有解析右端的方程组 (5.1) 的解，是初始条件的解析函数的定理的推论，而后一个性质是科希定理的推论，即相轨线不能相交的推论.

后一个性质在几何上意味着，如果沿线段 L 运动，例如沿正方向运动，那末通过该点的后继点，亦将在线段 L 上沿同一方向运动.

设线段 L 的某点 Q_0 对应 $s=s_0$，且有后继点（不与线段 L 的端点 A 或 B 重合）。这时，根据上述，所有充分接近于 Q_0 的点也有后继点，因而对于所有充分接近 s_0 的 s 值，存在后继函数 $\bar{s}=f(s)$。我们来从点 Q_0 沿线段 L 向正方向（或负方向）运动，或者说是从 s_0 起增加（或减少）s。

那末会有下面几种可能：

1）或者到达线段 L 上的点 Q'，对应 $s=s'$，其后继点就是线段 L 的 B 端（或 A 端）（图 243）。这时线段 L 上对应于 $s>s'$（或 $s<s'$）的点，根据性质 II，在线段 L 上就没有后继点了，而后继函数对于 $s>s'$（或 $s<s'$）的值便没有定义。一般说来，在这情况中，我们可延长无切线段，以增大定义后继函数的 s 值的区间[1]。

2）或者到达这样的 $s=s'$，使得线段 L 上所有对应于区间 $s_0<s<s'$（$s'<s<s_0$）上的 s 值的点，都有后继点，而对应 $s=s'$ 的点 Q'，却在线段 L 上没有后继点。

可以证明，通过 Q' 的轨线在这情况下，到一个奇点而终止，不再与 L 相交。在只可能有简单奇点的情况下，这个奇点必定是鞍点[2]。

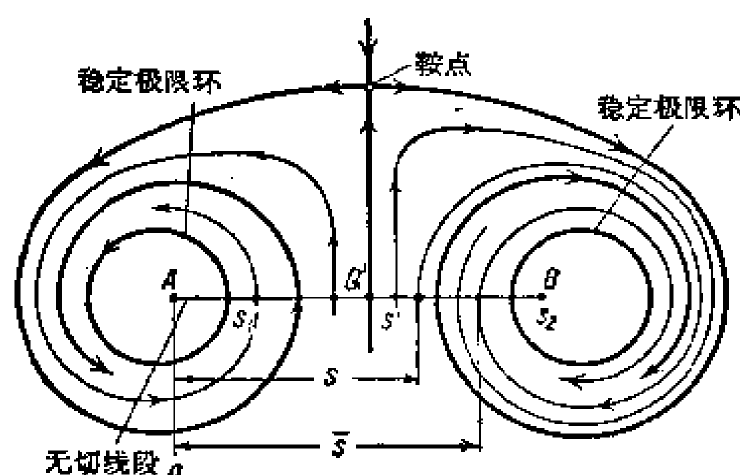


图 244

也可能遇到对应于 $s>s'$ 的值的点又有后继点的情形。这样，对于 $s<s'$ 及 $s>s'$ 都有后继函数。对于 $s=s'$，后继函数是不

1）无切线段只能延长至开始与相轨线相切为止。

2）这个奇点既不能是结点，也不能是焦点。实际上，这个通过 Q' 的轨线在结点或焦点上终止（不再与 L 相交）。不难证明，所有通过 L 上的对应小于（或大于）s'，但充分接近 s' 的 s 值之点的轨线，也在这一奇点终止，不再与 L 相交。由此可知，对应于小于（或大于）s' 的 s 值的点，没有后继点，这与我们的假设是相矛盾的。

确定的（图 244 与图 245）．不过有时把这两个后继函数（一个是 $s<s'$ 的，另一个是 $s>s'$ 的）称为一个后继函数，因而这个函数在 $s=s'$ 时，一般说来，在 $f(s'-0)\neq f(s'+0)$ 的意义下是间断的。

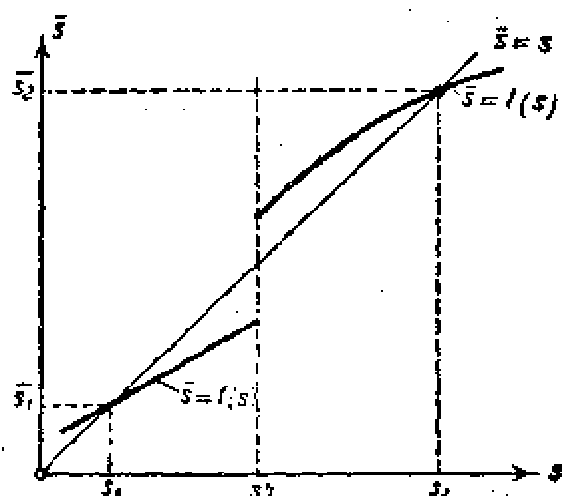


图 245

2. 不动点的稳定性．克尼格斯定理 总之，如果我们知道某个线段 L 到其自身的点变换（知道后继函数），那末寻求与这一线段相交的闭相轨线（极限环）的问题，便归结为求不动点，即线段 L 上使

$$f(s^*)=s^*$$

的 s^* 点的问题．用图解方法，我们可以把不动点当作 $s, \bar{s}$ 平面上之二条线的交点来寻求，其一，即所谓的拉梅尔图的曲线 $\bar{s}=f(s)$（后继函数的图），另一为等分角线 $\bar{s}=s$（图 246）.

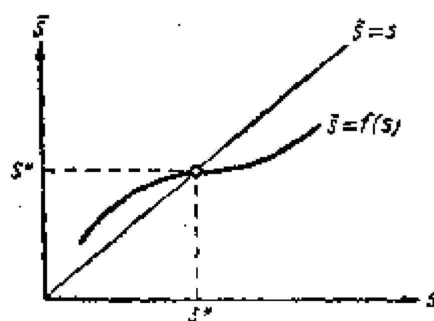


图 246

重要的是，后继函数不仅可以用来求出极限环，它还可以解决极限环的稳定性问题，因为它在不动点邻近的性状完全决定了相轨线在极限环邻域中的性状．为了确定极限环的稳定性，在对应于不动点 s^* 的极限环邻域中，我们来研究相轨线和线段 L 的交点序列——点列：

$$s,\ s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n,\ s_{n+1},\ \cdots, \tag{S}$$

其中每一个后继点，显然是按前一个点由后继函数确定的，亦即

$$s_1=f(s),\ s_2=f(s_1),\ \cdots,\ s_{n+1}=f(s_n),\ \cdots.$$

如果这些轨线中的任一条，当 $t\to+\infty$ 时趋向于极限环，那末对应的序列 (S)，便以不动点 s^* 为极限点．反之，根据序列 (S) 向不动点 s^* 收敛的性质，便可以作出结论：对应于点列的相轨线，

当 $t \to +\infty$ 时趋向于极限环.

如果极限环是稳定的，那末（由稳定性的定义）它便有这样一个邻域(ε)，使得所有初始点在这一邻域中的相轨线，当 $t \to +\infty$ 时都渐近地趋向于极限环. 这同时还意味着，在线段 L 上有一个不动点 s^* 的邻域(ε^*)——在二维区域(ε)内的线段 L 的一部分（图 247），使得每一个初始点位于邻域(ε^*)中的序列(S)，收敛于不动点 s^*（亦即，对属于(ε^*)的任意 s，当 $n \to +\infty$ 时，有 $s_n \to s^*$）.

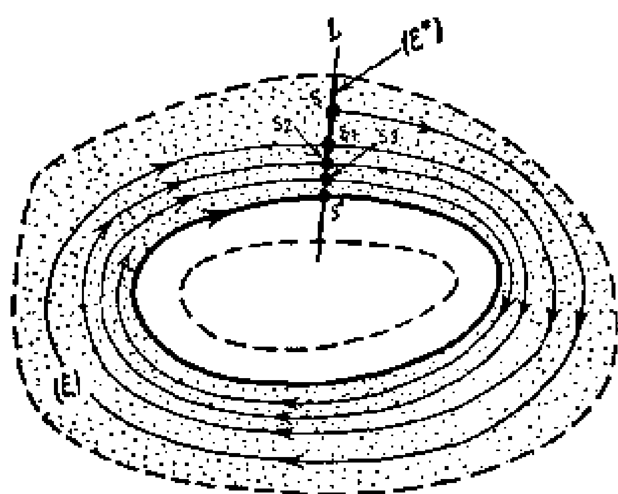


图 247

如果点变换的不动点有这样一个邻域，使得所有初始点 s 在(ε_*)中的序列

$$s,\ s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n,\ s_{n+1},\ \cdots$$

收敛于这个不动点，那末我们便称点变换的这个不动点是**稳定的**. 这时，上面所说的，显然意味着稳定的极限环对应着稳定的不动点，同时也不难看出，这个对应是相互的.

反之，如果在不动点 s^* 的任意小邻域中，能找到（就是一个也行）这样的 s，使得序列 $s, s_1, s_2, \cdots, s_n, s_{n+1}, \cdots$ 不收敛于 s^*，那末我们就称不动点为**不稳定的**. 显然，它对应于不稳定的极限环，因为存在这样的点列，从不动点的邻域开始而不收敛于它，就说明在极限环的任意小邻域中，存在着当 $t \to +\infty$ 时会离开它的相轨线.

由后继函数 $\bar{s} = f(s)$ 表示的点变换之不动点 s^* 的稳定性条件，以及与之对应的极限环的稳定性条件，由以下**克尼格斯定理**给出[168,169] 1)：

1) 这是克尼格斯定理的一般公式，它对 $\frac{d\bar{s}}{ds} < 0$ 的情况也成立. 当动力学系统(5.1)有非解析的右端，或相面不是普通平面时，就会发生这种 $d\bar{s}/ds < 0$ 的情况.

如果对于点变换 $\bar{s}=f(s)$ 的不动点 s^*，有

$$\left|\frac{d\bar{s}}{ds}\right|_{s=s^*}<1, \tag{5.53a}$$

那末点 s^* 是稳定的，如果有

$$\left|\frac{d\bar{s}}{ds}\right|_{s=s^*}>1, \tag{5.53b}$$

则是不稳定的。

为了证明克尼格斯定理，首先把线段 L 上的坐标原点移到点 s^*，并引入

$$\xi=s-s^*, \quad \bar{\xi}=\bar{s}-s^*$$

（不动点就是 $\xi=0$）。这时，点列 $s, s_1, s_2, \cdots, s_n, s_{n+1}, \cdots$（其中每一个后继点是按前一个点由后继函数所决定的）和正数序列

$$|\xi|, |\xi_1|, |\xi_2|, \cdots, |\xi_n|, |\xi_{n+1}|, \cdots$$

对应，其中 $\xi_n=s_n-s^*$。

如果 $\left|\frac{d\bar{s}}{ds}\right|_{s=s^*}<1$，那末在线段 L 上，就存在不动点的这样的邻域 $|\xi|\leqslant A$（图 248, a），使得其中的点，除 $\xi=0$ 外，都有

$$|\bar{\xi}|<\alpha|\xi|, \tag{5.54}$$

此处 α 是某个小于一的正数。因此，每个正数序列

$$|\xi|, |\xi_1|, |\xi_2|, \cdots$$

在 $|\xi|\leqslant A$ 的条件下，是单调减小的下有界的序列，因而根据关于这种数列的收敛性定理，它必收敛于某个极限，但是此极限不会不是零[1]。这样，当满足条件 (5.53a) 时，初始点在邻域：$s^*-A\leqslant s\leqslant s^*+A$ 中的任意点列收敛于 s^*，因而不动点 s^* 是稳定的。

如果满足条件 (5.53b)，那末存在这样的邻域 $|\xi|\leqslant B$，使得

---

1) 事实上，如果这个极限不为零，且等于 $a(a>0)$，那末，这时对于所有的 n，有 $|\xi_n|>a>0$，并由条件 (5.54) 有

$$|\xi_n|-|\xi_{n+1}|>\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)|\xi_{n+1}|>\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)a,$$

这与关于数列极限的科希判据是矛盾的。

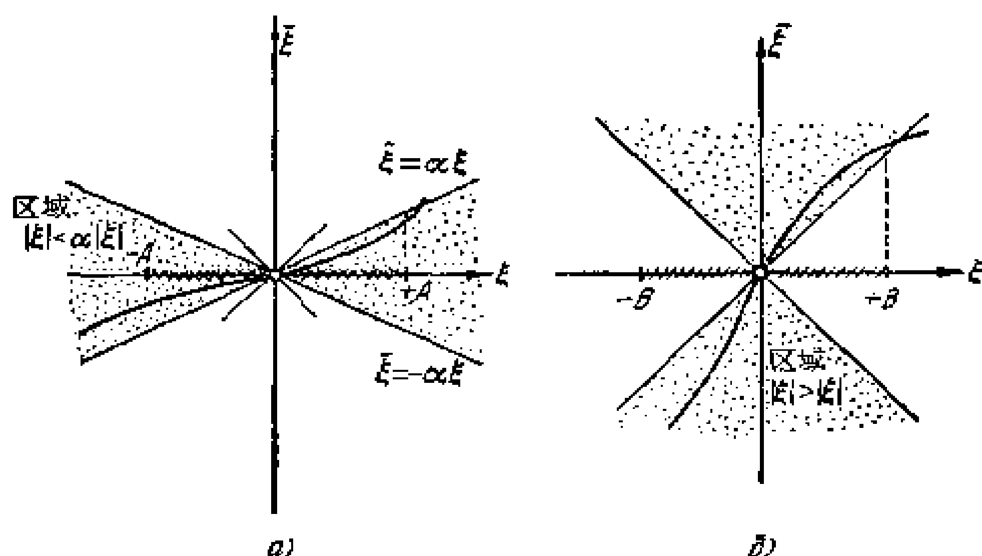


图 248

对于其中的点，有 $|\bar{\xi}| > |\xi|$（图 248, $б$）. 因此，任何数列 $|\xi|$, $|\xi_1|$, $|\xi_2|$, $\cdots$（在 $|\xi| \leqslant B$ 的条件下），显然不会收敛于极限 $\xi = 0$，而序列 $s, s_1, s_2, \cdots$（初始点 s 满足：$s^*-B\leqslant s\leqslant s^*+B$）*† 也就不可能收敛于 s^*. 因此，在这个情况中，不动点是不稳定的.

这就证明了克尼格斯定理[1]. 注意这个定理并未解决 $\left|\frac{d\bar{s}}{ds}\right|_{s=s^*} = 1$ 时，不动点的稳定性问题（在这一情况下，还需作进一步的研究，因为稳定性决定于后继函数的更高阶导数的符号）.

3. 极限环的稳定性条件　　现在根据克尼格斯定理，来求相平面上极限环的稳定性条件，并用动力学方程组

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{5.1}$$

的右端表示出这个条件. 令 C_0 为系统 (5.1) 的极限环，其参数方程为

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

*† 其中 B 原书中为 A——译者注.

1) 我们记得，对于由具有解析右端的动力学系统 (5.1) 在相平面上的相轨线所实现的线段 L 的点变换，有 $d\bar{s}/ds = f'(s) > 0$. 因此，其不动点的稳定条件（或对应的极限环的稳定条件）是不等式 $f'(s^*) > 1$，而不稳定的条件是不等式 $f'(s^*) < 1$*.

(φ 与 ψ 是周期为 T 的周期函数). 在这个极限环的邻域中，引入新的曲线坐标 u, v (图 249)，令

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u) - v\psi'(u), \\ y &= \psi(u) + v\varphi'(u). \end{aligned}\right\} \tag{5.55}$$

直线 u = 常数是极限环的法线，而曲线 v = 常数是闭曲线 (曲线 $v=0$ 和极限环 C_0 重合). 该坐标变换的雅可比式

$$D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi'(u) - v\psi''(u) & -\psi'(u) \\ \psi'(u) + v\varphi''(u) & \varphi'(u) \end{vmatrix}$$

$$= \varphi'^2 + \psi^2 + v[\psi'\varphi'' - \varphi'\psi''] > 0$$

对于所有的 u 与充分小的 v 都成立 (由于在极限环的任一点上，$\varphi'^2 + \psi'^2$ 都不为零，故我们可以选择这样的正数 a 与 A，使得对于任何 u 有 $\varphi'^2 + \psi'^2 > a$，且当 $|v| \leqslant A$ 时，雅可比式 $D > 0$). 因此，在以闭曲线 $v = -A$ 与 $v = +A$ 为界并包含极限环 C_0 本身的环域中，无论是法线段 u = 常数或闭曲线 v = 常数，都不互交，并且平面上 (在这区域内) 的每一点，都对应唯一的一对数——曲线坐标 (u, v).

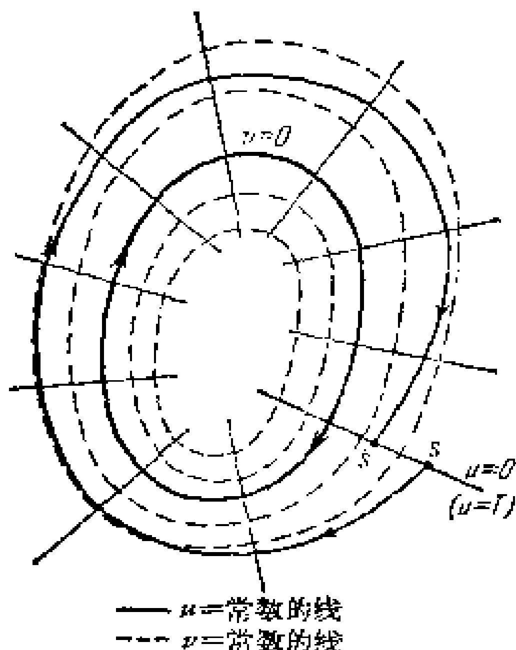


图 249

把方程 (5.1) 在环域 $|v| \leqslant A$ 内化为新变量 u 与 v 的方程，便得：

$$[\varphi' - v\psi''] \frac{du}{dt} - \psi' \frac{dv}{dt} = P(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi'),$$

$$[\psi' + v\varphi''] \frac{du}{dt} + \varphi' \frac{dv}{dt} = Q(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi'),$$

解出 du/dt 与 dv/dt，得：

$$\frac{du}{dt} = \frac{P(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi')\varphi' + Q(\varphi - v\psi', \psi + v\varphi')\psi'}{D},$$

$$\frac{dv}{dt}$$
$$=\frac{-P(\varphi-v\psi',\psi+v\varphi')[\psi'+v\varphi'']+Q(\varphi-v\psi',\psi+v\varphi')[\varphi'-v\psi'']}{D}.$$

或两式相除后:

$$\frac{dv}{du}$$
$$=\frac{-P(\varphi-v\psi',\psi+v\varphi)[\psi'+v\varphi'']+Q(\varphi-v\psi',\psi+v\varphi')[\varphi'-v\psi'']}{P(\varphi-v\psi',\psi+v\varphi')\varphi'+Q(\varphi-v\psi',\psi+v\varphi')\psi'}. \tag{5.56}$$

注意到等式

$$P(\varphi,\psi)\equiv\varphi',\quad Q(\varphi,\psi)\equiv\psi', \tag{5.57}$$

不难证实,方程(5.56)右端的分母,当 $v=0$ 时不为零,因而在极限环 $v=0$ 的某个邻域中,也不为零(这里极限环 $v=0$ 是方程(5.56)的积分曲线,不难直接把 $v=0$ 代入该方程来证实这一点)[1]. 此外,这个方程的右端,显然是 u 的周期函数,且以 T 为周期.

取法线段 $u=0$(显然,$u=T$ 以至于 $u=nT$ 都对应于这一线段,其中 n 是整数)作为无切线段 L,并以

$$v=\Phi(u,s) \tag{5.58}$$

表示方程(5.56)的满足初始条件 $u=0$, $v=s$ 的解——通过线段 L 上某点 $M(v=s)$ 的相轨线的方程. 由方程(5.1)或方程(5.56)的解对初始条件的连续依赖性,在极限环与线段 L 相交之点(这个点记作 M_0)的充分小的邻域内,所有和线段 L 相交(当 $t=t_0$ 时)的相轨线,在接近 t_0+T 的 t 时(对应 $u=T$,因为在极限环邻近 du/dt 接近于一),将再次与线段 L 相交. 因此,轨线(5.58)与线段 L 相交之点的后继点的坐标,显然决定于关系式

$$\bar{v}=\bar{s}=\Phi(T,s)=f(s). \tag{5.59}$$

这个后继函数在点 M_0 的某邻域中,定义线段 L 到其自身的点变换

1) 在这个邻域中,方程(5.56)没有奇点,因而每一积分曲线都是由一条相轨线组成的.

(在同一邻域中),同时,点 $M_0(v=s=0)$ 当然是不动点.

不动点 M_0 的稳定性(因而亦是极限环 C_0 的稳定性),显然决定于值 $f'(0)$. 我们来证明,知道函数 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 后,怎样求值 $f'(0)$. 我们已知,方程 (5.56) 右端的分母,在极限环的某邻域中(当 $|v| \leqslant A$)不为零. 因此,方程(5.56)的右端在这邻域中是解析函数,并且可以写为 v 的幂级数形式,这时

$$\frac{dv}{du} = A_1(u)v + A_2(u)v^2 + \cdots \qquad (5.56a)$$

(级数的系数 $A_1, A_2, \cdots$ 是 u 的周期函数,周期为 T). 利用恒等式 $P'_x\varphi' + P_y\psi' \equiv \varphi''$ 及 $Q'_x\varphi' + Q'_y\psi' \equiv \psi''$(由微分恒等式(5.57)得出),不难算出

$$A_1(u) = P'_x + Q'_y - \frac{d}{du}\ln(\varphi'^2 + \psi'^2).$$

另一方面,因为具有解析右端的方程的解是初始条件的解析函数(见下册附录 I),所以解 (5.58) 是 s 的解析函数,并可以展为 s 的幂级数:

$$v = \Phi(u, s) = a_1(u)s + a_2(u)s^2 + \cdots$$

(自由项等于零,因为 $s=0$ 的值对应极限环: $v \equiv 0$). 为了求出函数 $a_i(u)$, 把这个级数代入方程(5.56a),令 s 的同次幂的系数相等. 这时,我们得到:

$$\begin{aligned} & a_1'(u)s + a_2'(u)s^2 + \cdots \\ & \quad \equiv A_1(u)[a_1(u)s + a_2(u)s^2 + \cdots] \\ & \qquad + A_2(u)[a_1(u)s + a_2(u)s^2 + \cdots]^2 + \cdots \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} a_1' &= A_1(u)a_1, \\ a_2' &= A_1(u)a_2 + A_2(u)a_1^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{aligned}$$

对初始条件

$$a_1(0) = +1 \text{ 及 } a_i(0) = 0 \quad (i = 2, 3, \cdots)$$

(后者可由明显的恒等式 $\Phi(0, s) \equiv s$ 得出),积分这些迭归的微分方程,可以求出函数 $\Phi(u, s)$ 之展式的系数. 特别是

$$\ln a_1(u)=\int_0^u A_1(t)\,dt=\int_0^u (P'_x+Q'_y)\,dt-\ln\frac{[\varphi'(u)]^2+[\psi'(u)]^2}{[\varphi'(0)]^2+[\psi'(0)]^2},$$

因而，

$$f'(0)=a_1(T)=e^{\int_0^T (P'_x+Q'_y)dt}$$

（因为函数 φ 与 ψ 以及其导数都是周期为 T 的周期函数）.

这样，如果极限环 C_3 的特征指数

$$h=\frac{1}{T}\int_0^T [P'_x(\varphi,\ \psi)+Q'_y(\varphi,\ \psi)]\,dt<0,$$

那末它便是稳定的，如果

$$h>0,$$

则是不稳定的（因为在前一情况中，$0<f'(0)<1$，而在后一情况中，$f'(0)>1$）.

§8. 庞卡莱示性数

在开始研究关于具体二阶动力学系统运动的问题之前，我们先阐述关于相轨线性质的某些一般定理，以及关于动力学系统相图的定性研究的某些方法，利用这些定理和方法，可以对某些动力学系统的相轨线的性质，因而亦就对其运动的特性，有一些了解，虽然常常是不完整的了解.

首先，我们来阐述庞卡莱提出的、关于各种平衡状态与闭轨线共存的一般规律[108]．要建立这些规律，必须引入闭曲线对于向量场的示性数的概念．示性数的概念在其他方面，特别是在研究轨线的定性图象对参数的依赖关系方面也有用.

研究决定于方程

$$\frac{dx}{dt}=P(x,\ y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,\ y)$$

的动力学系统的相平面，为讨论方便起见，其中 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 假设在整个相平面上是解析的.

在相平面上随便取一个不通过平衡状态的简单闭曲线 N．在

这个曲线上任取一点 S，沿过该点的相轨线的切向(图 250)，通过这个点作一个向量. 如果使点 S 沿曲线 N 运动，那末相轨线的切线向量便连续地转动. 当点 S 沿闭曲线 N 转了一周回到原处时，向量便转过几个整周，亦即转过 $2\pi j$ 的角度，其中 j 是整数. 如果向量转动的方向和点 S 沿闭曲线 N 转的方向相同，我们就说这个转向是正转向；为确定起见，例如，可以约定点 S 沿曲线 N 总是反时针而转动的. 这样，j 可以是正的，负的，也可以等于零. 在一定的意义下，整数 j 是不依赖于封闭曲线 N 的形状的. 实际上，如果曲线的形状连续地改变，那末向量的转角也只能连续地改变(如果这个闭曲线改变时，没有通过奇点)；因而，它根本不会改变，因为它只能取离散的数值序列(整数数列). 因此，所有其他的闭曲线中，如果也只包含曲线 N 中的那些奇点，则其数 j 也相同. 整数 j 称为闭

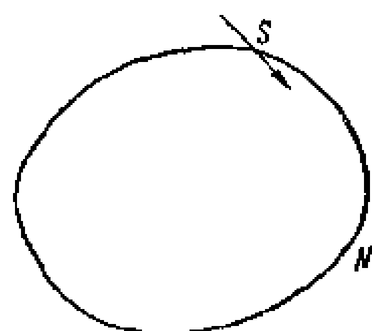
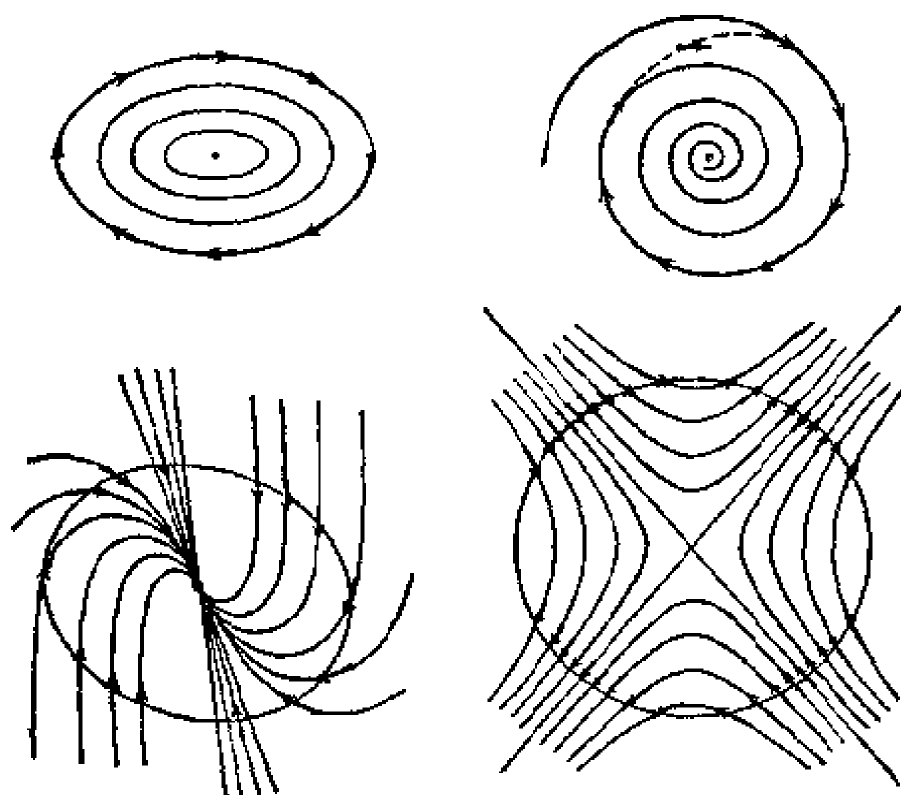


图 250


图 251

曲线N关于所研究的向量场的示性数．以简单的闭曲线N包围一个平衡状态，即一个奇点．我们看到过，如果闭曲线中不包含其他奇点，那末示性数不依赖于曲线的形状，因而它决定于奇点的特性．因此，这种闭曲线的示性数也可以说是奇点本身的示性数，并称之为该奇点的庞卡莱示性数．

由直接观察（图 251）不难证实，中心，结点与焦点的庞卡莱示性数等于 $+1$，鞍点的庞卡莱示性数等于 -1．

同样，由直接观察不难证实下列断言的正确性：

1）不包含任何奇点在内的闭曲线的示性数等于零（图 252）；

2）包含有几个奇点在内的闭曲线的示性数，等于诸奇点示性数之和[1]；

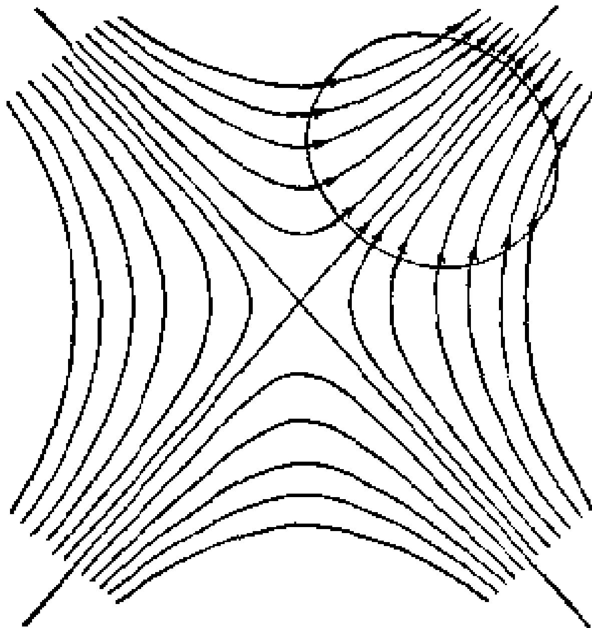


图　252

3）同时也是系统（5.1）的闭轨线的闭曲线，其示性数等于 $+1$（见图 251 上中心的情况），因为这时向量的方向总是同曲线N的切向重合的；

4）闭曲线上的由方程组（5.1）决定的向量，方向全朝内或全都朝外时（这个闭曲线就是"无切环"），其示性数等于 $+1$（见图 251 上结点的情况）[2]．

这些由直接观察所得的断言，实质上，也就是利用以几何直观为依据的、关于连续性的某些概念，通过对一些个别例子进行研究

1）我们来看包含有几个奇点的闭曲线 N．利用作几条内曲线（"隔板"）把曲线N所界的区域划分为小区，使得每一个小区中都只包含有一个奇点．如果绕所有区的运动都沿同一的转向，则绕曲线N一周时向量的转角等于绕各小区一周时向量转角之和；因为每个小区的边界都要经过两次，两次的方向又相反，绕内部隔板走时所得的转角相互抵消．由此便得出 2）的断言．

2）必须注意到，示性数和沿相轨线的运动的方向无关，例如，稳定结点与不稳定结点的示性数都等于 $+1$．

的方法，所得到的结果，可以严格地证明[1]，例如用解析的方法．在转入研究这些论断的推论之前，举几个用解析方法进行研究的例子．

不难看出，闭曲线N对于由方程组(5.1)定义的向量场的示性数，可以用下列曲线积分表示：

$$j=\frac{1}{2\pi}\oint_N d\left\{\operatorname{arc\,tg}\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}\right\}=\frac{1}{2\pi}\oint_N\frac{PdQ-QdP}{Q^2+P^2}.$$

这是对全微分的曲线积分；因而，如果在进行积分的曲线N所包含的区域内，对应的被积函数与其导数是连续的，则积分等于零．由此，立刻严格地证实了关于闭曲线中如果没有奇点则其示性数便等于零的第一个断言[2]，因为在我们关于方程组(5.1)右端所作的假设下，被积函数及其导数所作的连续性，只有在同时有$P(x,y)=0$，$Q(x,y)=0$的点上才不成立．

现在用解析法来计算奇点的庞卡莱示性数，亦即计算包含这个奇点而不包含任何别的奇点的简单闭曲线的示性数．这时将假设对这个点有$\Delta=ad-bc\neq 0$．

为了不改变符号，假设所研究的奇点在坐标原点上，所以

$$\frac{dx}{dt}=ax+by+P_2(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=cx+dy+Q_2(x,y),$$

其中P_2与Q_2是对x与y首项不低于二次的级数．

先证明在计算奇点的示性数时（当$\Delta\neq 0$），可以弃去高次项，亦即P_2与Q_2．因为根据前面所述，示性数不依赖于曲线的形状，那末在计算示性数时，可以取半径$\rho(\rho>0)$充分小的圆为曲线N．

用$x=\rho\cos\varphi$，$y=\rho\sin\varphi$化为极坐标，把曲线积分变成普通的定积分：

$$j=I(\rho)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a\cos\varphi+b\sin\varphi)d(c\cos\varphi+d\sin\varphi)-(c\cos\varphi+d\sin\varphi)d(a\cos\varphi+b\sin\varphi)+\rho F(\rho,\varphi)d\varphi}{(a\cos\varphi+b\sin\varphi)^2+(c\cos\varphi+d\sin\varphi)^2+\rho G(\rho,\varphi)},$$

---

1) 除断言2)以外，因为由注中的分析，可以认为这一断言已严格证明了．

2) 不可能有逆断言，因为复杂奇点（有$\Delta=0$）的示性数可能等于零．

其中 $F(\rho, \varphi)$, $G(\rho, \varphi)$ 是 ρ 的幂级数（从 ρ 的零次项开始），其系数是 φ 的周期函数.

这里以 $I(\rho)$ 记右端的定积分. 十分明显，与示性数的概念密切有关的曲线积分，只对 $\rho > 0$ 才有意义. 但是，应注意下面的问题. 定积分 $I(\rho)$, 对于充分小的 ρ, 是 ρ 的连续函数(因为 $\Delta \neq 0$). 因此，$\lim_{\rho \to 0} I(\rho) = I(0)$. 另一方面，我们知道，对于充分小的 ρ，曲线积分不依赖于 ρ. 由此可知，对于充分小的 ρ，有 $I(\rho) = I(0)$，因而 $j = I(0)$：

$$j = I(0)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos\varphi + b\sin\varphi)d(c\cos\varphi + d\sin\varphi) - (c\cos\varphi + d\sin\varphi)d(a\cos\varphi + b\sin\varphi)}{(a\cos\varphi + b\sin\varphi)^2 + (c\cos\varphi + d\sin\varphi)^2}.$$

这就证明了在算简单奇点（当 $\Delta \neq 0$）的庞卡莱示性数时，可以弃去非线性项. 为了计算 $I(0)$，用下面的方法比较方便. 再回到普通坐标，并把表达式再写为曲线积分：

$$j = I(0) = \oint_N \frac{(ax+by)d(cx+dy) - (cx+dy)d(ax+by)}{(ax+by)^2 + (cx+dy)^2},$$

其中 N 是任何包含原点在内的简单闭曲线，因为对于弃去非线性项后所得的线性方程，唯一的奇点就是坐标原点. 这个方法在于，取椭圆 Γ

$$(ax+by)^2 + (cx+dy)^2 = 1$$

作为这个闭曲线，经过简单的计算后，得

$$j = I(0) = \frac{\Delta}{2\pi} \oint_\Gamma (xdy - ydx),$$

其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

或根据用曲线积分表示面积的熟知公式，得

$$j = I(0) = \frac{\Delta}{\pi} S,$$

其中 S 是椭圆的面积. 因为 $S = \pi/|\Delta|$[1], 所以

$$j = \frac{\Delta}{|\Delta|}.$$

由此，立即可知结点，焦点与中心的庞卡莱示性数等于 $+1$，而鞍点的等于 -1，亦即与前面直接观察的结果相同(复杂奇点的庞卡莱示性数，因为它有 $\Delta = 0$，所以可以不是 ± 1. 例如，对鞍-结点型奇点，$j = 0$；见图 253). 我们不再进行解析的研究，以严格地证明其余断言；我们只指出，第二个断言可以由曲线积分的基本性质直接得出.

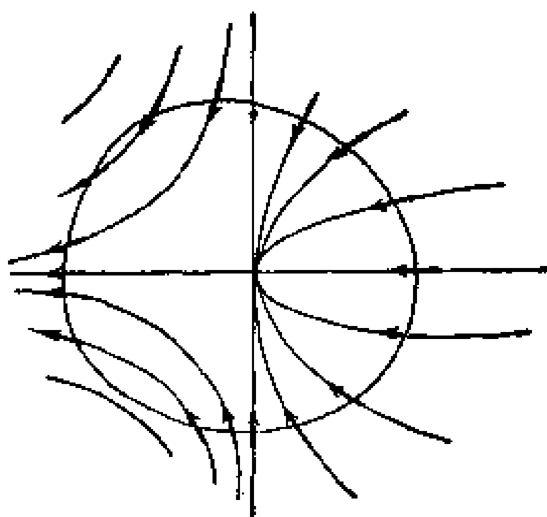


图 253

现在根据示性数理论，导出关于闭相轨线与各种性质的平衡状态的共存规律的下列推论.

推论 I. 在闭相轨线内，至少有一个奇点. 因为按前述，这种轨线的示性数等于 $+1$，而内部没有奇点的闭曲线，其示性数等于零.

推论 II. 如果在闭相轨线内有一个奇点，那末这不会是鞍点，

---

1) 取椭圆 $(ax+by)^2+(cx+dy)^2=1$. 为了计算椭圆的面积，可把直角坐标 x, y 化为坐标 $\xi = ax+by, \eta = cx+dy$, ξ, η 也可以解释为直角坐标.

这时，椭圆 $(ax+by)^2+(cx+dy)^2=1$ 变形为圆 $\xi^2+\eta^2=1$. 这个圆的面积 $S_1=\pi$.

另一方面，

$$S_1 = S\left|D\left(\frac{\xi, \eta}{x, y}\right)\right|,$$

其中 $D\left(\frac{\xi, \eta}{x, y}\right)$ 是相应的雅可比式. 因为

$$D\left(\frac{\xi, \eta}{x, y}\right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \Delta,$$

所以 $S_1 = S|\Delta|$，由此，面积

$$S = \frac{\pi}{|\Delta|}.$$

也不会是任何示性数不是 $+1$ 的奇点.

推论 III. 如果闭相轨线内,只有简单的奇点(其 $\Delta \neq 0$), 那末奇点数总是奇数,同时鞍点数要比其他奇点的数目少一个.

注意,对于任一无切环的闭曲线,亦可以得出同样的结论(在断言 4) 的基础上). 由此,特别可以得到下述结论: 如果无限远是绝对稳定或绝对不稳定的,那末,在有限距离内的全部奇点的示性数之和等于 $+1$.

§9. 没有闭轨线的系统

因为在研究具体的动力学系统时,所发生的困难是很大的,因此,常常由于缺乏正规和充分有效的方法而必须采用各种数值积分方法进行. 但是,也有一些情况,根据一般的理论就可以比较简单地将研究一直进行到底. 这种情况之一(实际上也是最重要的)——就是用某种方法能够证明,在所研究的系统的相平面上,没有闭相轨线的情况.

可以指出许多关于没有闭相轨线的判据,每一种都给出一些充分的条件. 虽然对于(5.1)型的方程所给定的系统,这些判据并未能给出任何能够证明没有闭相轨线的正规方法,但是,从举的实例中可以看出,这些判据还是有一定的实际意义的.

假定所研究的系统是由方程

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{5.1}$$

描述的,其中我们也将设 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 在整个相平面上都是解析的.

我们要研究的第一个判据——所谓本狄克生 (Bendixson) 判据,乃是完全由相轨线组成的闭回路不存在的充分条件[137].

本狄克生判据: 如果在相平面的某一单连通域中,表达式 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ 保持常号,那末在这个区域中,就不存在完全自动力学

系统 (5.1) 的相轨线组成的闭回路[1].

要证明这判据，用格林定理

$$\iint\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint(Pdy-Qdx).$$

如果沿回路的积分是在完全由相轨线组成的曲线上进行的，那末由方程(5.1)，这个积分等于零，因而，双重积分也等于零．但在这一情况下，表达式 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$ 必定在该回路之内某处变号；故我们的论断得证．

本狄克生判据的一个著名的推广是杜拉克(Dulac)判据[148,108]：如果存在某一有连续导数的连续函数 $B(x, y)$，使得在相平面上某单连通域内，表达式 $\frac{\partial(BP)}{\partial x}+\frac{\partial(BQ)}{\partial y}$ 保持常号，那末在这区域内，便不存在完全由系统 (5.1) 的相轨线组成的闭回路[2]．判据的证明完全和本狄克生判据的证明相同，因此这里不再赘述．

现在来看要求大大削弱的判据——只要求没有闭相轨线，换句话说，研究系统 (5.1) 中没有周期解的判据．

在 § 8 中所述的示性数理论的基础上，可以导出许多判据；我们引述几个在实用上最重要的．以后我们还要介绍几个以所谓的"接触曲线"为基础的判据．

1. 如果系统中没有奇点，那末也不可能有闭相轨线．

2. 如果系统中只有一个奇点，同时其示性数不等于 +1（例如，鞍点），那末在这个系统中不会有闭相轨线．

3. 如果系统有几个奇点，其任何组合的示性数之和都不等于 +1，那末这个系统亦不允许有闭相轨线存在．

4. 如果系统只有简单的奇点，同时，通过所有示性数为 +1 的点，都有走向无限远的积分曲线，那末这种系统中亦不允许有闭相

---

1) 注意，当 $P'_x+Q'_y$ 在这区域的某些点或某条曲线上等于零时，判据仍然成立．

2) 这里也容许 $\frac{\partial(BP)}{\partial x}+\frac{\partial(BQ)}{\partial y}$ 在这区域中某些点或某一曲线上等于零．并且，显然，亦可以把本狄克生判据看成是杜拉克判据的特殊情况．

轨线。

为了说明上面所述的，我们来研究几个无闭相轨线的动力学系统所描述的物理系统。

1. 对称电子管继电器(触发器) 作为第一个例子，我们研究对称电子管继电器(或触发器)的工作，其电路如图 254 所示(电容 C_a 与 C_g 表示电路中的小寄生电容)。在一定的条件下，电路有两个稳定的平衡状态，并且，如果在电路的适当的接点上，加以相应的电压脉冲，系统就会从一个平衡状态跳到另一个平衡状态。这种触发器在无线电技术的装置中(例如，在阴极示波器中，当在示波器输入接点上到达单个电压脉冲时，产生沿时间轴的所谓"等待的"电光扫描时所用的装置)，电脉冲计数器中，以及现代的电子数字计算机中，应用得相当广泛。

我们研究触发器的简化电路(图 255)，这是由完全电路(图 254)在假设没有栅流而且 $CR_1 = C_gR_2$ 时得到的。这时，把屏压的振荡传给电子管栅极的分压器的传递系数 β 是常数，不依赖于屏压振荡的波形[1]：

$$\left.\begin{aligned} u_1 - E_g &= \beta(u_{a2} - E_g), \\ u_2 - E_g &= \beta(u_{a1} - E_g), \end{aligned}\right\} \tag{5.60}$$

1) 严格地说，分压器的方程是微分方程。例如，对于把左边电子管的屏压振荡传给右边的栅极的分压器(图 254)：

$$i = C\frac{d(u_{a1} - u_2)}{dt} + \frac{u_{a1} - u_2}{R_1} = C_g\frac{du_2}{dt} + \frac{u_2 - E_g}{R_2},$$

其中 i 是流过分压器的电流，由此，

$$\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}(C + C_g)\frac{du_2}{dt} + u_2 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}C\frac{du_{a1}}{dt} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}(u_{a1} - E_g) + E_g.$$

不过，若 $CR_1 = C_gR_2$，则对任意的 u_{a1}，这方程的通解是

$$u_2 = E_g + \frac{R_2}{R_1 + R_2}(u_{a1} - E_g) + Ae^{-\frac{t}{CR_1}}.$$

因而，不论变数 u_{a1} 怎样，在电路接通了充分长时间以后(当 $t \gg CR_1$)，就会得到第二个关系式(5.60)。分压器所需的电流，不难算出，等于

$$i = \frac{CC_g}{C + C_g}\frac{du_{a1}}{dt} + \frac{u_{a1} - E_g}{R_1 + R_2};$$

因此，我们可以用有并联电容 $\frac{CC_g}{C + C_g}$ 的、仅由电阻 R_1 与 R_2 组成的分压器(在 $CR_1 = C_gR_2$ 的条件下)来代替 RC-分压器。

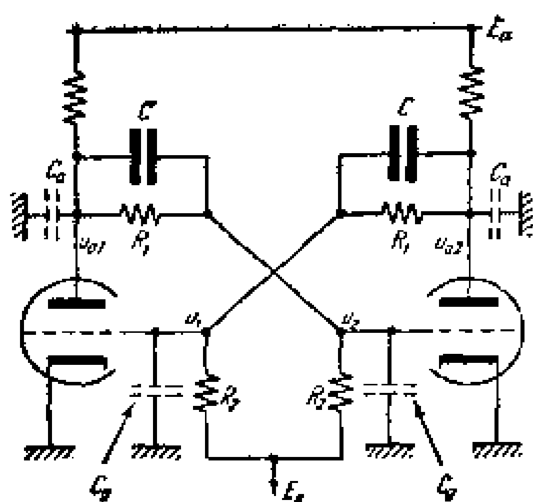


图 254

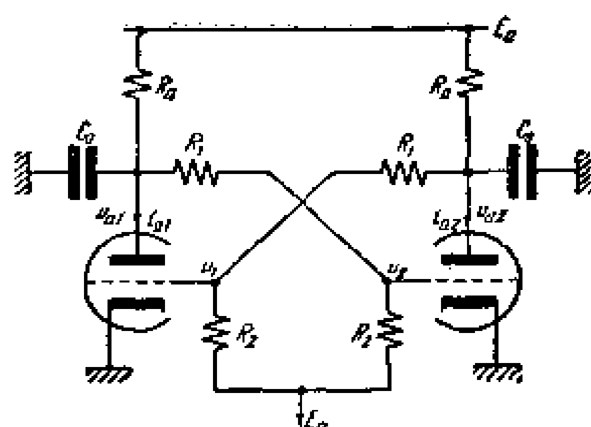


图 255

其中 $\beta = R_2/(R_1 + R_2)$，而屏极接点的等效电容（图 255 上的电容 C_0）等于 $C_0 = C_a + [CC_g/(C+C_g)]$. 我们将看到，这个简化电路是由两个一阶方程描述的（完全电路（图 254）当 $CR_1 \neq C_g R_2$ 时，是四阶方程的系统），并使我们可以把触发器的工作当成继电器来看待，在电路的不对称点上，例如，在一个电子管的栅极上加以电压脉冲时，继电器就会从一个平衡状态跳到另一个平衡状态（为了不在电子管的控制栅极上加以额外的电导耦合，通常就把这个电压加在电子管的另一个栅极上（例如，如果电路中用了五极管，就加在五极管的栅极上），或加在阴极电路中的小电阻上（图 256））. 对这个电路（用图 255 中的记号），得下列方程：

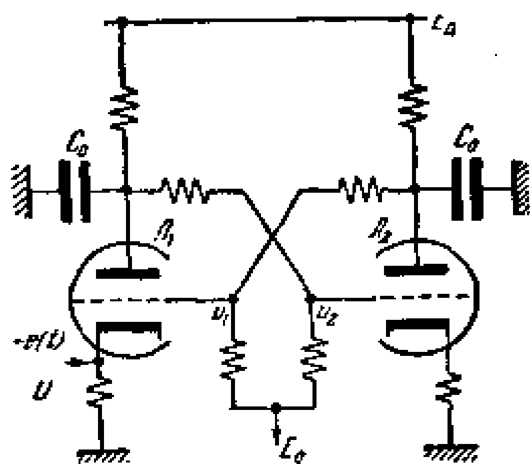


图 256

$$C_0 \frac{du_{a1}}{dt} + i_{a1} + \frac{u_{a1} - E_g}{R_1 + R_2} + \frac{u_{a1} - E_a}{R_a} = 0,$$

$$C_0 \frac{du_{a2}}{dt} + i_{a2} + \frac{u_{a2} - E_g}{R_1 + R_2} + \frac{u_{a2} - E_a}{R_a} = 0.$$

然后，忽略屏极反应，将假定每个电子管的屏流只是其栅压的函

数，亦即，$i_{a1}=f(u_1)$ 及 $i_{a2}=f(u_2)$. 我们假设电子管的特性曲线 $i_a=f(u)$ 的形状如图 257 所示，即具有下列性质：

1）电流是栅压的单调增函数，即 $f'(u)\geqslant 0$，同时，$0\leqslant f(u)\leqslant I_s$，其中 I_s 是电子管的饱和电流；

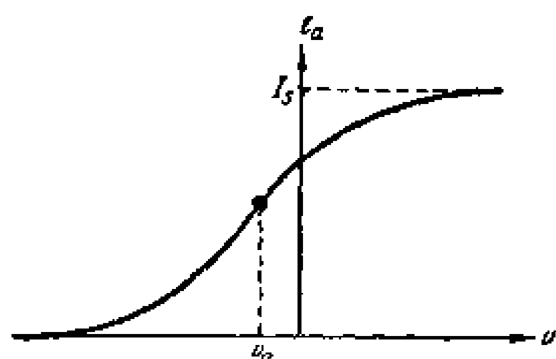


图 257

2）特性曲线的互导 $f'(u)$ 有唯一的极大值，且从这个极大值向两边一直单调地减小到零.

在上面的振荡方程中，引入电子管的特性，再利用(5.60)，可把方程化为

$$\left.\begin{aligned}C_0R\frac{du_1}{dt}&=-u_1-\beta Rf(u_2)+E,\\C_0R\frac{du_2}{dt}&=-u_2-\beta Rf(u_1)+E,\end{aligned}\right\}\tag{5.61}$$

其中

$$R=\frac{R_a(R_1+R_2)}{R_a+R_1+R_2},$$

$$E=E_g+\beta\frac{R}{R_a}(E_a-E_g)=\frac{R_2E_a+(R_1+R_a)E_g}{R_1+R_2+R_a},$$

或一个一阶方程：

$$\frac{du_2}{du_1}=\frac{u_2+\beta Rf(u_1)-E}{u_1+\beta Rf(u_2)-E}.\tag{5.62}$$

平衡状态显然决定于方程

$$u_2+\beta Rf(u_1)-E=0,\tag{5.63a}$$

$$u_1+\beta Rf(u_2)-E=0,\tag{5.63б}$$

并可以看成是曲线 (5.63a) 与 (5.63б) 在相平面上的交点（注意，第一条曲线是水平切线的等倾线，第二条是铅垂切线的等倾线）. 不难看出，对于任何参数值，都存在“对称的”平衡状态——在分角线 $u_1=u_2$ 上的平衡状态 (U,U)，顺便指出，分角线也是方程 (5.62) 的积分直线. 实际上，决定这个平衡状态的坐标的方程

$$U+\beta Rf(U)-E=0^{*},$$

由于函数 $f(u)$ 的上述性质，总是有一个且仅有一个解，对应于曲线 $y=f(u)$ 与直线 $y=(E-u)/\beta R$ 的交点. 除了这一"对称的"平衡状态以外，电路还有其他不在积分直线 $u_1=u_2$ 上，但对称分布的平衡状态（如果点 (a, b) 是平衡状态，那末点 (b, a) 也是平衡状态)；这样，平衡状态的总数总是奇数. 要找出平衡状态，需作出曲线 (5.63a) 与 (5.63б)，并求其交点. 这种求法见图 258，图 258，a—— $\beta Rf'(U)<1$ 的情况，这时只有一个（"对称的"）平衡状态；图 258 б——$\beta Rf'(U)>1$ 的情况，这时有三个平衡状态[1].

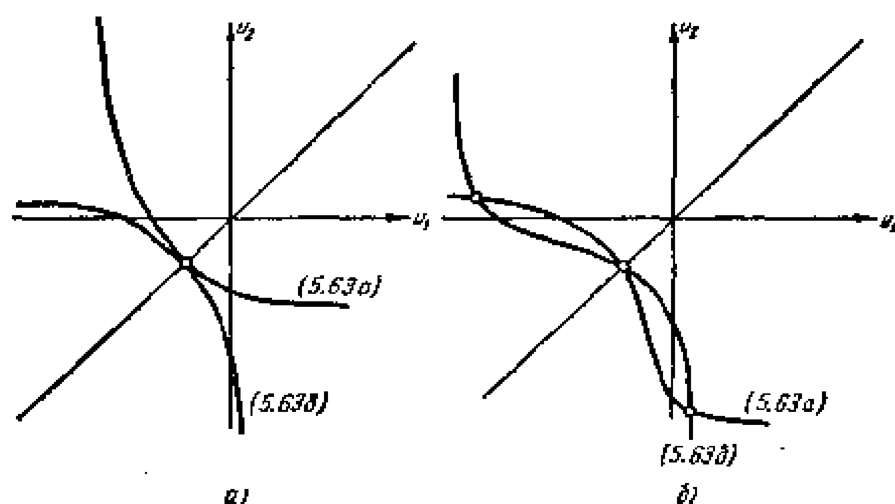


图 258

现在来研究平衡状态的稳定性. 为此，写出对平衡状态 (u_1^0, u_2^0) 的微小偏离的一次近似方程. 令

$$u_1=u_1^0+\xi,\quad u_2=u_2^0+\eta;$$

这时，不难证实，一次近似方程是：

$$C_0R\frac{d\xi}{dt}=-\xi-\beta Rf'(u_2^0)\eta,\quad C_0R\frac{d\eta}{dt}=-\eta-\beta Rf'(u_1^0)\xi,$$

---

* 其中的 $f(U)$ 原书为 $f'(U)$——译者注.

1) 如果 $\beta Rf'(U)$ 接近 1，而电子管特性的互导 $f'(u)$ 在"对称的"平衡状态上不是极大值，那么这个系统，一般地说，也可以有多于三个的平衡状态. 当 $\beta Rf'(U)<1$ 时，可以有 5，9，13，… 个，而当 $\beta Rf'(U)>1$ 时，可以有 7，11，… 个，这要看特性曲线 $f(u)$ 在由 $u=U$ 到互导极大点那一段上的形状而定. 下面我们只研究实用上最有意义的平衡状态是一个或三个的情况.

而特征指数决定于方程

$$\begin{vmatrix} C_0R\lambda+1 & \beta Rf'(u_2^0) \\ \beta Rf'(u_1^0) & C_0R\lambda+1 \end{vmatrix}=0,$$

由此，

$$C_0R\lambda_{1,2}=-1\pm\beta R'\sqrt{f'(u_1^0)f'(u_2^0)}.$$

注意到 $-\beta Rf'(u_1^0)$ 是曲线(5.63a)的切线的斜率，而 $-1/\beta Rf'(u_2^0)$ 是曲线(5.63б)的切线的斜率，我们得到，当 $\beta Rf'(U)<1$ 时，"对称的"平衡状态是稳定的(稳定结点)，而当 $\beta Rf'(U)>1$ 时，是不稳定的(鞍点)．因而，如果平衡状态只有它一个，那末便是稳定的；如果有三个平衡状态，那末它便是不稳定的；在后一种情况中，其余的两个平衡状态总是稳定的(稳定的结点)．

然后，如果用 $P(u_1, u_2)$ 与 $Q(u_1, u_2)$ 表示方程(5.61)的右端，则在整个相平面上

$$\frac{\partial P}{\partial u_1}+\frac{\partial Q}{\partial u_2}=-2<0,$$

因此，按照本狄克生判据，该系统没有由相轨线组成的闭回路，更没有闭相轨线．也不难看出，所有的相轨线都由无限远走向近处；事实上，从方程(5.61)，得表达式

$$\frac{1}{2}C_0R\frac{d}{dt}(u_1^2+u_2^2)$$
$$=-(u_1^2+u_2^2)-\beta R\{u_1f(u_2)+u_2f(u_1)\}+E(u_1+u_2),$$

对于充分大的 u_1 或 u_2，这个表达式总是负的；换句话说，半径 A 充分大的圆 $u_1^2+u_2^2=A^2$ 是无切环，同时，所有的相轨线都进入这个圆内．

为了把相平面划分为相轨线，这些知识已经足够了．这一划分简略地表示于图259a(当 $\beta Rf'(U)<1$ 时)，及图259б(当 $\beta Rf'(U)>1$ 时)上．

现在来研究当在一个电子管上加以电压脉冲时，触发器由一个平衡状态跳到另一个平衡状态的过程．设 $\beta Rf'(U)>1$，并且，在开始时，触发器在对应于相平面上结点 y_1 的平衡状态上工作，这

时，电子管 Л_1 闭塞，而电子管 Л_2 通路．在电子管 Л_1 上加一短暂的电压脉冲，使它通路（例如，在这电子管的阴极电阻上加以负脉冲，见图 256）．当电子管 Л_1 上加以附加的电压 $e(t)$ 时，电路的方程便为

$$\left.\begin{aligned} C_0R\frac{du_1}{dt} &= -u_1-\beta Rf(u_2)+E, \\ C_0R\frac{du_2}{dt} &= -u_2-\beta Rf(u_1+e(t))+E. \end{aligned}\right\} \qquad (5.64)$$

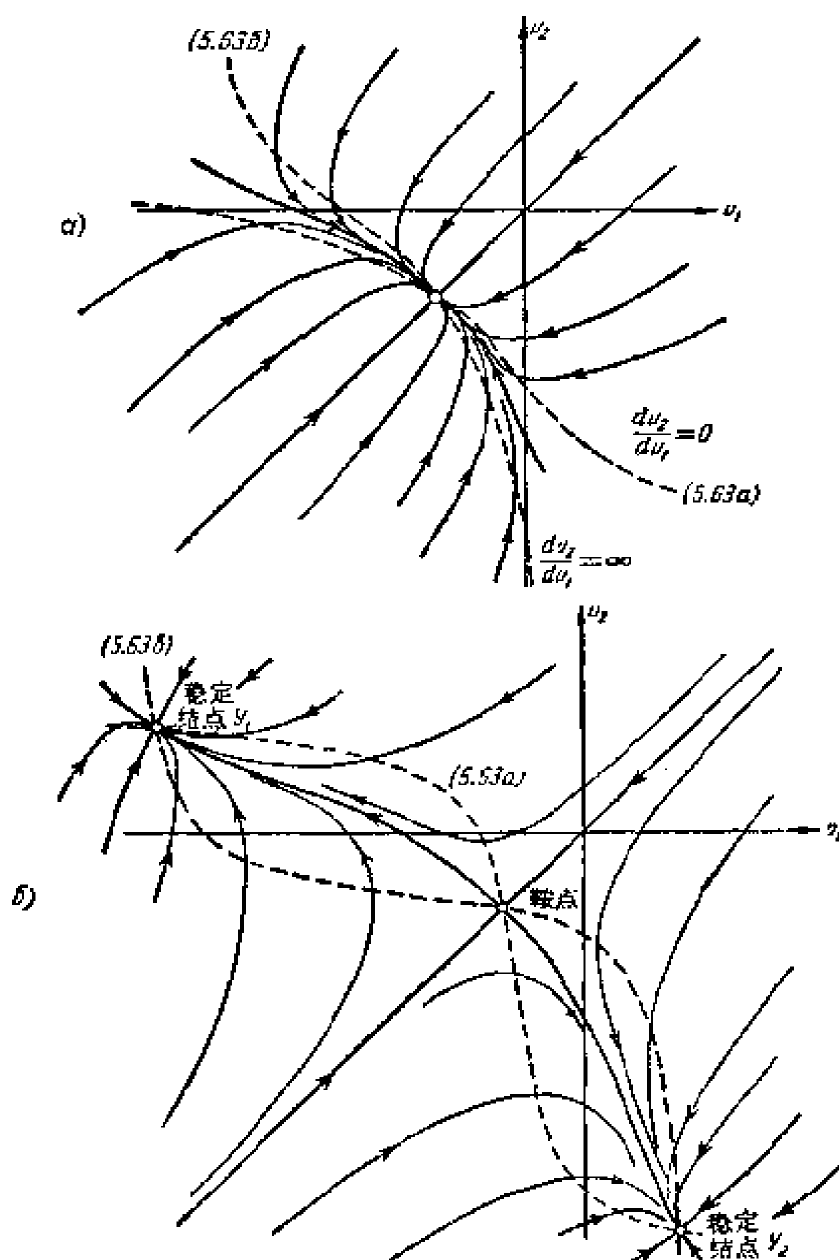


图 259

设脉冲是平顶的矩形波（图 260），我们就可以在脉冲作用的时间内（当 $0<t<\tau$），把系统看成是自治的，再把相图作在相平面 u_1，u_2 上（当然和以前对 $e=0$ 的情形所作的相图不同）．和前述的一样，每一个运动都使系统到达一个稳定的平衡状态（稳定的平衡状态又是结点）．现在，平衡状态决定于曲线 $u_2+\beta Rf(u_1+e)-E=0$ 及 $u_1+\beta Rf(u_2)-E=0$ 的交点，其中第一条曲线是将曲线 (5.63a) 向左平移 e 而得到的(我们设 $e>0$)，而第二条就是曲线 (5.63б)．

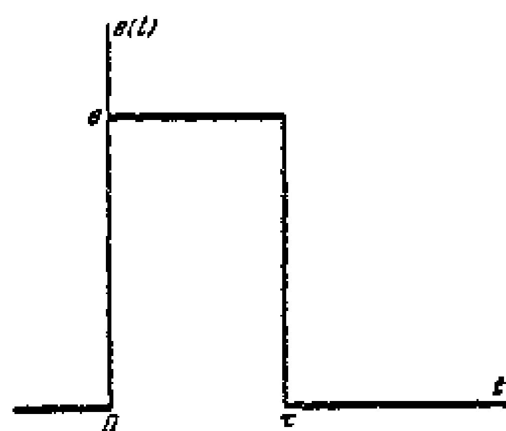


图 260

设脉冲 e 的幅值很大，使得触发器在脉冲作用下，有一个位于分角线右方的平衡状态 y（稳定的结点）(图 261)．设脉冲前后沿的坡度非常之大，以致在它通过的时间内，系统的状态来不及有明显的改变(电路中电容的充电量来不及有显著地改变)．脉冲前沿（当 $t=0$）刚通过后，系统的状态由相平面上的点 y_1 表示(图 261)．这个点在有脉冲之前是稳定的结点，但在脉冲作用期间内是简单的常点．根据方程(5.64)，相点沿相应的相轨线走向稳定的结点 y．如果在脉冲作用期间(亦即在

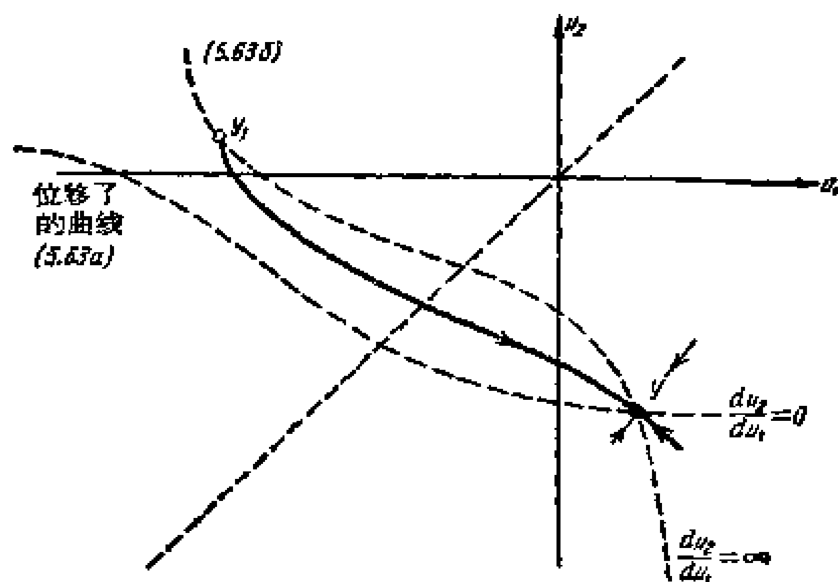


图 261

$t=\tau$ 之前)，相点越过了分角线 $u_1=u_2$，则在脉冲停止(当 $t=\tau$)之后，它位于 $e=0$ 的相平面(图 259б)上的结点 y_2 的"吸引"区内，以后就渐近地趋向于点 y_2。因此，如果脉冲有充分大的幅值 e 及持续时间 τ，就可以把触发器由平衡状态 y_1 抛到平衡状态 y_2。我们可看到，在重复给以这样的脉冲后，触发器必然仍停留在平衡状态 y_2 上(为了得到相反的抛掷，需给以反向的脉冲)。

还要作一点注记，它有着一定的实用价值。我们知道，触发器是作为计算单元用来计算电脉冲的(以二为模)。为此，脉冲要加在电路的对称点上(例如，加在公共的阴极电阻上；见图 262)，而这时，每个脉冲都把触发器从一个平衡状态抛到另一个平衡状态(这样，根据触发器的状态就可以确定有奇数个还是偶数个脉冲被加在触发器的输入接点上了)。不难看出，对我们研究的触发器的简化电路，当在电路的对称点上加以脉冲时，触发器不会被由一个平衡状态抛到另一个平衡状态。事实上，当对称地加以幅值为 e 的矩形脉冲时，简化电路的振荡方程是

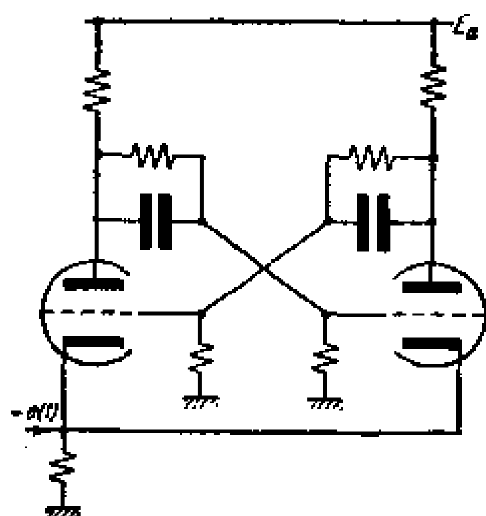


图 262

$$C_0R\frac{du_1}{dt}=-u_1-\beta Rf(u_2+e)+E,$$

$$C_0R\frac{du_2}{dt}=-u_2-\beta Rf(u_1+e)+E,$$

或写为单个方程的形式：

$$\frac{du_1}{du_2}=\frac{-u_1-\beta Rf(u_2+e)+E}{-u_2-\beta Rf(u_1+e)+E}.$$

直线 $u_1=u_2$ 显然是这方程的积分曲线。因此，在脉冲作用时间内，相点不能越过分角线 $u_1=u_2$，因而也就不会进入另一个结点的吸引区，既然留在原来的平衡状态的吸引区内，相点在脉冲停止后，

便会回到这个平衡状态去，于是触发器便不能够从一个平衡状态抛至另一个了．这反映了触发器一个真实的性质：要使触发器能用作一个计算单元，它必须要有充分大的电容 C（图 254）．

2. 发电机的并联运行　研究两个同样的串激直流发电机并联在公共的负荷上工作时的情形（图 263）．设电机的电枢转速相同而且不变，又忽略发电机磁路中的回滞现象，我们可以把每个电机的电动势 E 看成是它的激磁绕组中电流 i 的单值函数：$E=\phi(i)$．假定每个电机的特性曲线如图 264 所示，亦即：

1）$E=\phi(i)$ 是连续可微的奇函数（$\phi(-i)\equiv-\phi(i)$ 及 $\phi(0)=0$），且当 $i\to+\infty$ 时，$\phi(i)\to E_s$（当 $i\to-\infty$ 时，相应有 $\phi(i)\to-E_s$）；

2）导数 $\phi'(i)\geqslant 0$，且在 $|i|$ 增加时不增加，亦即，对于任意的 $|i''|>|i'|>0$，有 $\phi'(i'')\leqslant\phi'(i')\leqslant\rho$，其中 $\rho=\phi'(0)>0$．

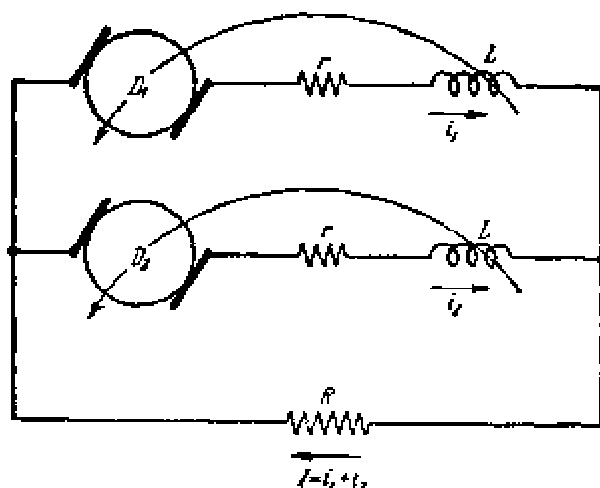


图 263

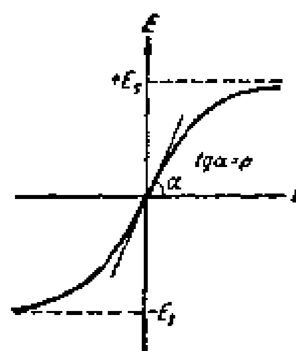


图 264

该系统的方程（用图 263 中的符号）可以写为

$$\left.\begin{aligned}L\frac{di_1}{dt}&=\phi(i_1)-(r+R)i_1-Ri_2,\\L\frac{di_2}{dt}&=\phi(i_2)-(r+R)i_2-Ri_1.\end{aligned}\right\}\tag{5.65}$$

二式相除，得积分曲线的方程：

$$\frac{di_2}{di_1}=\frac{\phi(i_2)-(r+R)i_2-Ri_1}{\phi(i_1)-(r+R)i_1-Ri_2}.\tag{5.66}$$

平衡状态决定于方程:

$$\psi(i_1)-(r+R)i_1-Ri_2=0, \tag{5.67a}$$

$$\psi(i_2)-(r+R)i_2-Ri_1=0, \tag{5.67b}$$

而其特性决定于特征方程

$$\lambda^2+\sigma\lambda+\Delta=0$$

的根,对于平衡状态(I_1, I_2),特征方程的系数很容易算出,等于:

$$\left.\begin{aligned}\sigma&=\frac{1}{L}[2(r+R)-\psi'(I_1)-\psi'(I_2)],\\ \Delta&=\frac{1}{L}\{[\psi'(I_1)-(r+R)][\psi'(I_2)-(r+R)]-R^2\}.\end{aligned}\right\} \tag{5.68}$$

注意特征方程的判别式

$$\frac{\sigma^2}{4}-\Delta=\frac{[\psi'(I_1)-\psi'(I_2)]^2}{4L^2}+\frac{R^2}{L^2}>0,$$

亦即,该系统的平衡状态只可能是结点或鞍点.

首先,对于任意的系统参数,它的平衡状态是相平面的坐标原点$i_1=i_2=0$,这对应于两个发电机的未激励状态.这时,

$$\sigma L=2(r+R-\rho)\ 及\ \Delta L^2=(\rho-r)[\rho-(r+2R)].$$

因此,这个平衡状态当$r>\rho$时是稳定的结点$(\sigma>0, \Delta>0)$,而当$r<\rho<r+2R$时是鞍点,当$r+2R<\rho$时是不稳定的结点$(\sigma<0, \Delta>0)$.

为了求出在分角线$i_1=i_2$上的平衡状态(为简短起见,我们称这些平衡状态为A类点),假定方程(5.67a)与(5.67b)中$i_1=i_2=a$;便得到这些点的坐标:

$$\psi(a)-(r+2R)a=0. \tag{5.69}$$

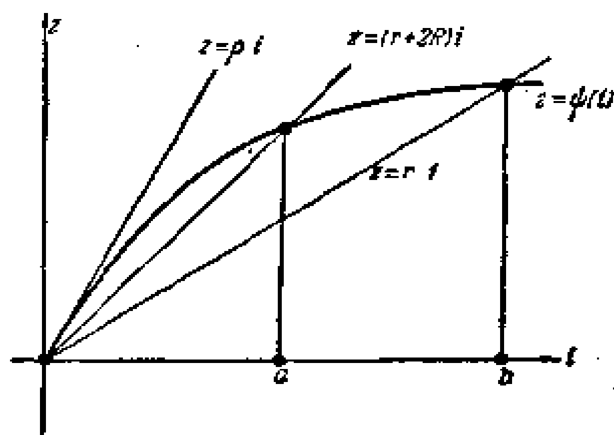


图 265

这正是需要的平衡状态,因为在它们对应的状况下,两个发电机正常地运行,对电阻R给出最大的功率.从图265所示的方程(5.68)

的图示解来看，十分明显，这种平衡状态仅当 $r+2R<\rho$ 时存在，并且只有两个：$A(a, a)$ 及 $A_1(-a, -a)$，其中 $a>0$，对于 A 类点：$\sigma L=2[r+R-\psi'(a)]$ 及 $\Delta L^2=[\psi'(a)-r][\psi'(a)-(r+2R)]$。因为 $\psi'(a)<r+2R$，所以这些有用的平衡状态仅当 $r>\psi'(a)$ 时是稳定的(稳定的结点)，及当 $r<\psi'(a)$ 时是不稳定的(鞍点)。

如果 $r<\rho$，则在另一分角线 $i_2=-i_1$ 上，存在两个平衡状态：$B(b, -b)$ 及 $B_1(-b, b)$。这些"有害的"平衡状态(一个电机对另一个工作，而通过电阻 R 的电流 $I=i_1+i_2=0$)，我们记为 B 类点。$b(b>0)$ 的坐标显然决定于方程

$$\psi(b)-rb=0, \tag{5.70}$$

亦即，曲线 $z=\psi(i)$ 与直线 $z=ri$ 的交点(图 265)。对于 B 类点：

$$\sigma L=2[r+R-\psi'(b)]>0,$$

$$\Delta L^2=[\psi'(b)-r][\psi'(b)-(r+2R)]>0,$$

因为 $\psi'(b)<r$。因而，如果 B 类点存在，则总是稳定的结点。

现在，我们来看在这一系统中会发生怎样的运行状态。为此，我们设发电机的特性是不变的，并把电阻 r 与 R 取作系统的参数，作出"相图的连环画"。首先，由方程(5.65)，在半径充分大的圆 $i_1^2+i_2^2=$ 常数的点上，有

$$\frac{1}{2}L\frac{d}{dt}(i_1^2+i_2^2)$$

$$=-R(i_1+i_2)^2-r(i_1^2+i_2^2)+i_1\psi(i_2)+i_2\psi(i_1)<0,$$

因此，每个这样的圆都是无切环，同时，所有的相轨线都从无限远进入无切环之内(亦即，无限远是绝对不稳定的)。由此可知，所有平衡状态的庞卡莱示性数之和等于 $+1$。

再者，由于电路的对称性及 $\psi(i)$ 是奇函数的缘故，两条分角线 $i_2=i_1$ 及 $i_2=-i_1$ 是方程(5.66)的积分直线，且整个相图对称于这两条直线，特别是，平衡状态是对称于这两条直线分布的[1]。因此，以后我们可以在相平面上只研究这两条积分直线之间的那

1) 作为相图对直线 $i_2=i_1$ 及 $i_2=-i_1$ 的对称性的推论，所有上述平衡状态还有一个公共的性质，就是：方程(5.66)所有的积分曲线都以角系数 $\kappa_{1,2}=\pm1$ 的方向通过平衡状态的。

个象限内的相轨线的形状(我们将在包含 Oi_1 正半轴的象限 K_1 内，研究相轨线的形状)。

我们已指出过，平衡状态是曲线 (5.67a) 与 (5.67b) 的交点[1]，此二曲线的方程可以写为显示式:

$$i_2 = \varphi(i_1), \tag{5.67a}$$

$$i_1 = \varphi(i_2), \tag{5.67b}$$

其中

$$\varphi(i) = \frac{\psi(i) - (r + R)i}{R}. \tag{5.71}$$

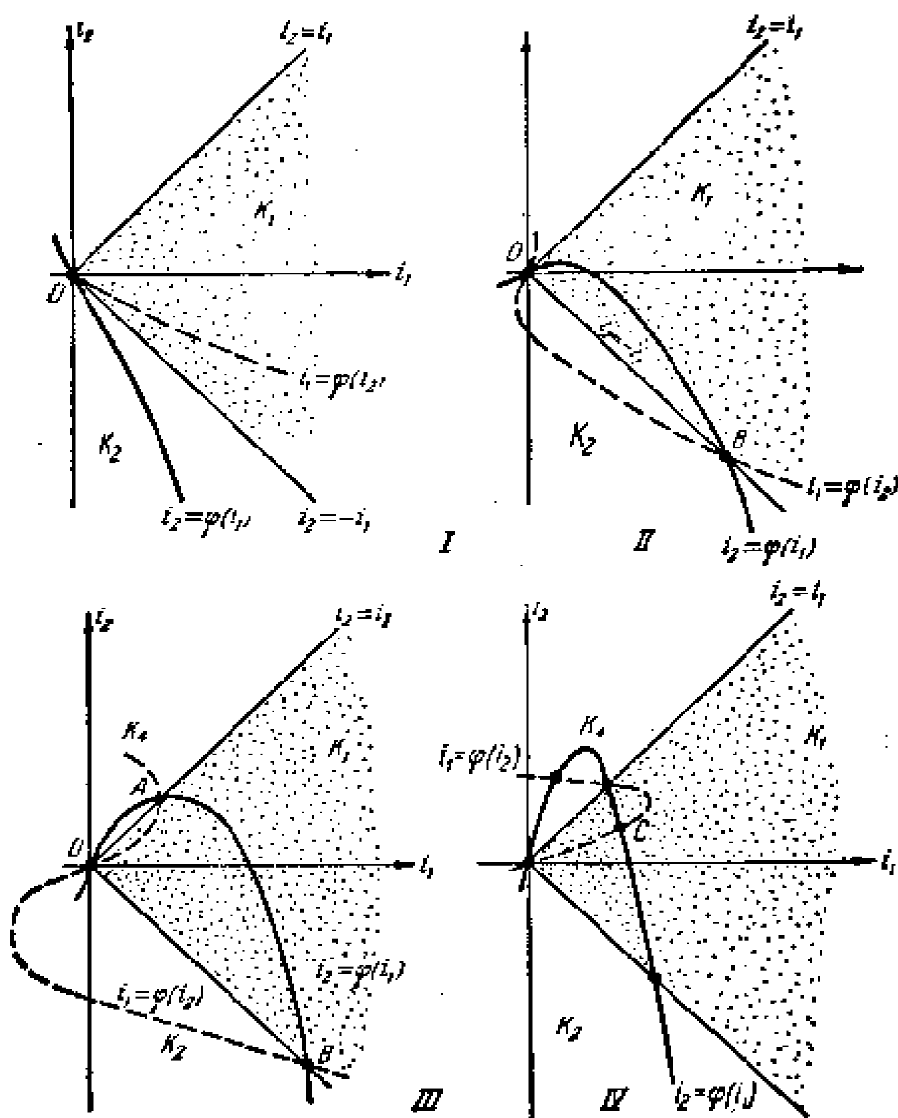


图 266

1) 应指出，这些曲线是相平面上的等倾线；第一条是铅垂的等倾线，而第二条是水平的等倾线。

这些曲线当然是对称于积分直线 $i_2=i_1$ 及 $i_2=-i_1$ 的. 因此,要找出象限 K_1(包括其边界)中的平衡状态,只需对 $i_1\geqslant 0$ 作曲线(5.67a),再相对直线 $i_2=i_1$ 及 $i_2=-i_1$,作其镜象,便得到曲线(5.67b)(后者只需在象限 K_1 的范围内作出). 这样,对不同的参数 r 与 R 的值所作的曲线(5.67a)及(5.67b),如图 266 所示(实线是 $i_1\geqslant 0$ 时的曲线(5.67a),而虚线是它对直线 $i_2=i_1$ 及 $i_2=-i_1$ 所作的镜象——象限 K_1 里的曲线(5.67b).

I. $r>\rho$. 这时(图 266, I), $\varphi'(0)=[\rho-(r+R)]/R<-1$, 曲线(5.67a)在 $i_1>0$ 时完全在象限 K_2 内,而其对直线 $i_2=-i_1$ 的镜象——曲线(5.67b)在 K_1 内. 这两条曲线除在坐标原点外,在任何地方都不相交,因而在相平面上(图 267 I)有唯一的平衡状态——稳定结点 O. 因为没有其他的平衡状态,也没有闭相轨线[1],所以所有的相轨线都渐近地趋于结点 O——在任意的初始条件下,系统中都要建立起两个电机都没有激励的状态[2].

II. $r<\rho<r+2R$. 现在 $-1<\varphi'(0)<+1$,而在坐标原点附近的曲线(5.67a)在象限 K_1 内,以后在某个 $i_1=b$ 处进入象限 K_2(图 266 II). 相应地,曲线(5.67b)只当 $i_1\geqslant b$ 时才在象限 K_1 内,它和曲线(5.67a)只在坐标原点 O 及点 $B(b,-b)$ 相交. 因此,相平面上(图 267 II)有三个平衡状态:鞍点 O 及两个稳定的结点 $B(b,-b)$ 与 $B_1(-b,b)$; 在任意的初始条件下,系统中会建立两个电机互为负荷的状况(一个是发电机,另一个成为电动机),而在外电路中的电流等于零.

III. $r+2R<\rho$, $r<\psi'(a)$. 因为 $r+2R<\rho$, 则 $\varphi'(0)>+1$, 而曲线(5.67a)起初(当 i_1 小时)在象限 K_4 中,然后当 $i_1=a$ 时进入 K_1, 最后,当 $i_1=b$ 时进入 K_2(图 266 III). 相应地,曲线

1) 如果相平面上有闭相轨线,那末由庞卡莱示性数定理,它必定环绕结点 O. 这是不可能的,因为走向无限远的积分直线 $i_2=i_1$ 及 $i_2=-i_1$ 要通过它. 同理,当系统参数有其他值时,闭相轨线也不存在(我们将看到,每个结点都有积分直线 $i_2=i_1$ 或 $i_2=-i_1$ 通过;因而闭相轨线如果存在,就不能环绕结点,且庞卡莱示性数不能等于 $+1$).

2) 方程(5.66)所有的积分曲线,除直线 $i_2=i_1$ 外,都通过结点 O 与直线 $i_2=-i_1$ 相切. 这点不难利用第 270 页上注 2) 中的方法来证实.

(5.67b) 仅当 $0 \leqslant i_2 \leqslant a$ 与 $i_2 \leqslant -b$ 时才在 K_1 中. 我们设函数 $\psi(i)$ 是这样的,两条曲线不在象限 K_1 中相交(就是图 266, *III* 所示的情况),这完全是可能的,因为 $\varphi'(a) = [\psi'(a) - (r + R)]/R > -1$. 这时,在相平面上有五个平衡状态: 不稳定的结点 O, 两个鞍点 A 与 A_1 及两个稳定的结点 B 与 B_1(图 267, *III*)[1]. 有功率输出到外电路中去的电机运行状态, 及两个电机都没有激励的状态,都是不稳定的,而在任意的初始条件下,系统中又建立起电机互为负荷的运行状态.

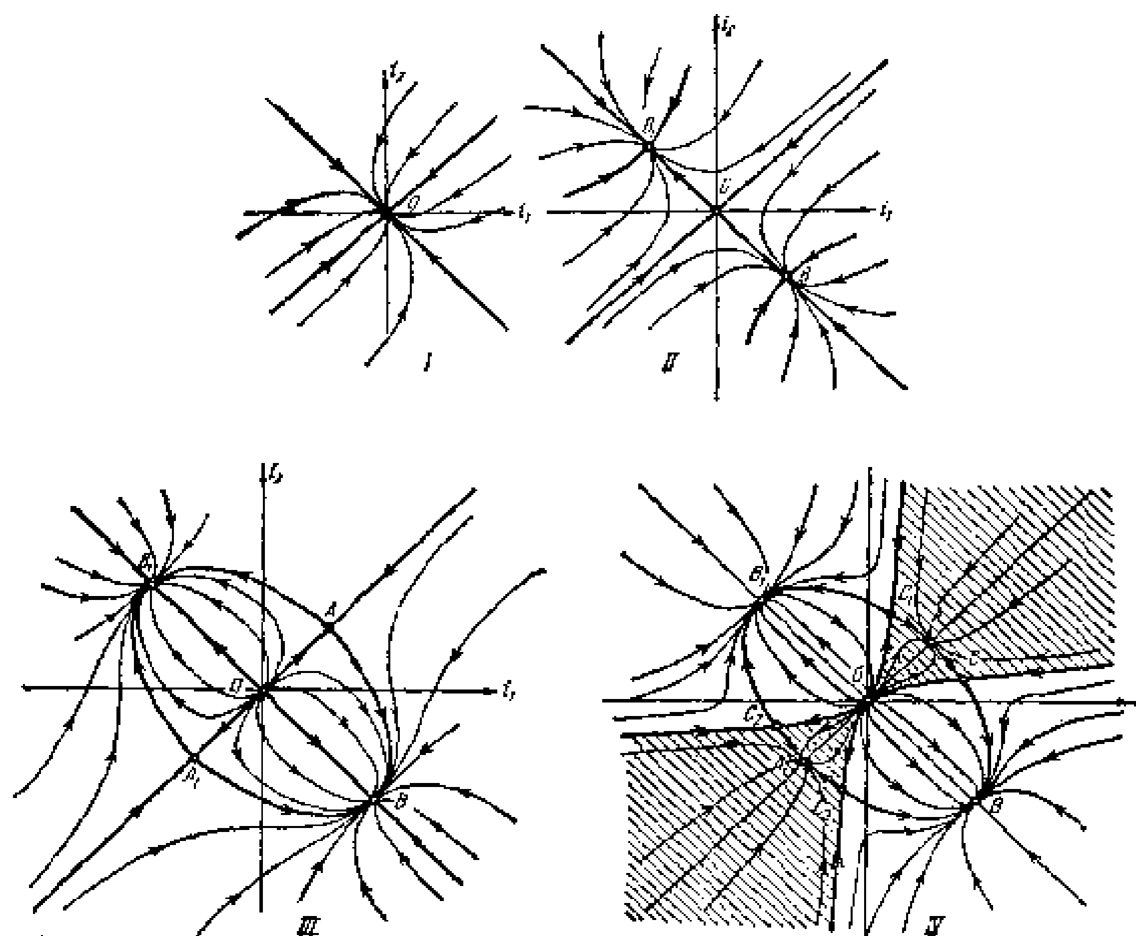


图 267

1) 上面对函数 $\psi(i)$ 的形状所作的假设,对于证明曲线 (5.67a) 与 (5.67b)在象限 K_1 之内没有交点是不充分的. 一般说来,当 $r < \psi'(a)$ 时,依赖于函数 $\psi(i)$ 的形状,可能有任意个,但必定有偶数个这样的交点,而在相平面上有 5, 13, 21 等个平衡状态,其中 3, 7, 11, … 个是结点,其余的便是鞍点,因为所有平衡状态的庞卡莱示性数之和等于 $+1$.

注意,现在相平面上有了由相轨线组成的闭回路 (如图 267, *III* 上的回路 ABA_1B_1A),但象以前一样,仍没有闭相轨线.

IV. $r+2R<\rho$, $r>\psi'(a)$. 与上一情况的不同在于，现在 $\varphi'(a)<-1$，而曲线 (5.67a) 与 (5.67b) 在象限 K_1 内至少交于一点. 下面我们只考虑这种情况，交点是唯一的(图 266，IV 上的点 $C(c', c'')$)[1]，而相平面上(图 267，IV) 有九个平衡状态：不稳定结点 O，四个稳定结点 A，A_1，B，B_1 及四个 C 类点：$C(c', c'')$，$C_1(c'', c)$，$C_2(-c', -c'')$，与 $C_3(-c'', -c')$. 根据庞卡莱示性数定理，不难证实这是鞍点. 事实上，我们已知全部平衡状态的庞卡莱示性数之和等于 $+1$；又知道在Ж分直线 $i_2=i_1$ 及 $i_2=-i_1$ 上的五个平衡状态（点 O，A，A_1，B，B_1）是结点，其示性数之和等于 $+5$，因此，四个 C 类点的示性数之和等于 -4，亦即 C 类点必定是鞍点. 电机运行的稳定的定态状态对应于稳定的结点 A，A_1，B，B_1，亦即有功率输出到外电路中去的电机正常运行状况与一个电机对另一个电机工作的状况都是稳定的. 究竟建立那一种状况，要视初始条件而定；如果系统的初始条件，对应于图 267 IV 中的以分界线（鞍点 C 的胡须）为边界的阴影区域内的点，便将建立起功率输出到外电路中去的电机运行状态.

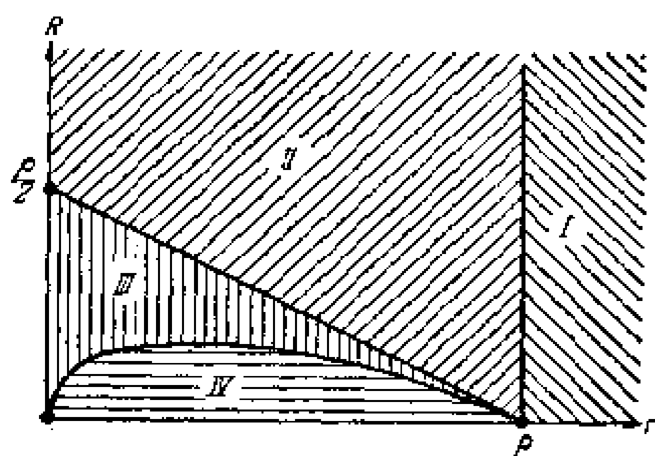


图 268

图 268 表示了分枝曲线，这些曲线把系统参数 r 与 R 的平面（或精确些话，这个平面的第一象限）划分为几个区域，每个区域对应于系统的一定类型的相图（区域的号码与图 267 中分图的号码相同，这些分图表示着系统相图的类型）. 分枝曲线是：1) 把状况 I 与状况 II 分开的直线 $r=\rho$；2) 分开区域 II 与区域 III 的直线 $r+2R=\rho$；3) 曲线 $r=\psi'(a)$，其中 a 由方程(5.69)确定，是区域 IV 的边界，在区域 IV 中

1) 一般地说，当 $r>\psi'(a)$ 时，依赖于函数 $\psi(i)$ 的形状，曲线 (5.67a) 与 (5.67b) 可能有任意奇数个交点，而相平面上有 9, 17, 25, ⋯ 个平衡状态.

电机的正常运行状态(有功率输入外电路的)是稳定的. 后一个分枝曲线的方程可以写为参数形式:

$$r = \psi'(a), \quad R = \frac{1}{2}\left[\frac{\psi(a)}{a} - \psi'(a)\right],$$

其中 a 是可由 0 变到 $+\infty$ 的参数. 不难看出,这一曲线通过点 $r = \rho$, $R = 0$ (当 $a = 0$) 及 $r = R = 0$ (当 $a \to +\infty$), 并在直线 $r + 2R = \rho$ 的下面.

总之,我们看出,有公共负荷的并联运行的串激发电机,如图 263 的电路所示,不能作为正确的接线方式,因为它允许电机互为负荷的稳定运行, 而有功率输到外电路的电机运行状态, 只在参数的有限区域中(在图 268 的区域 IV 中) 是稳定的,而在这个区域中电机互为负荷的运行也存在且是稳定的. 把电机的激磁绕组交叉联接, 就可以消除这些缺点,这时,一个电机的激磁绕组是跟另一个的电枢串联的 (图 269). 在这个情况中,很容易证实(我们把证明留给读者), 电机互为负荷的定态状态根本不存在, 而有功率输入到外电路的电机运行状态,当 $r + 2R < \rho$ 时存在,并且是稳定的.

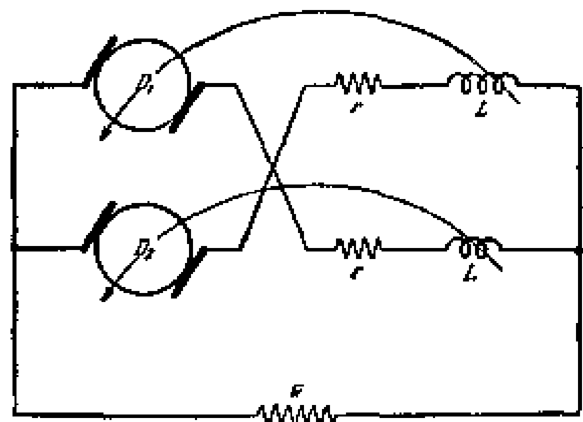


图 269

3. 有平方项的振子[20] 研究弹性力与阻力之表达式中都有平方项的方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -ax + \alpha x^2 - b\frac{dx}{dt} + \beta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

所描述的振子. 这个方程可写为下列两个一阶方程的形式[1]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= -ax - by + \alpha x^2 + \beta y^2 = Q(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{5.72}$$

1) 不失一般性,可假定质量 $m = 1$.

我们证明,这种振子对于参数的任何值(但 $b \neq 0$),都不会是自振系统. 为此目的,采用杜拉克判据,取函数 $B(x, y) = be^{-2\beta x}$ 为因子 $B(x, y)$, 不难看出,因为当 $b \neq 0$ 时,

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = -b^2e^{-2\beta x} < 0,$$

所以,根据杜拉克判据,系统 (5.72) 不仅没有闭相轨线,也没有由不同相轨线组成的闭回路,因而不可能是自振系统.

4. 非自振系统的又一例[26] 我们证明,在许多非线性振动理论的问题中[1),常遇见的方程组

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x(ax + by + c) = P(x, y), \\ \dot{y} &= y(a'x + b'y + c') = Q(x, y), \end{aligned}\right\} \qquad (5.73)$$

也没有极限环. 这个系统有两条积分直线,即坐标轴 $x=0$, $y=0$, 这上面有三个平衡状态: $(0, 0)$, $(0, -c'/b')$, 及 $(-c/a, 0)$. 此外,如果 $\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, 还有一个不在坐标轴上的平衡状态 (x_0, y_0), 其坐标决定于方程组:

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0.$$

所以,如果系统 (5.73) 有闭相轨线的话,它必定在包含点 (x_0, y_0) 的那一个象限内,不与上述任何一条积分直线相交,并环绕平衡状态 (x_0, y_0)[2). 但这是不可能的,利用杜拉克判据不难证实这一点. 取函数 $B(x, y) = x^{k-1}y^{h-1}$ 作为因子 B, 其中 k 与 h 是某些(待定的)常数. 这时

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) \\ &\qquad = x^{k-1}y^{h-1}\{(a+ka+ha')x+(kb+hb'+b')y+kc+hc'\}. \end{aligned}$$

---

1) 特别地,许多关于两个自由度的自振系统的问题,利用范德波方法,都能化为这样的系统[112,176,177].

2) 十分明显,当 $\delta = 0$ 时,平衡状态 (x_0, y_0) 不存在*,因而也没有闭相轨线.

* 当 $\delta = 0$ 时,如果 $ax + by + c = 0$ 与 $a'x + b'y + c' = 0$ 相容,则存在一平衡状态直线——奇线,但这时也不可能有闭相轨线——译者注.

取方程组

$$ka + ha' + a = 0, \quad kb + hb' + b' = 0$$

的解为常数 k 与 h，亦即

$$k = \frac{b'(a' - a)}{\delta} \text{ 与 } h = \frac{a(b - b')}{\delta},$$

则相平面的每一个象限内，都有

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ) = B(x, y)\frac{b'c(a'-a)+ac'(b-b')}{\delta} \neq 0,$$

只要

$$\sigma = b'c(a' - a) + ac'(b - b') \neq 0.$$

因而，根据杜拉克判据，当 $\sigma \neq 0$ 时，系统 (5.73) 便没有闭相轨线，当然也没有极限环[1].

§10. 对相平面远处的相轨线性状的研究

在研究具体问题的轨线的定性图象时，研究相平面充分远处的相轨线的性状，有非常重要的意义[2]. 有时，这个问题非常简单. 将方程组 (5.1) 的第一个乘 x，第二个乘 y，再相加，得：

$$\frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt} = P(x, y)x + Q(x, y)y = R(x, y).$$

不难看出，如果从 x 与 y 的某些值开始，随便我们给 x 与 y 什么值(绝对值充分地大)，$R(x, y)$ 都保持一定的符号，那末马上可以得到答案. 那就是，我们立刻可以说，所有以坐标原点为中心的充分大的圆，都是无切环，而且 $R(x, y)$ 的符号 (对于充分大的 x

---

1) 若 $\sigma=0$，则方程 (5.73) 的系统是保守的 (除 $\sigma=0$ 外，还应假设 $ax+by+c=0$ 与 $a'x + b'y + c' = 0$ 不相容，以下才成立；否则 $ax + by + c = 0$ 上的点全是平衡点——译者注)，它具有积分

$$x^k y^h(ac'x + b'cy + cc') = \text{常数};$$

在坐标轴与直线 $ac'x + b'cy + cc' = 0$ (都是积分直线)之间的整个区域，完全为环绕平衡状态 (x_0, y_0) 的闭相轨线所充满，平衡状态在这一情况下是中心.

2) 注意，这里我们不涉及许多对一般理论有意义的问题，例如，关于不同类型的奇点在庞卡莱球面上的共存问题，关于轨线在投影平面上的表示的问题，等等.

与 y）可以确定无限远是稳定的或是不稳定的．但是，一般说来，这种初等方法不解决问题（$R(x, y)$ 不保持定号），因而问题需要进行专门的研究．

这样，就产生相轨线在相平面远处有什么样的走向的问题．看来，用变量代换把相平面的无限远部分移到有限区域中来，就可以简单地使问题得到解决．例如，可以用本狄克生交换

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},\quad y=\frac{v}{u^2+v^2};\quad u=\frac{x}{x^2+y^2},\quad v=\frac{y}{x^2+y^2} \tag{5.74}$$

来实现这种想法．这种变换把平面 x, y 的无限远点变为平面 u, v 的坐标原点．几何上称这种变换为倒径变换（图 270）．

图 270

这时，使轨线保持正确的运动方向是不困难的——只要不对方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x, y)}{P(x, y)},$$

而是对方程组

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y)$$

进行变换就可以了．不过，尽管看上去简单，但通常本狄克生变换把平面 u, v 的坐标原点变成了高次复杂奇点，因为在平面 x, y 上每一走向无限远的（或由无限远走来的）积分曲线都变成平面 u, v 上的走向（或走出）坐标原点的积分曲线．研究高次复杂奇点通常都很复杂，所以本狄克生方法只有在很少的情况中才适用[1]．

因此，用概念上比较复杂，但计算较简单的庞卡莱变换[182]来代替本狄克生变换更方便得多．庞卡莱变换的几何基础在于把平面 x, y 映射到与它在坐标原点相切的单位球面上去（图 271）．这样，平面 x, y 上的点 N 便只与球面上的一个点 N_1 相对应，点 N_1 在通

1）应注意，一般说来，本狄克生变换也好，计算较简单的庞卡莱变换也好，都只在 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 是 x, y 的多项式的情况中，才便于应用．

过球心的半直线 O_1N 上，亦即在下(南)半球上．平面的无限远点映射在赤道(平行于平面 x, y 的大圆)上．根据变换的定义，十分明显，平面 x, y 上的直线变为球面上的大圆，同时，通过坐标原点的直线变为垂直于赤道的大圆．例如，直线 PR 就映射为球面上通过点 P_1, R_1 的大圆．平面上的积分曲线变为球面上对应的积分曲线，同时，鞍点、结点与焦点保持原来的类型不变．但是，在球面的赤道上出现了新的奇点．例如，所有当离原点无限远时有 $y\to 0$ 的积分曲线(更精确些说，积分曲线的映射)，都通过点 C(及点 D)，而对应于 $y\to\pm\infty$ 的却通过点 A(及 B)．这样，赤道上的奇点可能不是 $P(x, y)=0$ 与 $Q(x, y)=0$ 的交点，它们决定于积分曲线在无限远处的性状(也决定着自身的性状)．由此可见，这个表示法对确定曲线在无限远的走向是方便的．

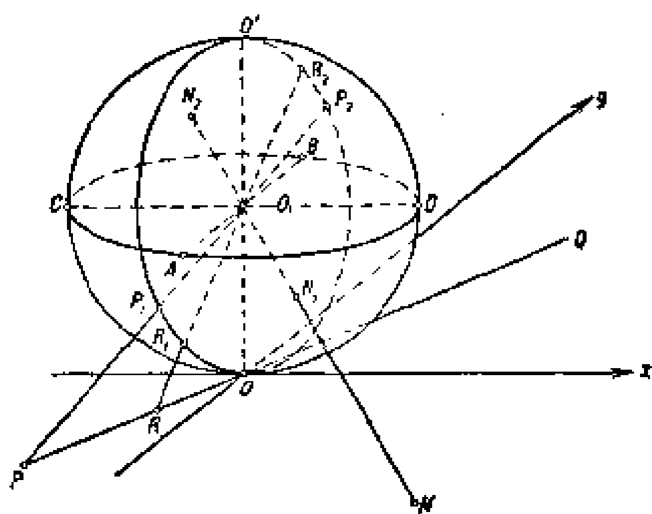


图 271

剩下还要说明关于把平面上的点映射到球面上的点的解析工具的问题．用球面坐标(经度与纬度)并不方便，因为变换式不够简单，也不是代数表达式(因为把简单的方程不必要地复杂化了)．

因此，庞卡莱取了这样的变换式：

$$x=\frac{1}{z},\quad y=\frac{\tau}{z}. \tag{5.75}$$

显然，$\tau=y/x$ 是被研究的点对坐标原点的正切．坐标线 $z=$ 常数与 $\tau=$ 常数是平面上平行于 y 轴的直线和通过坐标原点的直线．它们在球面上是通过直径 AB($z=$ 常数)或 OO'($\tau=$ 常数)的大圆．显然，这些圆并不相互垂直．只有在赤道的邻域中，除了接近点 A 与 B 的两小块以外，才可以认为它们是垂直的．可以作出这样的平面，在其上 z 与 τ 将成为笛卡儿直角坐标：这一平面

是在赤道上通过所研究的点的切平面．τ 轴在赤道平面内，指向 y 轴正向一边．z 轴铅直向下．把球面上的点从球心 O_1 投影过来，便得到平面 τ, z 上的点．显然，除了表示球面上的点 A 与 B 的 y 轴的"末端"及其邻域以外，在这平面 τ, z 上来研究平面 x, y 的无限远点是很方便的．如果要研究 A, B 点及其邻域中的点，可取另一变换：

$$y = \frac{1}{z}, \quad x = \frac{\tau}{z}. \tag{5.76}$$

所有的图象都是相似的．因而把两种变换结合起来，就能够了解积分曲线在赤道附近的性状．最后，从点 O_1 观看下（南）半球时，就可以得到关于积分曲线走向的十分清楚的概念．然后用正投影法把下半球投影到下（南）极点的切平面上，可以把全部积分曲线的走向清楚地映射在圆内．现在把原来的方程

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

变换为庞卡莱坐标 $x = 1/z$, $y = \tau/z$．得：

$$dx = -\frac{dz}{z^2}, \quad dy = \frac{z d\tau - \tau dz}{z^2},$$

及

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right) z^2, \\ \frac{d\tau}{dt} &= -P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right) \tau z + Q\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right) z, \end{aligned}\right\} \tag{5.77}$$

或把二式相除，消去时间，最后得：

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{-z}{\dfrac{Q\left(\dfrac{1}{z}, \dfrac{\tau}{z}\right)}{P\left(\dfrac{1}{z}, \dfrac{\tau}{z}\right)} - \tau}. \tag{5.78}$$

要研究轴 y "末端"附近的无限远点，必需象我们说过的那样，采用变换 (5.76)．这时，方程 (5.77) 与 (5.78) 具有下列的形式：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= -Q\left(\frac{\tau}{z}, \frac{1}{z}\right) z^2, \\
\frac{d\tau}{dt} &= -Q\left(\frac{\tau}{z}, \frac{1}{z}\right) \tau z + P\left(\frac{\tau}{z}, \frac{1}{z}\right) z, \\
\frac{dz}{d\tau} &= \frac{-z}{\dfrac{P\left(\frac{\tau}{z}, \frac{1}{z}\right)}{Q\left(\frac{\tau}{z}, \frac{1}{z}\right)} - \tau}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.79}
$$

从(5.78)可见，如果没有恒等式 $Q(1/z, \tau/z) \equiv \tau P(1/z, \tau/z)$，则由方程 $z=0$ 决定的赤道是积分曲线. 特别是，如果有 $Q=\tau P$，$\tau=$ 常数就是解。因而，所有的积分曲线都与赤道正交。赤道上的奇点决定于关系式

$$
z=0, \quad \frac{Q\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)}{P\left(\frac{1}{z}, \frac{\tau}{z}\right)} = \tau.
$$

在轴 y “末端”上的奇点，应该用方程(5.79)来研究. 如果同时满足条件

$$
z=0, \quad \frac{P\left(0, \frac{1}{z}\right)}{Q\left(0, \frac{1}{z}\right)} = 0, \tag{5.80}
$$

则存在这种奇点 $(z=0, \tau=0)$.

这样求出的无限远奇点，其特性和稳定性可用普通的方法进行研究.

研究简单的有摩擦线性振子作为例子. 振子的方程是:

$$
\frac{dy}{dt} = -hy - \omega_0 x^2 = Q(x, y); \quad \frac{dx}{dt} = y = P(x, y).
$$

经过庞卡莱变换(5.75)后，得:

$$
\frac{dz}{dt} = \tau z, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\tau^2 - h\tau - \omega_0^2, \tag{5.81}
$$

而无限远的奇点决定于关系式:

$$z=0,\quad \tau^2+h\tau+\omega_0^2=0.$$

由此,

$$\tau=-\frac{h}{2}\pm\sqrt{\frac{h^2}{4}-\omega_0^2}. \tag{5.82}$$

不难证实,在 y 轴"末端"上,奇点是不存在的. 因为

$$\frac{\frac{1}{z}}{-\frac{h}{z}}=-\frac{1}{h}\neq 0.$$

因为赤道是积分曲线,故可能有两种情况:或者赤道是极限环($h^2/4<\omega_0^2$,没有无限远奇点),显然,当 $h<0$ 时这个极限环是稳定的,而当 $h>0$ 时是不稳定的;或者赤道上有四个奇点,成对地位于二直径的两端,这两个直径的角系数由下列表达式给出:

$$\tau_1=-\frac{h}{2}+\sqrt{\frac{h^2}{4}-\omega_0^2}<0;$$

$$\tau_2=-\frac{h}{2}-\sqrt{\frac{h^2}{4}-\omega_0^2}<0.$$

如果

$$\frac{h^2}{4}>\omega_0^2,$$

就会发生这种情况. 为了确定奇点的稳定性,令

$$z=\xi,\quad \tau=\tau_i+\eta,$$

代入方程(5.81),得:

$$\frac{d\xi}{dt}=-(\tau_i+\eta)\xi;\quad \frac{d\eta}{dt}=-(\tau_i+\eta)^2-h(\tau_i+\eta)-\omega_0^2, \tag{5.83}$$

或忽略高阶项:

$$\frac{d\xi}{dt}=-\tau_i\xi;\quad \frac{d\eta}{dt}=-2\tau_i\eta-h\eta.$$

特征指数 λ 决定于方程:

$$\begin{vmatrix}-\tau_i-\lambda & 0\\ 0 & -2\tau_i-h-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

由此，

$$\lambda_1 = -\tau_i, \quad \lambda_2 = -2\tau_i - h.$$

总之，λ_1 总是正的，亦即，无限远的奇点全是不稳定的．因为 τ_1 的 λ_2 等于 $-2\sqrt{(h^2/4)-\omega_0^2}$，所以点 τ_1 是鞍点；又因 τ_2 的 λ_2 等于 $+2\sqrt{(h^2/4)-\omega_0^2}$，所以 τ_2 是不稳定的结点．图 272 上表示了在 $h^2/4<\omega_0^2$ 情况下，积分曲线在无限远的性状．图 273 表示了在 $h^2/4>\omega_0^2$ 的情况下，球面在与球切于南极的平面上的正投影（与上一情况投影方法相同）．

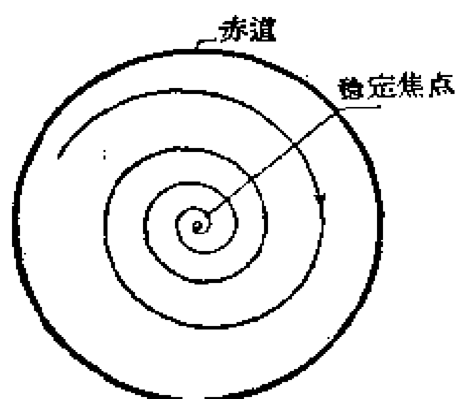


图 272

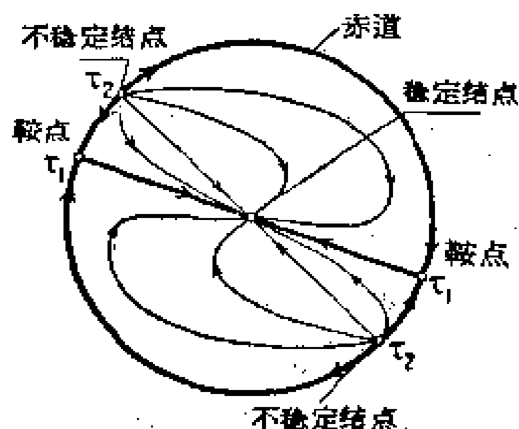


图 273

对无限远的研究，有时同样地能够回答关于在所研究的系统中，是否存在极限环的问题．实际上，假定我们知道了无限远是绝对不稳定的．这时，如果在有限距离以内的唯一的奇点是不稳定的结点或焦点，则由于相轨线不能相交，必定至少有一个稳定的极限环（这一断言的证明，对于单自由度动力学系统的定性研究非常重要，我们将在下一章中予以证明）．

对于有栅路振荡回路的简单自振系统，我们来证明极限环的存在，以说明这个方法对于具体的物理系统的应用（详见下册第七章）．

对振荡回路中电容器上的电压，列出的克希霍夫方程，如在第一章 § 6 中所见（见方程（1.64）的，是

$$CL\frac{d^2u}{dt^2}+[RC-MS(u)]\frac{du}{dt}+u=0,$$

其中 $S = S(u)$ 是电子管特性的互导(以下我们假设当 $u \to \infty$ 时，$S \to 0$). 这个二阶方程可以化为两个一阶方程:

$$\frac{du}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{u}{LC} - \frac{1}{LC}[RC - MS(u)]y. \quad (5.84)$$

象对 (5.75) 所作的那样，设 $u = 1/z$, $y = \tau/z$, 得:

$$\frac{dz}{dt} = -\tau z, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\tau^2 - \frac{1}{LC}\left[RC - MS\left(\frac{1}{z}\right)\right]\tau - \frac{1}{LC}. \quad (5.85)$$

这个系统当 $h = R/L$ 与 $\omega_0^2 = 1/LC$ 时，与系统 (5.81) 有同样的平衡状态(以及同样的特性)(因为我们假设了 $u \to \infty$ 或 $\tau \to 0$ 时，$S \to 0$). 因此，原方程的相轨线在无限远的性状，必然和频率为 $1/\sqrt{LC}$，阻尼为 R/L 的振子的性状相同，这是我们刚才研究过的情况，我们已知无限远在这个情况中是不稳定的. 因此，如果在有限距离的唯一的奇点不稳定，那末电子管振荡器方程必定至少有一个稳定的极限环. 把庞卡莱球面向切于南极的平面作正投影所得的精确到偶数个*环的(半稳定的环当两个算)情况，如图 274 与图 275 所示.

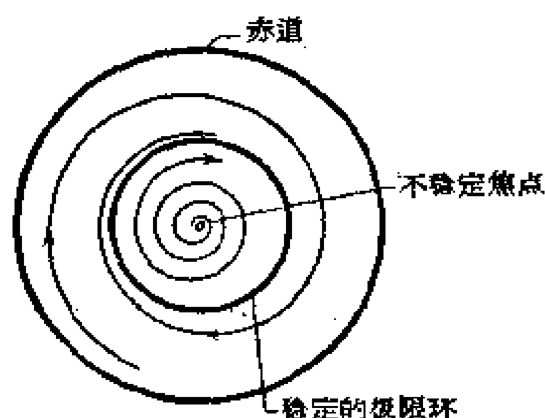


图 274

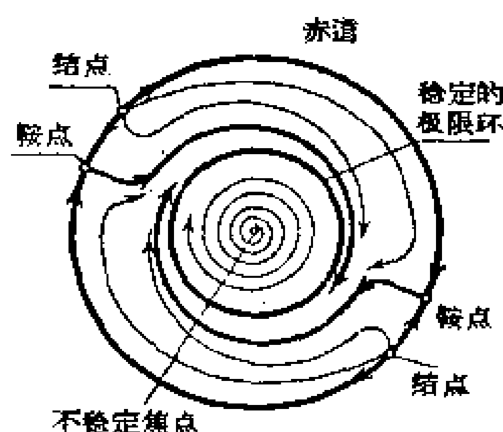


图 275

总之，研究了积分曲线在平面的无限远的性状后，我们证明了：电子管振荡器的方程至少有一个极限环. 首先，我们给自己提出这样的问题: 这个证明有什么意义? 什么情况下需要证明?

* "精确到偶数个"的含义是"可以差以偶数个"，即图 274, 275 的圆内虽仅画一个环，但这也表示可能有 3, 5, … 个环的情况——译者注.

在我们研究的条件下，电子管振荡器中会发生振荡是大家知道的，为什么还要证明呢？ 其实，我们完全不是为了证明在真实的电子管振荡器中会产生振荡．我们只证明了，在相应的理想化的振荡器的数学模型中，允许有稳定的周期过程．如果出现这样情况，在我们的方程中没有极限环，那末就意味着，我们没有把某种会使真实系统产生连续自振的重要因素考虑进去，因而我们的理想化也是无效的．所有的严格的研究，尤其是严格地解决极限环的存在问题，正是在于，根据研究的结果和实验资料是否相符，就能判断我们原来的理想化是否适用，是否遗漏了对于所要研究的问题来说很重要的东西．不严格地研究时，我们就无从知道理论与试验间不相符合的真正原因是什么：是原来的理想化不正确，还是由于研究中的不严格而引起的．尽管我们的研究在数学上无可非议，但是在物理上的价值总不太大．实际上，仅当系统中的电流与电压不太大时，我们的方程才有实际意义，亦即才能充分精确地描写真实系统的性状．例如，因为当我们取充分大的值时会发生饱和现象，那末就不能把这个断言向外推广到任意大的值，因为电压很大时，就会出现（例如）很大的栅流，而我们已将它忽略掉了，另外还有许多情况也没有考虑．因此，如果我们严格地证明了极限环的存在，那末为了说明这一断言的物理价值，还需要，即便是近似地确定极限环在相平面上的位置，以便确信它位于我们的理想化成立的区域之内．

§11．极限环位置的估计[1]

我们在下册第六章中将看到，为了对由方程

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y) \tag{5.1}$$

所描述的单自由度动力学系统进行定性研究，亦即，阐明其运动的

1) H. A. 热列佐夫所写．

可能类型，不需要求出所有的相轨线．为此，只要求出一些基本的相轨线——决定相图定性特性的轨线就够了．那就是，必须知道平衡状态（奇点）与极限环的数目、特性及相对位置，以及分界线（鞍点的胡须）的走向．有了这些基本的、决定轨线的定性图象的知识，便足以把动力学系统（5.1）的定性研究进行到底．

关于平衡状态的存在与其特性的问题，可用本章 § 2 与 § 4 中阐述的比较简单的方法来解决．但是，到现在为止，关于极限环的存在和数目的确定以及在相平面上的位置（即便是近似的）的寻求问题，还没一般的解法．接近保守系统的系统（特别是接近谐振子的系统）、有分段线性方程的系统、以及不连续振动系统除外，对于这些系统，所有的问题都能通过定量研究来解决（见下册第八，九与十章）．因此，对于每一种问题，必需用特殊的方法，而在极端情况下，还得进行数值积分或用等倾线法作图解积分．后两种方法自然是能够达到目的的．但此时必须给定了参数的具体数值才行，这便是它们的缺点．同时，运动特性对系统参数的依赖关系有着特殊的意义，而系统的参数也可能有几个．

研究极限环（证明存在及确定其位置）最常用的方法之一，就是在相平面上作出这样的无切环，使得相点的速度向量在这些无切环上，全都朝向环所包围的区域之内或全都朝外．

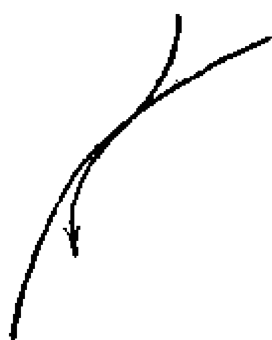


图 276

如果相点的速度向量，除几个相切的点外，在某一闭曲线上均指向曲线的一边，显然，相轨线在这些点上与该曲线相交时有偶重接触（与邻近的轨线有相同的方向），（图 276）．从我们的观点来看，这种曲线本质上与无切环没有什么区别，因此，我们把这种有几个有偶重接触的闭曲线，也归入无切环的一类．

如果在这种无切环内，没有稳定的奇点，并且环上的速度向量处处指向内部，那末我们可以说，在这个无切环内至少有一个稳定的极限环．完全相同地，如果无限远是不稳定的，并且存在无切环，环上的速度向量处处指向外部，环外又没有稳定的奇点，那末

在无切环的外部至少存在一个稳定的极限环. 研究不稳定的极限环时,可以作类似的讨论,只不过这时速度向量有相反的方向[1].

如果能够用两个无切环从相平面上分出一个环形(双连通的)区域,其中不包含平衡状态,那末就能对其中是否存在极限环的问题作出一定的结论. 就是说,如果相点的速度向量在这两个无切环上,方向指向它们所包围的环域的内部,更精确些说,方向没有朝外的,那末在这个环域内,至少存在一个稳定的极限环(一般*存在奇数个极限环,其中稳定的比不稳定的多一个). 如果速度向量在两个无切环上,方向处处朝外(或精确些说,没有朝内的方向),那末在这个环域中,至少存在一个不稳定的极限环(一般情况下,环域内有奇数个极限环,不稳定的比稳定的多一个). 最后,如果相点的速度向量在一个无切环上处处指向环域之外,而在另一个无切环上处处朝内,那末在它们包围的环域里,或者没有,或者有偶数个极限环(其中一半是稳定的)[2].

在这种环域中,当然,极限环的数目是不能由上述讨论来确定的. 在某些情况中,利用对于环域的杜拉克判据[148],能够证明极限环在给定的环域中是唯一的(或者没有): 动力学系统(5.1)在环域(G)中不会有多于一个的闭相轨线(或多于一个的由轨线组成的闭回路),如果在该域内,表达式

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)$$

是定号的,其中$B(x,y)$是区域(G)中的某个函数,连续并有连续的(一阶)导数. 这里讲的是把环域的内边界包围在自己内部的相轨线. 十分明显,在区域(G)中不可能有经过连续变形它就能收缩为一点而不越出区域(G)之边界的闭相轨线. 根据§9中早经证明的杜拉克判据,这种轨线不可能存在.

---

1) 这些断言和以下将要指出的断言,在几何上是十分明显的. 这些断言的严格证明,是以相轨线性状的一般理论为基础的(见下册第六章).

* 即没有半稳定极限环时,以下同——译者注.

2) 这些断言的证明见下册第六章§2(见定理V).

为了证明这一判据，设系统 (5.1) 在环域 (G) 中有两条闭相轨线（或两个由轨线组成的回路）$abca$ 与 $a_1b_1c_1a_1$，都把区域 (G) 的内边界包围在其内（图 277）. 这时，对于闭回路 $abcaa_1c_1b_1a_1a$，有

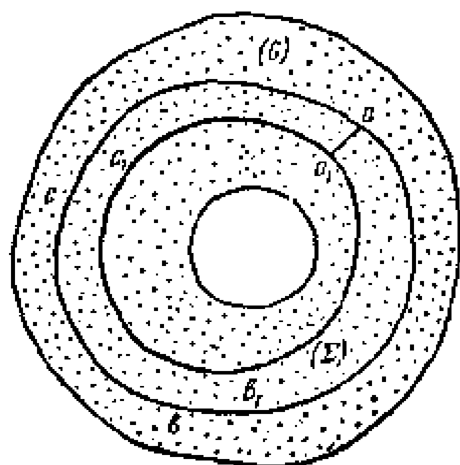


图 277

$$\oint B(Pdy - Qdx) = 0.$$

但根据格林定理

$$\oint B(Pdy - Qdx)$$

$$= \iint\limits_{(\Sigma)} \left[\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y}\right] dxdy,$$

其中的积分是在闭曲线 $abcaa_1c_1b_1a_1a$ 所围的区域 (Σ) 中进行的. 这样，积分

$$\iint\limits_{(\Sigma)} \left[\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ)\right] dxdy$$

必然等于零，但这和被积表达式在区域 (Σ) 中保持常号相矛盾，因为区域 (Σ) 是区域 (G) 的一部分. 因而，在系统 (5.1) 的区域 (G) 中，不可能有多于一条的闭相轨线. 显然，当表达式

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ)$$

在区域 (G) 中，除在一些点或曲线上等于零外，而处处保持常号的情况下，判据仍然有效.

我们已经说过，求无切环的一般的正规的方法是没有的. 在某些问题中，我们可以在给定的简单闭曲线族的曲线中（例如，从以坐标原点为中心的圆中）找出这种无切环来. 令

$$F(x, y) = C \tag{5.86}$$

是充满相平面的简单闭曲线的方程，我们想从中找出动力学系统

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{5.1}$$

的无切环来. 设曲线族 (5.86)（这个曲线族，常常按庞卡莱称之为曲线地形系）的每一曲线对应唯一的 C，并在每个给定 C 的曲

线内，都包含全部有较小的 C 值的曲线（于是，当增加 C 时，曲线 (5.86) 的"尺寸"便增大）．当相点沿某一相轨线运动时，它将和地形系 (5.86) 的曲线相交．在运动时，显然有

$$\frac{dC}{dt}=F'_x(x,y)P(x,y)+F'_y(x,y)Q(x,y)=\Phi(x,y),$$

而无切环就是地形系中函数 $\Phi(x,y)$ 能保持定号的全部曲线．就是说，如果在地形系的某一曲线上，$\Phi(x,y)\leqslant 0$，则这条曲线就是无切环，并且由于我们假定增加 C 时，曲线的"尺寸"增加，所有与这条曲线相交的相轨线都将进入(当 t 增加时)它的内域（图 278）．同样地，如果在方程(5.86)的某一曲线上 $\Phi(x,y)\geqslant 0$，则相轨线穿过这条曲线进入它的外域．并且也很明显，在函数 $\Phi(x,y)$ 保持常号的环域中，极限环(一般地说，还有闭积分曲线*)就不会存在．极限环只在函数 $\Phi(x,y)$ 变号的环域中才能存在．

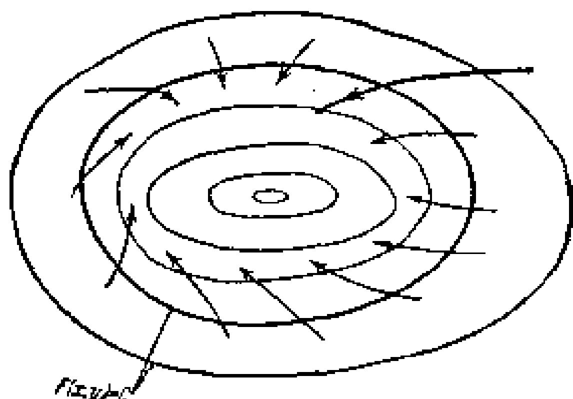


图 278

寻找无切环的另一不同的方法，就是所谓的庞卡莱的接触曲线法[181,108]．在曲线上每一点，系统 (5.1) 的相轨线与所给的地形系 (5.86) 的曲线相切的曲线，庞卡莱称之为接触曲线．其方程显然是

$$\frac{P}{Q}=-\frac{F'_y}{F'_x}$$

或 $PF'_x+QF'_y=0$．如果选择地形系时，使得接触曲线是闭的，那末我们就可以作出与接触曲线相切的，最大和最小的地形系的曲线．这时，在最大曲线之外与最小曲线之内的全部地形系的曲线都是无切环，而且，若极限环存在，它必定位于地形系的这两条曲线所围的环域之中．

---

* 原书为"相轨线"．因为这里指的是由几条轨线组成的闭曲线——译者注．

为了说明上述这些，我们来看两个动力学系统的定性研究的例子．作为第一个例子，研究方程

$$\frac{du}{dt}=y,\ \frac{dy}{dt}=-\frac{u}{LC}-\frac{1}{LC}[RC-MS(u)]y, \quad (5.84)$$

在普通的简化假设下，此方程描述着电子管振荡器中的振荡，又假定电子管的特性曲线的互导 $S(u)$ 是偶函数，并且当 $|u|$ 增加时*单调地减小．取椭圆族 $CL\cdot y^2+u^2=A^2$ 为地形系，这时

$$\frac{1}{2}\frac{d(A^2)}{dt}=[MS(u)-RC]y^2=\Phi(x,y).$$

如果 $MS(0)<RC$（振荡器的自激条件不满足），则在整个相平面上 $\Phi(x,y)\leqslant 0$，因而 $d(A^2)/dt\leqslant 0$，亦即所有的相轨线都趋近于坐标原点——稳定的平衡状态．如果 $MS(0)>RC$，则唯一的平衡状态 (0, 0) 是不稳定的，此外，还存在使 $MS(u)-RC\geqslant 0$ 的线段 $|u|\leqslant u_0^*$．因此，所有 $A\leqslant u_0$ 的椭圆都是无切环，因为在其上有 $\Phi(x,y)\geqslant 0$；相轨线穿过它们，进入椭圆 $LCy^2+u^2=u_0^2$ 的外域．所以，在这些椭圆的内域中没有极限环[1]．因而，在椭圆 $LCy^2+u^2=u_0^2$ 之外至少有一个稳定的极限环，因为外面既没有平衡状态，而无限远我们已看到是不稳定的（由假定，$u\to\infty$ 时 $S(u)\to 0$）．

作为第二个例子，我们对动力学系统

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=ax+by-x(x^2+y^2),\\ \frac{dy}{dt}&=cx+dy-y(x^2+y^2)\end{aligned}\right\} \quad (5.87)$$

进行完全的定性研究[19]．用范德波尔方法解电子管振荡器同步化的问题时，就导出这个方程组．

首先，相图对称于坐标原点，因为变量 x, y 以 $-x$, $-y$ 代换后，方程 (5.87) 不变．并且，把方程 (5.87) 的二式相除所得的积

---

* 原书 u, u_0 均为大写字母——译者注．

1) 不难由本狄克生判据得出，当 $MS(0)>RC$ 时，在椭圆 $LCy^2+u^2=u_0^2$ 之内没有极限环，而当 $MS(0)<RC$ 时，整个相平面上都没有极限环．

分曲线方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{cx+dy-y(x^2+y^2)}{ax+by-x(x^2+y^2)},$$

有积分曲线是直线 $y=k_1x$ 和 $y=k_2x$，其中 k_1，k_2 是二次方程 $bk^2+(a-d)k-c=0$ 的根，亦即

$$k_{1,2}=\frac{d-a\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2b}$$

（当然，方程的判别式 $\delta=(a-d)^2+4bc>0$ 的条件应成立）．由方程 (5.87) 也可看出，无限远是绝对不稳定的，亦即，相点在相平面的无限远处（当 t 增加时）向着坐标原点运动．注意到 x^2+y^2 充分大时，有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2+y^2)=ax^2+(b+c)xy+dy^2-(x^2+y^2)<0,$$

便很容易证实这一点．

系统的平衡状态对应于相平面上的奇点——满足方程

$$ax+by-x(x^2+y^2)=0,\quad cx+dy-y(x^2+y^2)=0$$

的点．这个方程组的根是 $x=0$，$y=0$ 和

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{a+bk_{1,2}}{1+k_{1,2}^2}},\quad y_{1,2}=\pm k_{1,2}\sqrt{\frac{a+bk_{1,2}}{1+k_{1,2}^2}}.$$

这样，在平面 x，y 的有限部分上，依赖于方程 (5.87) 的参数，可能有一个或三个，或五个平衡状态．平衡状态 (0, 0) 总是存在的，其特性确定于特征方程 $\lambda^2+\sigma\lambda+\Delta=0$（应指出，特征方程的判别式就是前面引入的 δ 的表达式）的系数

$$\sigma=-(a+d),\quad \Delta=ad-bc.$$

其他平衡状态如果存在的话，便在直线 $y=k_1x$ 与 $y=k_2x$ 上，因此，只可能是结点或鞍点[1]．

---

1) 对坐标原点以外的奇点，不难看出，其坐标的根式中的分子 $a+bk_{1,2}$ 就是特征方程 $\lambda^2+\sigma\lambda+\Delta=0$ 的根．因此，如果点 (0, 0) 是焦点或稳定的结点，则坐标原点以外便没有奇点；如果点 (0, 0) 是鞍点（方程 $\lambda^2+\sigma\lambda+\Delta=0$ 只有一个正根），则坐标原点以外只有两个奇点；如果点 (0, 0) 是不稳定的结点，则坐标原点之外有四个奇点．

显然，可能有下列情况：

I. $\delta>0,\ \Delta>0,\ \sigma<0$. 这时，相平面（图 279, *I*）上有五个奇点（平衡状态）：(0, 0)——不稳定的结点，坐标原点以外有——两个鞍点和两个稳定的结点. 为了证明上述对坐标原点以外的奇点的特性所作的论断，只要指出无限远是绝对不稳定的，因而所有奇点的庞卡莱示性数之和等于 +1 就够了. 因此，坐标原点以外的四个奇点不会都是鞍点或都是结点，其中两个是鞍点，两个是结点，并且由于无限远的不稳定性，后者必定是稳定的结点.

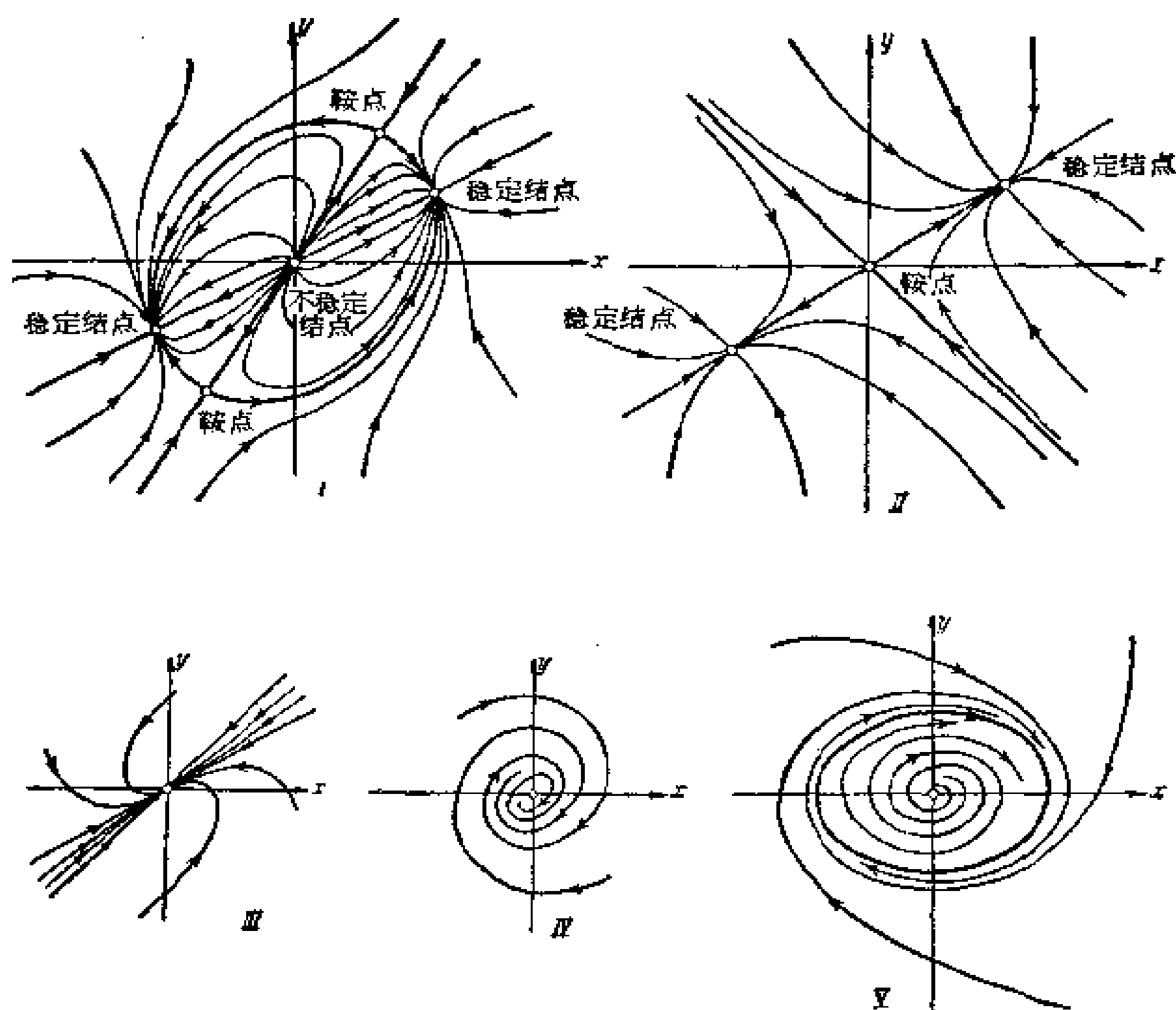


图 279

II. $\delta>0,\ \Delta<0$. 现在（图 279, *II*）坐标原点是鞍点，而坐标原点以外有两个稳定的结点. 和前面一样，这里也没有极限环（这些断言的证明完全与上面类似）.

III. $\delta>0$, $\Delta>0$, $\sigma>0$, 相平面(图279, *III*)上有唯一的平衡状态——稳定的结点(0, 0), 所有的相轨线都渐近地趋近于它. 有两条积分直线 $y=k_1x$ 和 $y=k_2x$ 通过结点, 因此, 没有极限环.

IV. $\delta<0$, $\sigma>0$. 唯一的平衡状态是稳定的焦点(0, 0). 下面我们将证明, 极限环是不存在的. 因此(图 279, *IV*), 象前面的情况一样, 所有的轨线(当 $t\to+\infty$ 时)都趋近于坐标原点.

V. $\delta<0$, $\sigma<0$. 这时, 唯一的平衡状态——坐标原点是不稳定的焦点; 因为无限远是不稳定的, 则在相平面上至少有一个稳定的极限环. 利用杜拉克判据, 我们可证明, 当 $\delta<0$ 时, 在相平面上不会有多于一个的极限环(同时, 我们也就证明了在前一情况中没有极限环, 因为, 如果极限环在情况 IV 中存在时, 则必定有偶数个). 取函数

$$B(x, y)=\frac{1}{by^2-cx^2+(a-d)xy}$$

作为因子 $B(x, y)$, 由于 $\delta=(a-d)^2+4bc<0$ 的条件, 这个函数除坐标原点外, 处处连续, 导数也连续; 因而是定号的. 这时, 如果以 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 记方程 (5.87) 的右端, 便有

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)=-2(x^2+y^2)B(x, y);$$

而这个表达式在下述环域里不变号, 这里所指的环域是除去坐标原点的任意小的邻域而得到的*. 这样, 极限环在所研究的情况中是唯一的, 相平面的相轨线划分如图 279, *V* 所示(当 $t\to+\infty$ 时, 所有的相轨线都向这个极限环接近).

在情况 *V* 中, 为了确定极限环所在的范围, 可取圆族

$$x^2+y^2=R^2$$

为地形系. 正象我们已看到的,

$$\frac{1}{2}\frac{d(R^2)}{dt}=ax^2+(b+c)xy+dy^2-(x^2+y^2)^2,$$

---

* 这个环域的外边界是无限大的无切环, 内边界是任一围绕原点的闭曲线——译者注.

或写为极坐标的形式

$$\frac{1}{2}\frac{d(R^2)}{dt}=\frac{R^2}{2}[a+d+(a-d)\cos 2\varphi+(b+c)\sin 2\varphi]-R^4.$$

不难推出，有

$$R_1^2 \leqslant \frac{a+d+(a-d)\cos 2\varphi+(b+c)\sin 2\varphi}{2} \leqslant R_2^{2*},$$

其中

$$R_1^2=\frac{a+d-\sqrt{(a-d)^2+(b+c)^2}}{2},$$

及

$$R_2^2=\frac{a+d+\sqrt{(a-d)^2+(b+c)^2}}{2}.$$

因此，当 $(a+d)^2>(a-d)^2+(b+c)^2$（或即 $4ad>(b+c)^2$）时，所有半径为 $R \leqslant R_1$ 与 $R \geqslant R_2$ 的圆都是无切环，因为当 $R \leqslant R_1$ 时，$dR/dt \geqslant 0$**，而 $R \geqslant R_2$ 时，$dR/dt \leqslant 0$，故唯一的极限环在半径为 R_1 与 R_2 之圆的中间。如果 $4ad<(b+c)^2$，则 R_1 的值是虚的，地形系的曲线中只有半径 $R \geqslant R_2$ 的圆（由前可知，在这些圆上 $dR/dt \leqslant 0$），因而极限环在半径为 R_2 的圆内[1]。

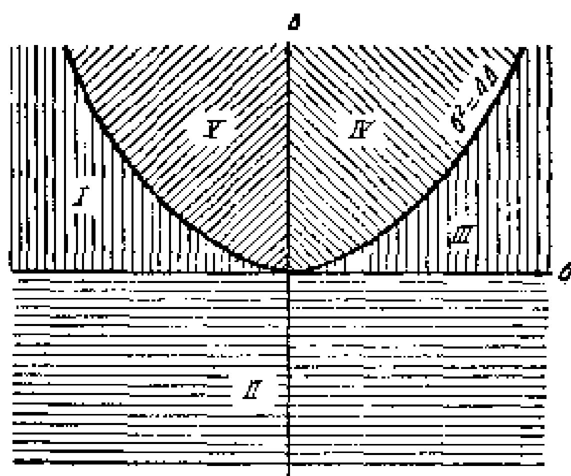


图 280

这样，根据方程 (5.87) 中参数的不同，可能产生上面的情况之一。在参数 σ 与 Δ 的平

---

* 原书为“$R_1^2 \leqslant a+d+(a-d)\cos 2\varphi+(b+c)\sin 2\varphi \leqslant R_2^2$”，虽然对作为函数的极大及极小的 R_1^2 及 R_2^2 来说，不改变这个表达式也可，但下面的很多式子都应加以修改——译者注。

** 原书为“$\frac{dR}{dt} \leqslant 0$”——译者注。

1) 在后一情况中，外面有极限环的无切环可以在椭圆

$$by^2+(a-b)xy-cx^2=\text{常数}$$

之中寻求。

面上，每种情况的存在区域如图 280 所示。

在结束这一节时，我们还应注意到下面的问题．对(5.1)型的微分方程的特殊形式，有时可以用特殊的讨论来证明极限环的有无，而不以一般理论为依据．这种分析有很大的物理意义，例如，列那尔 (Liēnard) 在对特性曲线的对称性作了某些简化考虑后，对阴极振荡发生器的方程所作的分析，就是一例[174]。

§ 12. 近似积分方法

我们已经不只一次地指出过，到现在为止，还没有积分一般形式的非线性微分方程的正规方法，同时也没有绘制这些非线性动力学系统的相图的严格方法．因此，在研究具体动力学系统时，近似的图解积分法，亦即，用近似地作出该动力学系统的相图的方法，常常是最简单的(有时也是唯一的)方法．显然，图解积分法和其他类似的方法，都要求给定系统的全部参数的值，或在最好的情况下给出参数组合的数值．这是所有数值积分法的重大缺点，它限制了结果的一般性，也难以从整体上来探讨所有的问题．因此，如果能够用解析法，尽管比较复杂，也不愿用数值积分方法．但是解析的研究方法，只在一定的限制条件下才能用到我们所研究的问题中去，而这种条件在许多自振装置中，特别是不含普通振荡回路的装置中，是不成立的．这就是使近似积分法成为唯一的方法的情况之一．要达到我们的目的，最适用的近似图解积分法，就是等倾线法．这个方法的实质如下所述[1]．我们研究的系统的性状，在消去时间后，可由一个一阶非线性方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}=f(x, y) \tag{5.3}$$

来描述．相平面上的曲线 $f(x, y)=C$ 是这样的点的几何轨迹，我们待求的积分曲线在这些点上，都和横坐标成同一角度，即正切

1) 我们只是很简短地阐述一下等倾线方法，因为这种方法用得很广泛，而且很容易在各种文献中找到这种方法的讲述，例如，可见 [110]．

等于C的角度．因此，曲线$f(x, y)=C$也称为等倾线(有相等倾角的曲线)．给C以不同的数值(方程(5.3)中的参数也应给定数值)，我们就可以在相平面上作出待求的积分曲线的等倾线族(图281)．对于每一等倾线，都知道所有积分曲线在与该等倾线相交的点上的斜率，因此，在每一等倾线上，都能作出积分曲线在通过该等倾线时的切线线段．很明显，两条或几条等倾线的交点就是奇点，因为积分曲线的方向在这些点上是不确定的．

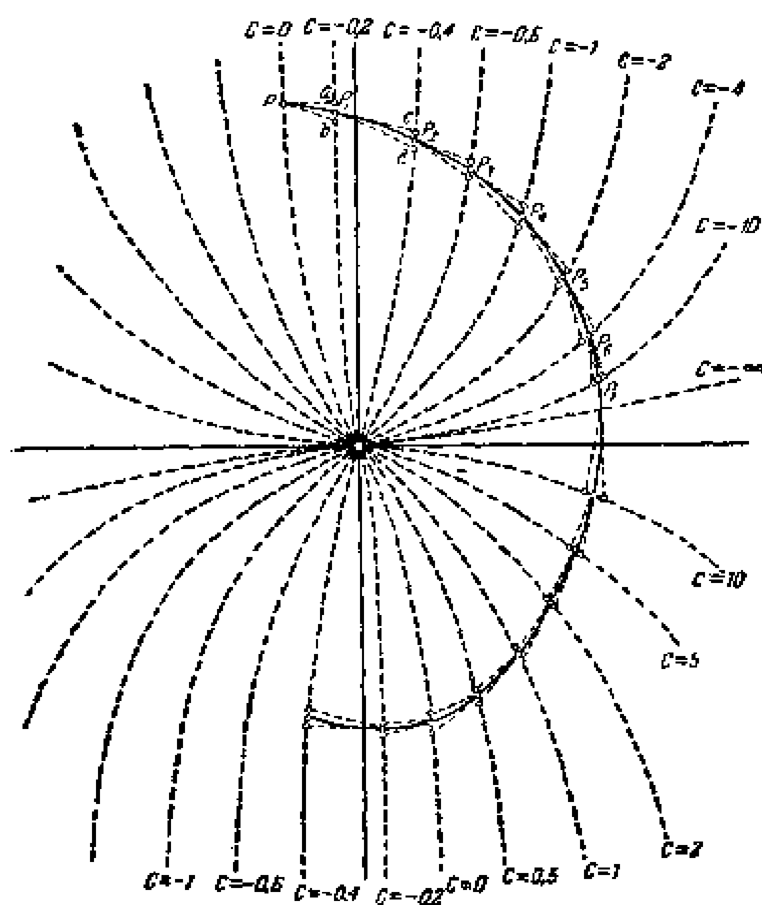


图 281

作出相当稠密的等倾线场，就可以着手近似地画出相图．从相平面上的任意一点P开始作积分曲线．设P点在等倾线$C=0$上，从该点引出两个线段：一个沿对应于等倾线$C=0$之切线的方向，另一个沿对应于相邻的等倾线$C=-0.2$的切线的方向，两个线段都与这一相邻的等倾线相交．得到两个点a与b，在两点之间取点P_1作为我们的积分曲线上的点．由点P_1引两条直线，倾角分别对应于等倾线$C=-0.2$与$C=-0.4$，它们和等倾线$C=-0.4$相交．点c与d间的中点P_2就是所求的积分曲线上的第三点．依此类推地作下去，得到点$P, P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots$的序列，通过这些点就作出了通过点$P$的积分曲线．类似地，我们可以继续把这一曲线作下去，也可以在相平面上作出一系列其他的积分曲线．结果，对给定的具体系统(有

一定参数值的），我们得到了虽然是近似的但也是相当详细的相图．根据这个相图，我们可以判断在给定参数值时，系统中是否会产生自振，这些振动的 x 与 y 的最大值有多大，等等．但是根据这个相图，我们不能判断出，当系统的某个参数改变时，系统的性状有什么改变．为了说明这个问题，就必需给予我们要研究其影响的那个参数以不同数值，并作出相图的“连环图”．

范德波尔对方程

$$\ddot{v}-\varepsilon(1-v^2)\dot{v}+v=0$$

之相平面的研究[188,199]，可以作为说明应用等倾线法的典型例子．这个方程表征了许多自振问题的特性（当然，在适当的理想化下），例如，对电子管振荡器，当电子管有立方特性曲线时，其振荡方程就可以化为这个方程．范德波本人，就是在讨论电路中有自感的对称多谐振荡器的振荡理论时，研究了这个方程的．

把二阶方程写为两个一阶方程组的形式：

$$\frac{dv}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-v+\varepsilon(1-v^2)y,$$

然后将两式相除，得一阶方程——积分曲线方程：

$$\frac{dy}{dv}=\varepsilon(1-v^2)-\frac{v}{y}.$$

给参数 ε 一定的正数值，应用等倾线法，范德波尔得到了“相图的连环图”，如图 282 所示（a, $б$, $в$ 各对应参数 ε 是小、中和大的情况）．利用这个连环图可以判断出，当改变参数 ε 时，系统中之运动的特性是怎样改变的．系统的平衡状态 $(0, 0)$ 当 $\varepsilon>0$ 时，总是不稳定的（当 $0<\varepsilon<2$ 时，是不稳定的焦点，当 $\varepsilon>2$ 时，是不稳定的结点）．全部相图中都包含唯一的极限环，因此，对于所有的 $\varepsilon>0$ 的值，系统会产生自振，而且自振的建立是软激的（在任意的初始条件下，产生同一的自振）．但自振的振幅与形状，及其建立过程的特性，在不同的情况下，是不相同的．对于小的正数 ε，极限环接近于圆（自振接近正弦形），其余的相轨线是逐渐向极限环卷绕的螺线（图 282, a）．当增加 ε 时，$y=dv/dt$ 的幅度也

增加，自振的形状越来越不象正弦形（极限环的形状越来越不象圆，图 282，б 与 в）；最后，振荡最初的增长（从接近平衡状态的初始状态开始），当 ε 小（当 $\varepsilon<2$）时，是振动的，当 ε 大时（当 $\varepsilon>2$ 时），就变成非周期的了[1]。

作为第二个例子，我们用等倾线法来作出有双环 RC 回路的

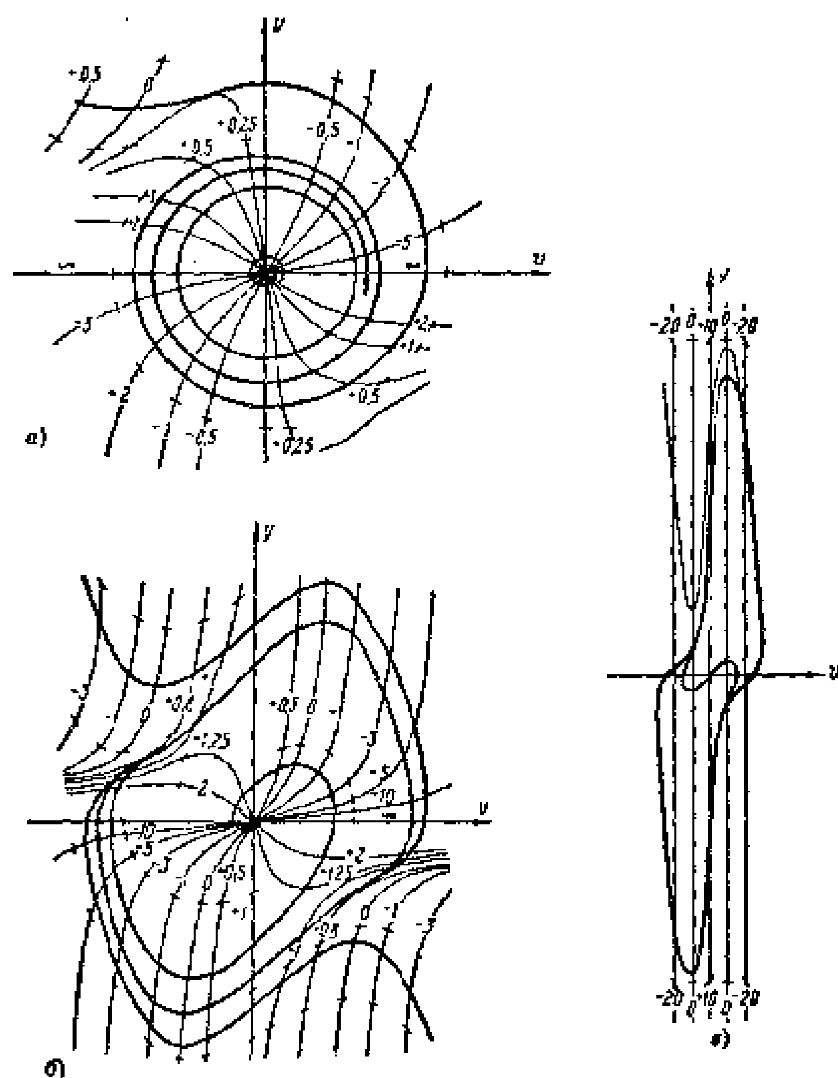


图 282

1）必须着重指出，一般说来，自振的形状与在对应的极限环内的奇点的特性无关。因此，在范德波尔方程中出现的自振形状与奇点特性之间的联系，不能推广到其他自振系统中去（例如，不能推广到有其他电子管特性曲线的电子管振荡器中去）。

还要指出，立方特性曲线只能在其互导为零的点之间的区域中，才能满意地表示真实的电子管特性曲线的形状，如果振荡越出这个范围，那末这个数学模型的性状中，就可能出现完全不能表征真实电子管振荡器之特性的特点。

电子管振荡器的相图. 这种振荡器的两个电路(有两个三极管的电路和电子管在负互导状态下的电路)如图 283 所示. 两个电路在通常所作的简化假设下(特别是要忽略栅流与屏极反应), 采用图 283 中的符号,根据克希霍夫定律可得下列方程:

$$C\frac{dv}{dt}=\frac{u-E_g}{R_g};\quad \frac{E_a-(u+v)}{R_a}=i(u)+C\frac{dv}{dt}+C_1\frac{d(u+v)}{dt},\tag{5.88}$$

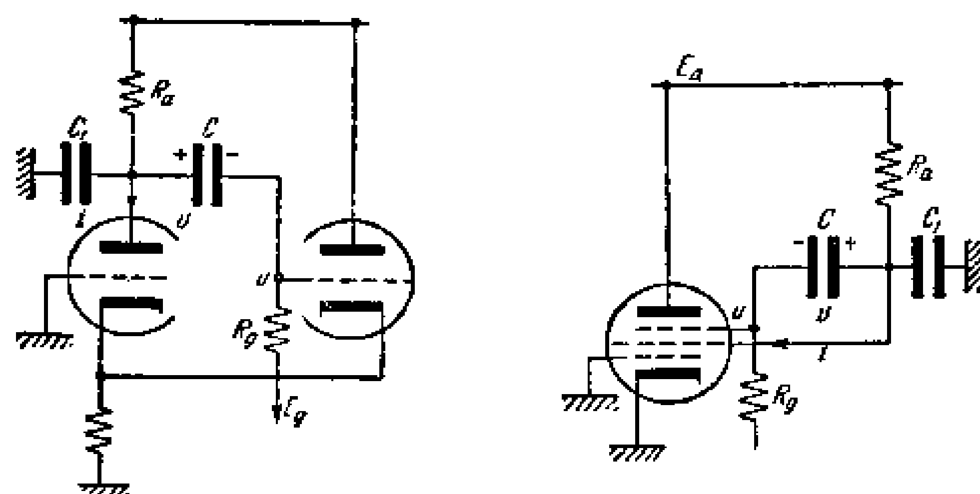


图 283

其中 $i=i(u)$ 是电子管组(或电子管在负互导状态下)的特性;为使电路的工作象自振系统, 特性曲线(图 284)必须有互导为负的下降段.

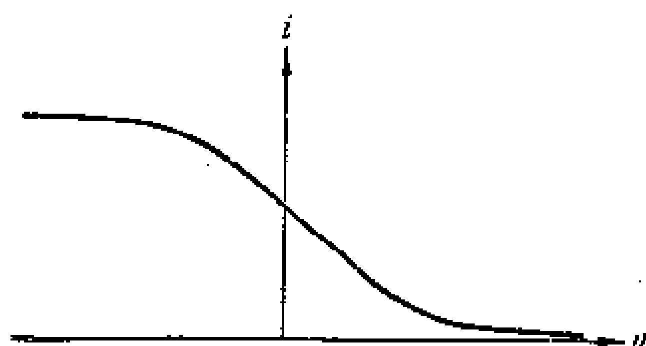


图 284

对于唯一的平衡状态, 显然有

$$u=E_g,$$

$$v=E_a-R_ai(E_g)-E_g.$$

为了简化方程, 引入与栅压及电容器 C 的交变电压分量成正比的新变量 x, y:

$$u=E_g+u_0x,\quad v=E_a-R_ai(E_g)-E_g+\alpha u_0y,$$

新的无量纲时间 $t_{新}=Tt_{旧}$, 并引入无量纲的特性曲线

$$\varphi(x)=\frac{1}{u_0S}\left[i(E_g+u_0x)-i(E_g)\right],$$

其中 u_0 与 T 是电压与时间的比例尺，α 是无量纲的系数，而 S 是特性曲线在对应于平衡状态的"工作点"上之互导的绝对值(当 $u=E_g$ 时，$S=-di/dt$)。这时，方程 (5.88) 具有形式：

$$\frac{CR_g}{T}\dot{y}=x;\quad \frac{C_1R_a}{T}\dot{x}=R_aS\varphi(x)-\left[1+\frac{R_a}{R_g}\left(1+\frac{C_1}{C}\right)\right]x-\alpha y$$

(字母上的点表示对新的无量纲时间的微分)。选取

$$\alpha=1+\frac{R_a}{R_g}\left(1+\frac{C_1}{C}\right) \text{ 及 } T=CR_g+(C+C_1)R_a,$$

把方程 (5.88) 化为下列无量纲形式：

$$\dot{y}=x;\quad \mu\dot{x}=-y-x-K\varphi(x), \tag{5.89}$$

其中的两个(无量纲)参数

$$\mu=\frac{R_aC_1}{R_gC}\frac{1}{\left[1+\frac{R_a}{R_g}\left(1+\frac{C_1}{C}\right)\right]^2},\quad K=\frac{SR_a}{1+\frac{R_a}{R_g}\left(1+\frac{C_1}{C}\right)} \tag{5.90}$$

(放大系数 $K\geqslant 0$，而正参数 μ 的数量级通常与 C_1/C 相同，大小不超过 1/4)[1]。

现在，(在平面 x, y 上) 唯一的平衡状态在坐标原点上；不难看出，其特征方程是二次方程

$$\mu\lambda^2+(1-K)\lambda+1=0, \tag{5.91}$$

因为按函数 $\varphi(x)$ 的定义：$\varphi'(0)=-1$。因此，这个平衡状态在 $K<1$ 时稳定，在 $K>1$ 时不稳定，在 $(K-1)^2<4\mu$ 时是焦点，而在 $(K-1)^2>4\mu$ 时是结点 (图 285 上将参数 μ, K 的平面划分为对应于不同类型平衡状态的区域)。

无限远在类似的电路中总是不稳定的。事实上，当电压 u 很大(指绝对值)时，便落在特性曲线的水平段上，这里 i 与 $\varphi(x)$ 都是常数。因此，电路在远处是线性的，有稳定结点型的平衡状态，

---

1) 在图 283 所示的电路的栅极接点(电子管组或电子管的控制电极的接点)上，再接一个电容器(电容器 C_1 可以取消)，这样构成的有 RC 回路的振荡器，其振荡方程可以化为方程 (5.89)。这些方程当 $\mu\ll 1$，$\mu\ll K-1$ 时，也描述有一个 RC 回路的多谐振荡器的振荡 (见第四章 § 7)，它反映了小寄生电容 (例如寄生电容 C_1) 的重要作用。

因而所有的相轨线都从无限远进入 x, y 的有限区域[1]. 如果坐标原点是不稳定的平衡状态(当 $K>1$ 时便是),那么在相平面上,至少有一个稳定的极限环. 当特性曲线 $\varphi(x)$ 有单调减小(指绝对值)互导时(当从"工作点"离开时),这个极限环就是唯一的[2].



图 285

要找出这个极限环,例如,可以应用等倾线法[3]. 把方程(5.89)中的二式相除,得积分曲线的微分方程:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\mu x}{y+x+K\varphi(x)}; \quad (5.92)$$

等倾线(积分曲线的切线斜率等于 κ)的方程是

$$y=-\left(1+\frac{\lambda}{\kappa}\right)x-K\varphi(x). \quad (5.93)$$

其中水平切线的等倾线($\kappa=dy/dx=0$)是轴 y(轴 $x=0$),而铅垂切线的等倾线($\kappa=dy/dx=\infty$)是曲线

$$y=-x-K\varphi(x). \quad (5.93a)$$

极限环和一些其他的相轨线用等倾线法作在图 286—289 上,相图是对特性曲线

$$\varphi(x)=\begin{cases}+\dfrac{2}{3} & \text{当 } x\leqslant -1,\\ -x+\dfrac{x^3}{3} & \text{当 } |x|\leqslant 1,\\ -\dfrac{2}{3} & \text{当 } x\geqslant +1\end{cases} \quad (5.94)$$

(特性曲线的下降段接近于对称的立方抛物线),以及对参数 μ 与

---

1) 严格地说,上面所述,证明了无限远沿各个方向都是不稳定的,除了沿轴 y 的方向以外.但是不难证实,在这个方向,庞卡莱球面的赤道上一般是不会有奇点的,因此,无限远在这个方向也不会是稳定的.

2) 当 $K<1$ 时,坐标原点是稳定的平衡状态,极限环不存在(例如,用本狄克生判据,很容易证实这点)而所有的相轨线(当 $t\to+\infty$ 时)渐近地趋近于平衡状态.

3) 以后在下册第八章 §5 中,在特性曲线是分段线性的情况下,将用点变换方法求出极限环.

K 的不同值而作出的．在区域 $x>+1$ 与 $x<-1$ 中，方程(5.89)是线性的，有直的相轨线 $y=\kappa^{*}x+(2K/3)$（在区域 $x>+1$ 中）与 $y=\kappa^{*}x-(2K/3)$（在区域 $x<-1$ 中），其中 κ^{*} 是方程 $\kappa^{2}+\kappa+\mu=0$ 的根．这些条件可以用来作出包含极限环在内的无切环．这个无切环（曲线 $ABCDEFA$，见图 286—288）由相轨线 ABC 与 DEF 及铅垂线段 CD 与 FA 组成的。

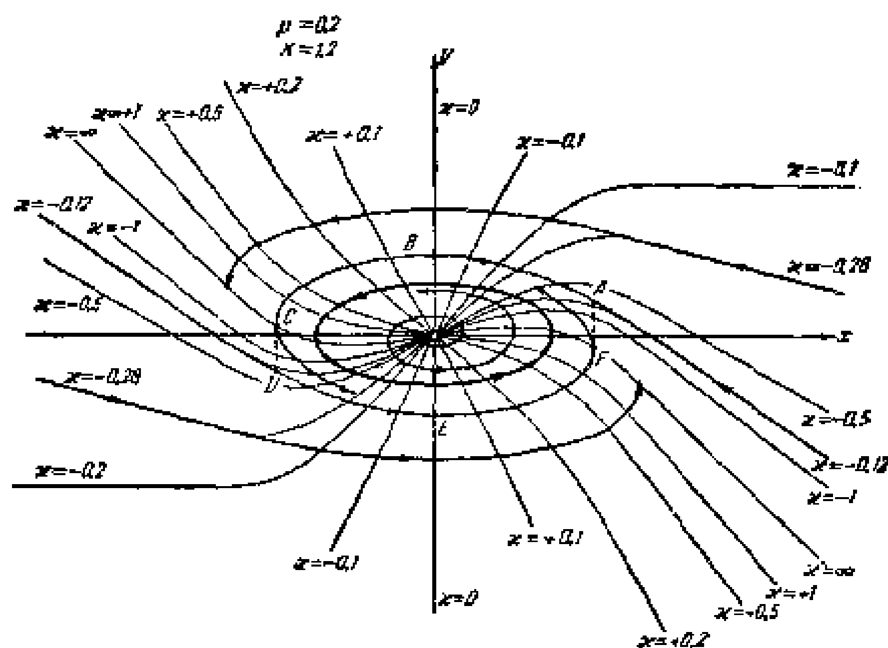


图 286

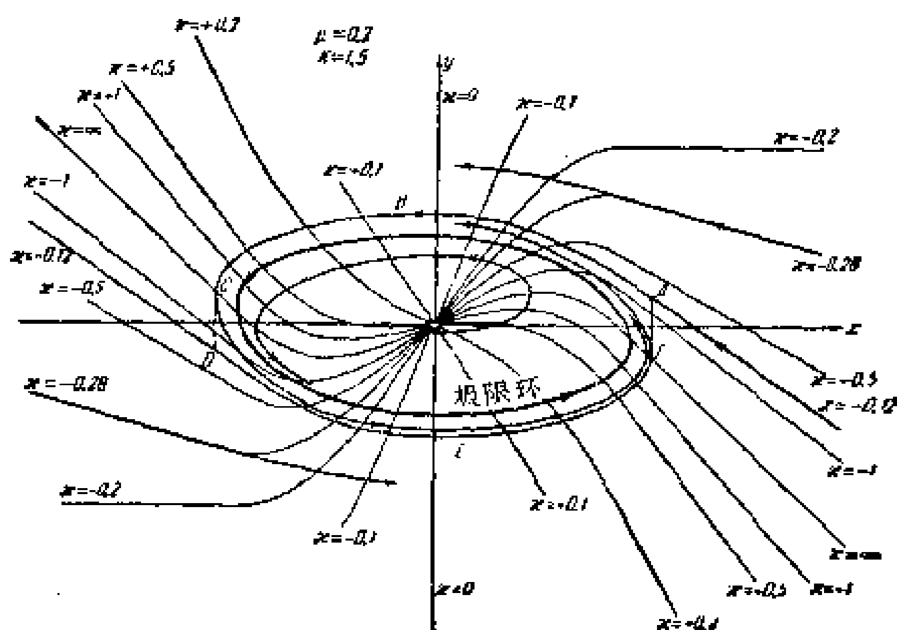


图 287

当 $0<K-1\ll\sqrt{\mu}$ 时，系统中的自振接近正弦形，这可以根据图 286 上（$\mu=0.2$ 与 $K=1.2$）之极限环的形状接近于椭圆判断出来．当增加电路的"激励"时（增加 K 或减少 μ，这时已经不满足不等式 $K-1\ll\sqrt{\mu}$ 了），极限环开始变形（图 287 与 288），而自振亦越来越不象正弦形了[1]．当 $\mu\ll 1$ 与 $\mu\ll K-1$ 时，自

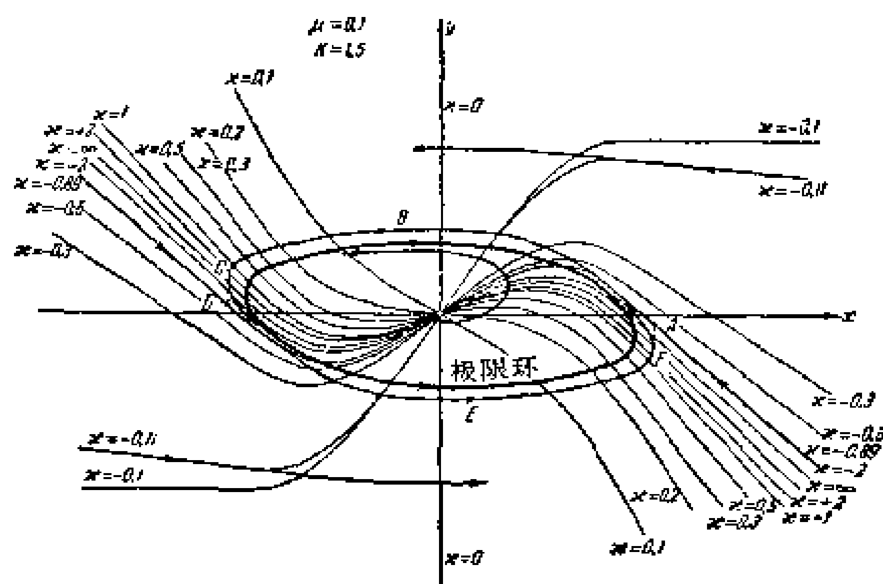


图 288

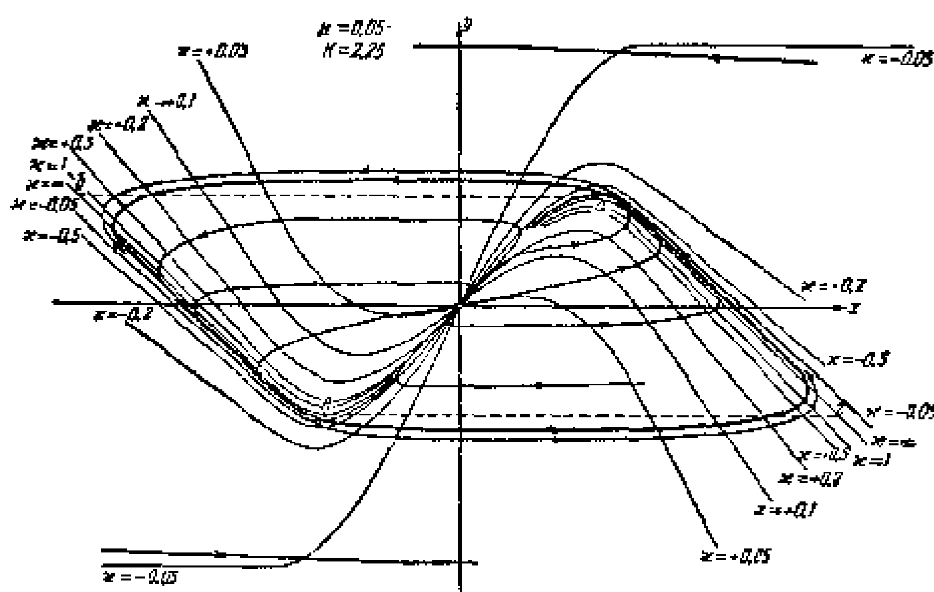


图 289

1) 正因为如此，所以在有小清晰系数之正弦振荡 RC 发生器的电路中，必定要加入补充的元件（热敏电阻，限幅二极管），来限制自振振幅，并且自动地保证满足不等式 $0<K-1\ll\sqrt{\mu}$．

振逐渐地接近于不连续的（图 289），因为相点运动的相速度在曲线（5.93a）之外，根据（5.89）的第二个方程，变得很大（当 $\mu \to 0$ 时趋于无穷大），我们得到了有一个 RC 回路和小寄生电容 C_1（$C_1 \ll C$）的多谐振荡器的相图．当 μ 很小时（亦即当 $C_1 \ll C$ 时），极限环在曲线 $абвга$ 的微小邻域中（μ 越小则邻域亦越小），这个曲线是由曲线（5.93a）的弧线，水平直线段所组成的，且曲线 $абвга$ 是极限环（当 $\mu \to 0$ 时）的极限位置．这些情况不仅是多谐振荡器所特有的，在讨论到各种有"不连续振荡"的系统时，还要广泛地利用到（见下册第十章）．

这样一来，图解积分不仅能说明系统在参数值给定时的性状，也能研究其中某个参数改变时，系统性状的变化．当然，这要作很多的图才行．不过，在有些情况下，不要求对系统的性状作一般性评论，而仅仅发生这样的问题：在给定的初始条件下，系统的性状是怎样的，这时可以用初瞬时 t_0 起经过一定的时间间隔后，系统所具有的坐标与速度的值，来近似地描述系统的性状．例如，假设我们研究某一周期过程，并知道了这一周期过程的一个状态，以及这个过程的周期 τ（虽然是大概的值），那末把时间间隔分割，例如分为 $\tau/10$，来计算坐标与速度的值，就可以得到关于整个过程的概念．这种问题——计算由所给的微分方程（及所给的初始条件）确定的函数值——可以用近似的积分方法来进行，例如，用阿当姆斯法或龙格法．后一种方法最简单，对我们研究的问题来说也最方便；因此，我们就此把这个方法简短地叙述一下[1]．设有两个微分方程：

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{5.1}$$

及初始条件：当 $t = t_0$ 时，$x = x_0$，$y = y_0$．要计算在微小时间 Δt 后的 x 与 y 的增量．为此，作表达式：

$$\Delta x_1 = P(x_0, y_0)\Delta t,$$

$$\Delta y_1 = Q(x_0, y_0)\Delta t,$$

1）关于龙格法，更详细的叙述以及其他数值积分法的阐述，可在 [110, 76] 中找到．

$$\Delta x_2 = P\left(x_0 + \frac{\Delta x_1}{2}, y_0 + \frac{\Delta y_1}{2}\right)\Delta t,$$

$$\Delta y_2 = Q\left(x_0 + \frac{\Delta x_1}{2}, y_0 + \frac{\Delta y_1}{2}\right)\Delta t;$$

$$\Delta x_3 = P\left(x_0 + \frac{\Delta x_2}{2}, y_0 + \frac{\Delta y_2}{2}\right)\Delta t,$$

$$\Delta y_3 = Q\left(x_0 + \frac{\Delta x_2}{2}, y_0 + \frac{\Delta y_2}{2}\right)\Delta t;$$

$$\Delta x_4 = P(x_0 + \Delta x_3, y_0 + \Delta y_3)\Delta t,$$

$$\Delta y_4 = Q(x_0 + \Delta x_3, y_0 + \Delta y_3)\Delta t.$$

这时，函数 x 与 y 在小时间间隔 Δt 内的增量可很精确地表示为

$$\Delta x = \frac{1}{3}\left[\Delta x_2 + \Delta x_3 + \frac{\Delta x_1 + \Delta x_4}{2}\right];$$

$$\Delta y = \frac{1}{3}\left[\Delta y_2 + \Delta y_3 + \frac{\Delta y_1 + \Delta y_4}{2}\right].$$

我们得到函数 x 与 y 在瞬时 $t_1 = t_0 + \Delta t$ 的值：$x_1 = x_0 + \Delta x$；$y_1 = y_0 + \Delta y$。取 x_1 与 y_1 为新的初值再计算瞬时 $t_0 + 2\Delta t$ 时的 x 与 y 值，依此类推，可得各相隔 Δt 时间的一系列 x 与 y 值．我们看到，计算每一对 x 与 y 的值，要算四个函数 P 的值，四个函数 Q 的值．如果函数 P 与 Q 很复杂，则计算量很大．这时，用阿当姆斯法更方便些。

参 考 文 献

[1] Айзерман М. А. Введение в динамику автоматического регулирования двигателей. Машгиз, 1950.

[2] Айзерман М. А. Физические основы применения методов малого параметра к решению нелинейных задач теории автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика 14, 597 (1953).

[3] Андронов А. А. Предельные циклы Пуанкаре и теория автоколебаний. Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 41. Изд. АН СССР, 1956.

[4] Андронов А. А. Математические проблемы теории автоколебаний. Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 85. Изд. АН СССР, 1956.

[5] Андронов А. А. Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний. Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 32. Изд. АН СССР, 1956.

[6] Андронов А. А., Витт А. А. Разрывные периодические решения и теория мультивибратора Абрагама и Блоха. ДАН СССР 8, 189 (1930); Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 65. Изд. АН СССР, 1956.

[7] Андронов А. А., Витт А. А. К теории захватывания Ван-дер-Поля. Arch. f. Elektrotech. 24, 99 (1930); Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 51. Изд. АН СССР, 1956.

[8] Андронов А. А., Витт А. А. Об устойчивости по Ляпунову. ЖЭТФ 3, 373 (1933); Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 140. Изд. АН СССР, 1956.

[9] Андронов А. А., Вознесенский И. Н. О работах Д. К. Максвелла, И. А. Вышнеградского и А. Стодолы в области теории регулирования машин. Сб. «Д. К. Максвелл, И. А. Вышнеградский, А. Стодола. Теория автоматического регулирования (классики науки)». Изд. АН СССР, 1949; Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 490. Изд. АН СССР, 1956.

[10] Андронов А. А., Леонтович Е. А. К теории изменений качественной структуры разбиения плоскости на траектории. ДАН СССР 21, 427 (1938); Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 217, Изд. АН СССР, 1956.

[11] Андронов А. А., Леонтович Е. А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра. Уч. зап. ГГУ, стр. 3 (1939); Собрание трудов А. А., Андронова, стр. 188, Изд. АН СССР, 1956.

[12] Андронов А. А., Леонтович Е. А. Рождение предельных циклов из негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла. ДАН СССР 99, 885 (1954).

[13] Андронов А. А., Леонтович Е. А. Рождение предельных циклов из негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла. Матем. сб. **40**, 179 (1956).

[14] Андронов А. А., Любина А. Г. Применение теории Пуанкаре о «точках бифуркаций» и «смене устойчивости» к простейшим автоколебательным системам. ЖЭТФ **5**, вып. 3—4 (1935); Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 125. Изд. АН СССР, 1956.

[15] Андронов А. А., Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. Новые исследования в области нелинейных колебаний. Радиоиздат, 1936; Physics of the USSR **11**, № 2—3, 1 (1935).

[16] Андронов А. А., Неймарк Ю. И. О движениях идеальной модели часов, имеющей две степени свободы. Модель догалилеевых часов. ДАН СССР 51, 17 (1946); Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 313. Изд. АН СССР, 1956.

[17] Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы. ДАН СССР **14**, 247 (1937); Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 181. Изд. АН СССР, 1956.

[18] Баркгаузен Г. Г. Катодные лампы, т. II, 1928.

[19] Баутин Н. Н. К теории синхронизации. ЖТФ **9**, 510 (1939).

[20] Баутин Н. Н. Об одном случае негармонических колебаний. Уч. зап. ГГУ 12, 231 (1939).

[21] Баутин Н. Н. Об одном дифференциальном уравнении, имеющем предельный цикл. ЖТФ 9, 601 (1939).

[22] Баутин Н. Н. О движении идеальной модели часов, имеющей две степени свободы. Модель часов Галилея—Гюйгенса. ДАН СССР **61**, 17 (1948).

[23] Баутин Н. Н. О задаче Мандельштама в теории часов. ДАН СССР **65**, 279 (1949).

[24] Баутин Н. Н. Динамическая модель хронометрового хода. Инж. сб. АН СССР 12, 3 (1952).

[25] Баутин Н. Н. Динамическая модель часового хода без собственного периода. Инж. сб. АН СССР **16**, 3 (1953).

[26] Баутин Н. Н. О периодических решениях одной системы дифференциальных уравнений. ПММ **18**, 128 (1954).

[27] Баутин Н. Н. Динамическая теория часовых ходов без конструктивной остановки ходового колеса. Инж. сб. АН СССР **21**, 3 (1955).

[28] Баутин Н. Н. Динамические модели свободных часовых ходов. Сб. памяти А. А. Андронова, стр. 109. Изд. АН СССР, 1955.

[29] Беременов А. Е. Методы Баркгаузена—Мёллера с точки зрения строгой теории автоколебаний. ЖТФ **6**, 467 (1936).

[30] Беременов А. Е. Теория диаграммы срыва Рукопа. Электросвязь, № 4, стр. 13 (1938).

[31] Белюстина Л. Н. Определение качественной структуры разбиения на траектории фазовой плоскости грубой системы. (Готовится к печати.).

[32] Бендриков Г. А., Горелик Г. С. Применение Брауновской трубки к исследованию движения изображающей точки на плоскости переменных Ван-дер-Поля. ЖТФ 5, 620 (1935).

[33] Бессонов Л. А. Электрические цепи со сталью. Госэнергоиздат, 1948.

[34] Биркгоф Д. Д. Динамические системы. М.—Л., 1941.

[35] Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Изд. АН УССР, 1945.

[36] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1955.

[37] Бремзен А. С., Файнберг И. С. Анализ работы двух связанных релаксационных генераторов. ЖТФ 11, 959 (1941).

[38] Булгаков Б. В. О применении метода Пуанкаре к свободным псевдолинейным колебательным системам. ПММ 6, 263 (1942).

[39] Булгаков Б. В. О применении метода Ван-дер-Поля к псевдолинейным колебаниям системы с многими степенями свободы. ПММ 6, 395 (1942).

[40] Булгаков Б. В. Автоколебания регулируемых систем. ПММ 7, 97 (1943).

[41] Булгаков Б. В. Колебания. Гостехиздат, 1954.

[42] Васильева А. Б. О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры. Матем. сб. 31 (73), 587 (1952).

[43] Виткевич В. В. «Жесткий» режим самовозбуждения релаксационного генератора (мультивибратора). ЖТФ 16, вып. 3, 309 (1946).

[44] Власов Н. П. Автоколебательная система с однофазным асинхронным мотором. ЖТФ 5, 641 (1935).

[45] Гаузе Г. Ф., Витт А. А. О периодических колебаниях численности популяции. Изд. АН СССР, сер. 7, 1551 (1934).

[46] Гольдфарб Л. С. О некоторых нелинейностях в системах регулирования. Автоматика и телемеханика 8, 347 (1947).

[47] Гольдфарб Л. С. Метод исследования нелинейных систем регулирования, основанный на принципе гармонического баланса. Сб. «Теория автоматического регулирования», Машгиз, 1951.

[48] Горелик Г., Кузовкин В., Секерская В. Исследование прерывистой генерации. Техника радио и слабых токов 11, 629 (1932).

[49] Градштейн И. С. Нелинейные дифференциальные уравнения с малыми множителями при некоторых производных. ДАН СССР 66, 789 (1949).

[50] Градштейн И. С. Дифференциальные уравнения, в которые множителями входят различные степени малого параметра. ДАН СССР 82, 5 (1952).

[51] Грановский В. Л., Электрический ток в газе, т. I, Гостехиздат, 1952.
[52] Дородницын А. А. Асимптотическое решение уравнений Ван-дер-Поля. ПММ 11, 313 (1947).
[53] Евтянов С. И. Теория автогенератора с гридликом. Электросвязь, № 9, 66 (1940).
[54] Жевакин С. А. К теории звездной переменности. ДАН СССР 99, 217 (1954).
[55] Жевакин С. А. О сдвигах фаз между колебаниями блеска и колебаниями лучевой скорости переменных звезд. ДАН СССР 99, 353 (1954).
[56] Жевакин С. А. Об автоколебаниях переменных звезд «большой последовательности». Сб. памяти А. А. Андронова, стр. 629, Изд. АН СССР, 1955.
[57] Железцов Н. А. Самомодуляция автоколебаний лампового генератора с автоматическим смещением в цепи катода. ЖТФ 13, 495 (1948).
[58] Железцов Н. А. К теории симметричного мультивибратора. ЖТФ 20, 778 (1950).
[59] Железцов Н. А. К теории лампового генератора с двухзвенной RC-цепочкой. Труды Горьковского физико-технического института и радиофизического факультета ГГУ 35, 220, Москва—Горький, 1957.
[60] Железцов Н. А. К теории разрывных колебаний в системах второго порядка. Радиофизика 1, № 1 (1958).
[61] Железцов Н. А., Родыгин Л. В. К теории симметричного мультивибратора. ДАН СССР 81, 391 (1951).
[62] Железцов Н. А., Фейгин М. И. О режимах работы симметричного мультивибратора. Радиотехника и электроника 2, 751 (1957).
[63] Жуковский Н. Е. О движении маятника с трением в точке подвеса. Соб. соч., т. 1, стр. 290, Гостехиздат, 1948.
[64] Жуковский Н. Е. О парении птиц. Труды отделения физич. наук Общества любителей естествознания 4, вып. 2, 29 (1891); Собр. соч., т. 4, стр. 5. Гостехиздат, 1949.
[65] Ицхоки Я. С. Импульсная техника. Советское радио, 1949.
[66] Казакевич В. В. О приближенном решении уравнения Ван-дер-Поля. ДАН СССР 49, 424 (1945).
[67] Казакевич В. В. Многократные системы и простейшие динамические модели часов. ДАН СССР 74, 665 (1950).
[68] Кайдановский Н. Л. Природа механических автоколебаний, возникающих при сухом трении. ЖТФ 19, вып. 9 (1949).
[69] Кайдановский Н. Л., Хайкин С. Э. Механические релаксационные колебания. ЖТФ 3, вып. 1 (1933).
[70] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. ИЛ, 1950.

[71] Капчинский И. М. Методы теории колебаний в радиотехнике. Госэнергоиздат, 1954.

[72] Карман Т., Био М. Математические методы в инженерном деле. Гостехиздат, 1948.

[73] Кобзарев Ю. Б. Устойчивость частоты автоколебательной системы. Сб. «Первая Всесоюзная конференция по колебаниям», т. 1, стр. 5, Москва, 1933.

[74] Кобзарев Ю. Б. О квазилинейном методе трактовки явлений в ламповом генераторе (почти синусоидальных колебаний). ЖТФ 5, 216 (1935).

[75] Колмогоров А. Н. Аналитические методы теории вероятностей. УМН, вып. 5, стр. 5 (1938).

[76] Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. Изд. АН СССР, 1933.

[77] Крылов А. Н. О применении способа последовательных приближений к нахождению решения некоторых дифференциальных уравнений колебательного движения. Изв. АН СССР, стр. 1 (1933).

[78] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Новые методы нелинейной механики в их применении к изучению работы электронных генераторов, ч. 1. ОНТИ, 1934.

[79] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Изд. АН УССР, 1937.

[80] Леонтович Е. А., Майер А. Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории. ДАН СССР 14, 251 (1937).

[81] Леонтович Е. А., Майер А. Г. Общая качественная теория. Дополнение к главам 5 и 6 в книге А. Пуанкаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями». Гостехиздат, 1947.

[82] Леонтович Е. А., Майер А. Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории. ДАН СССР 103, 557 (1955).

[83] Леонтович М. А. Статистическая физика. Гостехиздат, 1944.

[84] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892; Гостехиздат, 1950.

[85] Майер А. Г. Исследование уравнений Релея и Ван-дер-Поля. Изв. ГГУ, вып. 2 (1936).

[86] Майер А. Г. К теории связанных колебаний двух самовозбуждающихся генераторов. Уч. зап. ГГУ, вып. 2, стр. 3 (1935).

[87] Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1949.

[88] Мандельштам Л. И. Вопросы электрических колебательных систем и радиотехники. Сб. «Первая Всесоюзная конференция по колебаниям», т. 1, стр. 5, ГТТИ, 1933.

[89] Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д., Андронов А. А., Витт А. А., Горелик Г. С., Хайкин С. Э. *Новые исследования нелинейных колебаний*. Радиоиздат, 1936.
[90] Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. Об обосновании одного метода приближенного решения дифференциальных уравнений. ЖЭТФ **4**, 117 (1934).
[91] *Меерович Л. А., Зеличенко Л. Г. Импульсная техника*. Совраднo, М., 1953.
[92] Мигулин В. В., Левитас Д. М. О работе блокинг-генератора. ЖТФ **17**, вып. 10 (1947).
[93] Мищенко Е. Ф. Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных. Изв. АН СССР (сер. матем.) **21**, 627 (1957).
[94] *Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С. Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным*. ДАН СССР **102**, 889 (1955).
[95] Неймарк Ю. И. Устойчивость линеаризованных систем. Л., 1949.
[96] Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1949.
[97] Нетушил А. В. К вопросу о «скачках» в нелинейных системах. ЖТФ **15**, 873 (1945).
[98] Никольский Г. Н. К вопросу об автоматической устойчивости корабля на заданном курсе. Труды Центральной лаборатории проводной связи, вып. 1 (1934).
[99] Основы автоматического регулирования. Сб. под ред. Солодовникова В. В. Машгиз, 1954.
[100] Папалекси Н. Д. *О некоторых современных проблемах в теории колебаний*. УФН **11**, 185 (1931).
[101] Папалекси Н. Д., Андронов А. А., Горелик Г. С., Рытов С. М. Некоторые исследования в области нелинейных колебаний, проведенные в СССР, начиная с 1935 г. УФН **33**, 335 (1947).
[102] Петров В. В., Уланов Г. М. Теория двух простейших релейных систем авторегулирования. Автоматика и телемеханика **11**, 289 (1950).
[103] Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1952.
[104] Б. Ван-дер-Поль. Нелинейная теория электрических колебаний. Связьтехиздат, 1935.
[105] Понтрягин Л. С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. Изв. АН СССР (сер. матем.) **21**, 605 (1957).
[106] Понтрягин Л. С., Андронов А. А., Витт А. А. О статистическом рассмотрении динамических систем. ЖЭТФ **3**, 165 (1933); Собра-

ние трудов А. А. Андронова, стр. 142. Изд. АН СССР, 1956.

[107] Понтрягин Л. С. О динамических системах, близких к гамильтоновым. ЖЭТФ 4, 883 (1934).

[108] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Гостехиздат, 1947.

[109] Ржевкин С. Н., Введенский Б. А. Прерывистый триодный генератор, его теория и применения. Телегр. и телеф. без проводов, № 11, 67 (1921).

[110] Рунге К. Графические методы математических вычислений. ГТТИ, 1932.

[111] Рытов С. М. Развитие теории нелинейных колебаний в СССР. Радиотехника и электроника 2, 1435 (1957).

[112] Скибарко А. П., Стрелков С. П. Качественные исследования процессов в генераторе по сложной схеме. ЖТФ 4, 158 (1938).

[113] Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1953.

[114] Стокер Д. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. ИЛ, 1952.

[115] Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. Гостехиздат, 1950.

[116] Стрелков С. П. Маятник Фроуда. ЖТФ 3, 563 (1933).

[117] Стретт Д. В. (Релей). Теория звука, т. 1, стр. 235. Гостехиздат, 1955.

[118] Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. Гостехиздат, 1952.

[119] Тихонов А. М. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Матем. сб. 31 (73), 575 (1952).

[120] Толле М. Регулирование силовых машин. Госэнергоиздат, 1951.

[121] Фельдбаум А. А. Введение в теорию нелинейных цепей. Госэнергоиздат, 1948.

[122] Фельдбаум А. А. Простейшие релейные системы автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика 10, 249 (1949).

[123] Франк-Каменецкий Д. А. Механизм двухстадийного воспламенения. ЖФХ 14, 30 (1940).

[124] Франк-Каменецкий Д. А. Проблема автоколебаний в теории переменных звезд. Сб. памяти А. А. Андронова, стр. 691. Изд. АН СССР, 1955.

[125] Хайкин С. Э. Непрерывные и разрывные колебания. ЖПФ 7, вып. 6, 21 (1930).

[126] Хайкин С. Э. Автоколебательные системы. Сб. «Первая Всесоюзная конференция по колебаниям», т. 1, стр. 72, ГТТИ, 1933.

[127] Хайкин С. Э. О влиянии малых параметров на характер стационарных состояний динамической системы. ЖТФ 5, 1389 (1935).

[128] Шишелов Л. П. Механика часового механизма, ч. 1, 2, 3, Л., 1933—1937.

[129] Эльсгольц Л. Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Гостехиздат, 1954.

[130] Ювинский В. Об автоколебаниях системы, аналогичной язычку гармонии и кларнета. ЖТФ 4, 1295 (1934).

[131] Abraham N. et Bloch E. Mesures en valeur absolue des periodes des oscillations electriques de haute frequence, Annales de Physique, Ser. 9, **12**, 237 (1919).

[132] Airy C. On the Regulator of the Clock-work for effecting Uniform Movement of Equatoreales. Mem. Roy. Astr. Soc., London **11**, 249 (1840); **20**, 115 (1850—51).

[133] Andrade J. L'Horlogerie et Chronometrie. Paris, 1925.

[134] Appleton E. and Greaves W. On the Solution of the Representative Differential Equation of the Triode Oscillator. Phil. Mag., Ser. 6, **45** (1923).

[135] Appleton E. and van der Pol B. On a type of oscillation—hysteresis in a simple triode generator. Phil. Mag., Ser. 6, **43**, 177 (1922).

[136] Barkhausen H. Die Vakuumröhre und ihre technische Anwendung. Jahrbuch d. drahtl. Telegraphie **14**, 27 (1919); **16**, 82 (1920).

[137] Bendixson I. Sur les courbes definies par des equations differentielles, Acta Math. **24**, 1 (1901).

[138] Bieberbach L. Theorie der Differentialgleichungen. Berlin, J. Springer, 1930.

[139] Birkhoff G. Quelques theoremes sur les mouvements des systemes dynamiques. Bull. Soc. Math. de France, 40 (1912).

[140] Bowschewerow V. Experimentelle Untersuchung des Phasenraumes autoschwingender Systeme. Tech. Phys. of the USSR **11**, 43 (1935).

[141] Chaikin S., Lochakov L. Oscillations «discontinues» dans un circuit a capacite et self-induction. Tech. Phys. of the USSR **11**, 181 (1935).

[142] Cholodenko L. Zur Theorie der Frühaufschen Kipp-Schaltung. Tech. Phys. of the USSR **2**, 552 (1935).

[143] Le Corbeiller P. Les systemes auto-entretenues et les oscillations de relaxation. Paris, Hermann, 1931.

[144] Le Corbeiller P. La mechanisme de la production des oscillations. Annales des Postes, Telegraphes et Telephones **21**, 697 (1932).

[145] Debaggis L. Contributions of the Theory of Nonlinear Oscillations. Prinston, 1952; русск. перевод: УМН **10**, вып. 4, 66 (1955).

[146] Decaux et Corbeiller P. Sur une systeme electrique autoentretenues, utilisant un tube a neon. Comp. Rend. **193**, 723 (1931).

[147] Dulac H. Sur les cycles limites. Bull. Soc. Math. de France **51** (1923).

[148] Dulac H. Recherche des cycles limites. Comp. Rend. **204**, 23 (1937).

[149] Fotou P. Sur le mouvement d'un systeme soumis a des forces a courte periode. Bull. Soc. Math. de France **56**, 98 (1928).

[150] Friedländer E. Steurungsvorgänge durch «Feldzerfall» und Kippschwingungen in Elektronenröhren, Zts. f. tech. Phys. **7**, 481 (1926).

[151] Friedländer E. Über Stabilitätbedingungen und ihre Abhängigkeit von Steuerorganen und Energie-Speichern. Phys. Zts. **27**, 361 (1926).
[152] Friedländer E. Ueber Kippschwingungen, insbesondere bei Elektronenröhren. Arch. f. Elektrotech. **17**, 1, 103 (1927).
[153] Friedländer E. Einige Berichtungen und Ergänzungen zum Problem der Kippschwingungen. Arch. f. Elektrotech. **20**, 158 (1928).
[154] Frommer M. Singuläre Punkte. Math. Ann. **99** (1928).
[155] Frühauf G. Eine neue Schaltung zur Erzeugung von Schwingungen mit linearem Spannungsverlauf. Arch. f. Elektrotech. **21**, 471 (1929).
[156] Haag J. Sur les oscillations auto-entretenues. Comp. Rend. **199**, 906 (1934).
[157] Haag J. Sur l'etude asymptotiques des oscillations de relaxation. Comp. Rend. **292**, 102 (1936).
[158] Haag J. Etude asymptotique des oscillations de relaxation. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **60** (1943).
[159] Haag J. Examples concrets d'etude asymptotique d'oscillations de relaxation. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **61** (1944).
[160] Den Hartog. Mechanical Vibrations. Mc Graw-Hill Comp., New York and London, 1947.
[161] Heegner K. Ueber Schwingungserzeugung mittels eines Elektronenröhrensystem, welche Selbstinduction nicht erhalten. Zts. f. Hochfrequenztechnik **29**, 151 (1927).
[162] Heegner K. und Watanabe T. Ueber Schwingungerzeugung mittels eines Elektronenröhrensystem, bei welchem die Kapazität von untergeordneter Bedeutung ist. Zts. f. Hochfrequenztechnik **34**, 49 (1929).
[163] Hopf E. Zwei Sätze über den wahrscheinlichen Verlauf der Bewegung dynamischen Systeme. Math. Ann. **103**, Heft 4—5.
[164] Hull. Das Dynatron, ein Vakuumröhre mit der Eigenschaft des negativen elektrischen Widerstandes. Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie **14**, 47, 157 (1919).
[165] Iobst G. Drei Beiträge über Schwingungserzeugung. Telefunken Zeitung, No. 47, 11 (1927).
[166] Ikonnikov E. On the dynamics of symmetrical flight of an aeroplane. Tech. Phys. of the USSR **4**, No. 6, 1 (1937).
[167] Kamke E. Differentialgleichungen Reeler Funktionen. Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft, 1930.
[168] Koenigs. Recherches sur les substitutions uniformes. Bulletin des Sciences mathematiques, 1883.
[169] Koenigs. Recherches sur les equations fuctionelles. Annales de l'Ecole Norm., 1884.
[170] Krüger. Mechanische Schwingungssysteme mit Stossanregung. Annalen der Physik **70**, 291 (1923).
[171] Lanchester F. Aerodonetics, London, 1908.
[172] Leaute H. Sur les oscillations a longues periodes dans les machines

actinnees par des moteurs hydrauliques et sur les moyens de prevenir ces oscillations. Jour. de I'Ecole Polytechnique 55, 1 (1885).

[173] Levinson N. Perturbations of discontinous solutions of nonlinear differential equations. Acta Math. **82**, 71 (1951).

[174] Lienard A. Etude des oscillations entretenues. Revue Generale d'Electricite **23**, 901, 946 (1928).

[175] Lotka. Elements of Physical Biology. Baltimore, 1925.

[176] Mayer A. On the theory of Coupled Vibrations of Two Self-Excited Generators. Tech. Phys. of the USSR **2**, No. 5, 1 (1935).

[177] Mayer A. A Contribution to the Theory of Forced Oscillations in a Generator with Two Degrees of Freedom. Tech. Phys. of the USSR **3**, No. 12, 1 (1936).

[178] Möller H. Quantitative Behandlung der Schwingungen im Röhrengenerator mit Hilfe der Schwingkennlinien. Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie **14**, 326 (1919).

[179] Ollendorf F. und Peters W. Schwingungsstabilität Parallelarbeiten der Synchronmaschinen. Wissenschaftlichen Veröffentlichungen aus dem Simens-Konzern **5** (1926).

[180] Papalexi N. Theorie des Elektronenröhrengenerator. Odessa, 1922.

[181] Poincare H. Oeuvres, Vol. 1. Paris, Gauthier-Villars, 1928.

[182] Poincare H. Sur l'equilibre d'une masse fluide animee d'un mouvement de rotation. Acta Mathematica **7** (1885).

[183] Poincare H. Figures d'equilibre d'une masse fluide. Paris, 1903.

[184] Poincare H. Sur le probleme de trois corps et les equations de la dynamiques. Acta Mathematica **13** (1890).

[185] Poincare H. Les methodes nouvelles de la mecanique celeste. Paris, Gauthier-Villars, 1892—1899.

[186] Van der Pol B. A theory of the amplitude of free and forced triode vibration. Radio Review **1**, 701 (1920).

[187] Van der Pol B. An Oscillation-Hysteresis in a Triode-Generator. Phil. Mag. **43**, 177 (1922).

[188] Van der Pol B. On relaxation oscillation. Phil. Mag. (7) **2**, 978 (1926).

[189] Van der Pol B. Ueber Relaxationschwingungen. Zts. f. Hochfrequenztechnik **28**, 178 (1926); **29**, 114 (1927).

[190] Van der Pol B. Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance. Phil. Mag. (7) **3**, 65 (1927).

[191] Van der Pol B. Oscillations sinusoidales et de relaxation. L'Onde electrique, 1930.

[192] Van der Pol B. et van der Mark M. Le battement du coeur considere comme oscillation de relaxation et un modele electrique de coeur. L'Onde electrique **7**, 365 (1928).

[193] Robb A. On a graphical solution of a class of differential equation

occuring in wireless telegraphy. Phil. Mag. (6) **43**, 700 (1922).
[194] *Rukop H.* Reissdiagramme von Senderröhren, Telefunken Zeitung **6**, Juni 1923, 27; September 1923, 20.
[195] Rukop H. Reissdiagramme von Senderröhren. Zts. f. techn. Physik **5**, 260, 299, 387, 441, 569 (1924).
[196] La Salle J. Relaxation oscillations. Quart. of Appl. Math. **7**, 1 (1949).
[197] Schunk H., Zenneck I. Ueber Schwingungskreise mit Eisenkernspulen. Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie **19**, 170 (1922).
[198] Tricomi F. Integrazione di un'equazione differenziale presantatasi in electrotechnica. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Ser. 11, **2**, 1 (1933).
[199] Volterra V. Leçons sur la Theorie Mathematique de la Lutte pour la Vie. Paris, Gauthier-Villars, 1931.
[200] Wagner K. Der Lichtbogen als Wechselstromerzeuger. Leipzig, Verl. S. *Hirzel*, 1910.
[201] Webb H., Becker G. Theory of Multivibrator. Journ. Appl. Physics **15**, 825 (1944).

第六章　二阶微分方程定性理论基础[1]

§1. 引　言

本章内容是纯数学性质的. 在上一章里所用到的一些概念,将在这里给予严格的论述;同时,上一章中研究二阶动力学系统的例子时,所采用的定理,亦将在这里予以证明[2].

和在第五章中一样,将研究二阶微分方程组(动力学系统):

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \tag{6.1}$$

其中 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 是在整个相平面 x, y 上的解析函数. 此外,还假设,函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 没有非常数的公因子,也就是说,它们不能写作:

$$\left.\begin{aligned} P(x, y) &= P^*(x, y)f(x, y), \\ Q(x, y) &= Q^*(x, y)f(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

其中 $P^*(x, y)$, $Q^*(x, y)$ 及 $f(x, y)$ 均为解析函数,而且 $f(x, y)$ 不恒等于常数. 在这个假设下,二条曲线

$$P(x, y) = 0 \text{ 及 } Q(x, y) = 0$$

在平面上任一有限区域内,只能有有限个交点; 因之,动力学系统 (6.1) 只能有有限个平衡状态[3].

---

1) 本章第1,3,4各节为列昂托维奇-安德罗诺娃所写.

2) 在研究非线性振动时,为了有意识地应用微分方程定性理论,不仅要熟习定性理论的结果,还应该适当地掌握获得这些结果的证明方法及讨论方法. 所以在本章里,除了给出关于相平面上轨线性状的一般理论的结果以外,同时亦给出了某些证明.

3) 应指出,当函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 有异于常数之公因子时,亦即,它们取(6.2)之形式时,那么很明显,曲线 $f(x, y) = 0$ 上之所有点都是平衡状态(此时,这条曲线就称之为动力学系统(6.1)的奇线).

在对动力学系统进行定性研究时，自然会出现的第一个问题是：二阶动力学系统中，相轨线一般可能有那些类型．在研究过的例子(参看第二、三及五章)中，所遇到的相轨线，或是平衡状态，或是闭轨线，或者是当 $t\to+\infty$(或当 $t\to-\infty$)时趋向平衡状态或闭轨线的轨线．可能有的相轨线的类型只限于这几种吗？如果不是，是否可能找到各种相轨线的所有可能类型？结论是，利用两个一般定理：关于微分方程组解的存在性及唯一性的柯西定理和解对初始条件的连续相关定理(参看附录I)，我们可以得到关于各种相轨线可能有的性质的详尽无遗的知识[137,81]．下一节中将研究这个问题．

考虑了单个的相轨线之后，进一步讨论所有相轨线集合的整体．以前几章的例子为依据，可以期望有这样的结果：为了掌握定性的相图，并不需要知道所有轨线的相互分布情况，而仅知道有限个所谓“奇轨线”的相互位置就够了．在一些最简单的情况中，这些奇轨线是：平衡状态、闭轨线及分界线．但是相互位置可以决定定性结构的奇轨线，是否只有这几类呢？这类奇轨线的共有特性是什么？这些问题将在本章第 3 节中讨论．那里给出了“奇”及“非奇”轨线的严格定义，同时亦证明了，奇轨线将相轨线集合分成不同区域——子域，在每个子域里，布满着相同性质的非奇轨线[17,80,145]．

本章之第 4 及第 5 二节将探讨另外一类问题．在第 4 节里，提出某些一般性的条件，这些条件是型如(6.1)之系统所必须满足的条件，如果这个系统反映某一真实物理问题的话．正是对这些系统，当方程右端有各种足够微小的变化时，其相轨线的定性图应当保持不变．有这种性质的系统，我们称之为《粗的》．在第 4 节中给出了系统之粗性的严格数学提法，亦建立了粗系统的必要充分条件，并且还研究了，粗系统可能有那些类型的“奇”轨线、以及有那些类型的充满正常轨线(非奇轨线)的子域[17]．

第 5 节里，在系统(6.1)之右端含有某个参数的假定下，研究了定性图与此参数的依赖关系．如果假定方程右端与某参数有

"一般性"的依赖关系，那么可以认为，除去参数的分枝值(参看第二章§5)以外，当参数取任意值时，系统都是粗的．当参数值穿过分枝值时，出现由一个粗系统到另一个粗系统的过渡，随之定性结构也发生变化．在第5节中，将讨论定性结构是如何改变的，特别是，极限环是如何产生及消失的[10-13]．

§2. 相平面上轨线性状的一般理论．极限轨线及其分类

1. 半轨线和轨线的极限点． 首先引入几个今后要用到的简单概念．

令

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t-t_0;\ x_0,\ y_0) = x(t), \\ y &= \psi(t-t_0;\ x_0,\ y_0) = y(t) \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

表示系统(6.1)之解，L 表示对应于这个解的轨线．轨线的一部分，其上各点对应着时间值 $t \geqslant t_0$，称之为正半轨线，以 L^+ 或 $L^+_{M_0}$ 来表示，其中 M_0 表示对应于 $t = t_0$ 的点．同样地，轨线的另一部分，其上各点对应着时间值 $t \leqslant t_0$，称之为负半轨线，并以 L^- 或 $L^-_{M_0}$ 来表示．

如果在对解(6.3)有定义之所有时间值 $t \geqslant t_0$(或 $t \leqslant t_0$)，相点 $M[x(t),\ y(t)]$ 均位于平面上的有界区域内，那么，对所有满足 $t_0 \leqslant t \leqslant +\infty$ (或 $t_0 \geqslant t > -\infty$)的时间值 t，这个解皆有定义，于是，在此情况中，半轨线 $L^+_{M_0}$(或 $L^-_{M_0}$)上的点，对应着所有时间值 $t \geqslant t_0 (t \leqslant t_0)$．如果对解有定义的一切时间 t($t \geqslant t_0$ 以及 $t \leqslant t_0$)，相点 $M[x(t),\ y(t)]$ 均位于平面上某有界区域之内，那么显然，解对所有时间 t，$-\infty < t < +\infty$，均有定义．

今后我们将仅研究全部位于平面上某有界区域里的半轨线及轨线(亦只是这种轨线有重要意义)，关于这一点，今后就不再处处声明了．有时为了强调研究的是轨线的全部点，我们将称之为整轨线．

对以后最重要的两个概念是：半轨线的极限点和极限轨线．点 M^* 称之为正半轨线 L^+(或负半轨线 L^-)的极限点，如果对任

一任意小的 $\varepsilon>0$ 及任一任意大的 $T>t_0$（任一 $T<t_0$），在 M^* 的 ε 邻域里，都有对应于时间值 $t>T$（或 $t<T$）之半轨线 L^+（或 L^-）的点[1]。

从上述半轨线之极限点的定义[2]，直接可得以下结论：如果 ξ^*,η^* 为半轨线 L^+ 之极限点 M^* 的坐标，则存在着时间 t 的无限增加序列：

$$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n,\ \cdots(t_n\to+\infty,\ 当\ n\to+\infty),$$

使得，

$$\lim_{n\to+\infty}x(t_n)=\xi^*,\quad \lim_{n\to+\infty}y(t_n)=\eta^*. \tag{6.4}$$

很明显，反过来，如果存在着时间的无限增加序列 t_n，使得条件(6.4)满足，那么点 $M(\xi^*,\eta^*)$ 就是半轨线 L^+ 的极限点。同样显然，如果半轨线 L^+ 上某一选定之点 M_0 所决定的半轨线 L^+ 的极限点为 M^*，那么，对 L^+ 上任选之其他的 M_0 点的半轨线 L^+ 的极限点，也是同一 M^* 点。

点 M^* 称之为**整轨线 L 的极限点**，如果它是轨线 L 上取出的正半轨线 L^+ 的极限点，或者是轨线 L 上取出的负半轨线 L^- 的极限点（在前一情况中，常称 M^* 为轨线 L 的 ω 极限点，在后一情况中称为 α 极限点）。

轨线 L 之极限点可以是属于轨线 L 本身的，也可以是不属于它的点。以前面研究过的动力学系统之特殊情况里的半轨线为

---

1) 今后我将不止一次地考虑距某给定点之距离小于某一给定 ε 的所有点；同样地，给定的可以不是点而是轨线、半轨线、等等，或更一般地是某一点集 K。所有这些与给定集合 K 之点距离小于 ε 的点的全部，称之为（为简单起见）该集合的 ε 邻域。因之，给定点之 ε 邻域，是由以给定点为中心，ε 为半径所作之圆的所有内点组成的。

2) 集合论中也采用“极限点”的名词。在集合论中，点 M^* 称之为集合 K 的极限点，如果在 M^* 的任意小邻域内，均含有异于 M^* 之集合 K 的点。应该区分这两个不同概念。例如，平衡状态是它本身的极限点（按本书中的定义），但是从集合论的定义来看，它却不是极限点。因为，这时整个集合 K 是由唯一的一个点（平衡状态）组成的，所以在平衡状态的任何邻域里，都再没有任何异于它的集合 K 的点了。

为了避免混乱，我们将以名词“凝点”来代替集合论意义下的“极限点”。

例，加以说明．每个平衡状态是它本身的唯一极限点（是ω极限点，也是α极限点）．显然，闭轨线上的所有点都是它的ω和α极限点．因为，闭轨线L所对应的运动

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

是周期运动（有某一周期T_0），轨线上每一点$M(\xi\eta)$对应于时间t值的一个无限集合：

$$t_1 = \tau, t_2 = \tau + T_0, \cdots, t_n = \tau + (n-1)T_0, \cdots,$$

以及

$$t_1' = \tau, t_2' = \tau - T_0, \cdots t_n' = \tau - (n-1)T_0, \cdots.$$

因此，根据定义，它既是L的ω极限点又是α极限点（在所研究的情况中，$x(t_n) = \xi$, $y(t_n) = \eta$，对所有n成立）．趋向于平衡状态之轨线（结点及焦点情况中的，以及鞍点情况中的）都有唯一的极限点，它就是平衡状态本身．对于缠绕在某极限环上的螺线形的半轨线L^+（或L^-），很明显，极限环上的每一点都是它的极限点．显然，在后二例子中，极限点不是属于半轨线的点．

后面，我们将只研究正半轨线（正象前面已讲过的那样，它位于平面上的有界区域里），因为，对正半轨线所论的一切，显然对负半轨线也是正确的（应该以$-t$代替t）．

2. 关于半轨线之极限点集合的第一基本定理． 现证明以下定理，利用这个定理，可以引出极限轨线的概念．

极限轨线定理． 如果$M^*(\xi^*, \eta^*)$是半轨线L^+的极限点，那么，通过M^*的轨线L^*上的一切点都是L^+的极限点．

我们总是可以假定，轨线L^*不是平衡状态，因为当M^*是平衡状态时，定理论断的正确性是显然的．假定$M'(\xi', \eta')$是过$M^*(\xi^*, \eta^*)$之轨线L^*上的异于M^*的某点．轨线L^*对应着无限多个运动，这些运动的差异只是起始时间不同，所以很显然，不管选取那一个运动，对应于M^*及M'二点的时间t之差值总是相同的；以τ表示这个时间的差值．取任一$\varepsilon > 0$，并研究M^*点的ε邻域．由微分方程解与起始条件连续相关定理，对任一$\varepsilon > 0$，总可以找到一$\delta > 0$，使得于$t = \tau^*$时过M^*之δ邻域中任何轨

线，于 $t=\tau^*+\tau$ 时通过 M' 的 ε 邻域的某一点．由于 M^* 是 L^+ 的极限点，所以在 L^+ 上存在着无限多个点 $M_n(x_n, y_n)$，这些点对应于无限增加的时间值 t_n，同时它们都位于点 M^* 的 δ 邻域之内．那么，在 L^+ 上同样地存在着无限多个点 $M'_n(x'_n, y'_n)$，它们也对应于无限增加的时间值 $t'_n=t_n+\tau$，并且都位于 M' 的 ε 邻域里．同时，如果 $\tau<0$，总可以使得从充分大的 $n=n_0$ 开始，有 $t'_{n_0}=t_{n_0}+\tau>t_0$，因此，所有点 $M'_n(x'_n, y'_n)(n\geqslant n_0)$ 必定是属于半轨线 L^+ 的点．但是，ε 可以取得任意小，所以 M' 是半轨线 L^+ 的极限点．又因为 M' 点是在 L^* 上任取的，所以 L^* 上的每一点都是 L^+ 的极限点．于是定理得证．

轨线 L^+ 将称之为半轨线 L^+ 的极限轨线，或简称**极限轨线**．很明显，L^* 的所有点，或是区域 G 的点，或是 G 的边界的点，也就是说，L^* 位于平面上的有界区域之内．如果轨线 L 的极限点是它本身的点，那么，L 称为**自极限轨线**．由前所述，可知平衡状态及闭轨线都是自极限的．

在证明关于极限轨线可能有的性质的定理（对我们有极大意义的定理）以前，有必要说明，什么是闭集合(集合论意义下的定义)，并引入连通集合的概念．大家知道，一个点集合(平面上的)称为**闭的**，如果它含有自己的所有凝点．这样，如果闭集合 K 的某点列趋向于某点 N_0 时，那么，这个点 N_0 必然是集合 K 的一个点．闭集合称为**连通的**，如果它不能表示为二个无公共点的闭集合的和．应注意到，如果我们有二个闭集合，它们没有公共点，那么，在这二个集合中各任取一点，它们之间有一定的距离，所有这些距离之中的最小者，必然不等于零．

令 K 表示给定半轨线 L^+ 之**全部**极限点的集合．下述基本定理表达了此集合的性质．

第一基本定理．给定的半轨线 L^+ 的极限点集合是闭的、连通的，并且是由一些整轨线组成的．

证明集合 K 是闭的(集合论意义下的)，即要证明集合 K 的每个凝点都是属于 K 的．假定 M 是集合 K 的凝点．那么，根据凝点定义可知，在 M 的任一邻域内都有 K 的点，即有半轨线 L^+ 的极限点，自然地其中也必有半轨线 L^+ 本身的点，这些点对应着任意大

的时间值 t. 而这正好说明,M是半轨线 L^+ 的极限点.

为了证明集合K是连通的, 用反证法,亦即,假设它是非连通的, 那么, 由于它是闭的, 可以把它表示为两个没有公共点的闭集合 K_1 及 K_2 的和(此时 K_1 和 K_2 含有 L^+ 的一切极限点). K_1 中的任一点与 K_2 中的任一点间的距离中的最小者必不等于零. 令 ρ_0 表示这个最小距离. 取 $\varepsilon < \rho_0/3$,研究集合 K_1 和 K_2 的 ε 邻域,它们亦是没有公共点的. 因为集合 K_1 和 K_2 的点都是半轨线 L^+ 的极限点,那么在它们的 ε 邻域里, 必然有这一半轨线 L^+ 的无限点列,点列的各点对应着无限增加的时间值 t. 但是由于半轨线的连续性,即使在集合 K_1 和 K_2 的 ε 邻域之外, 也有半轨线 L^+ 的点的无限集合,此集合之点对应着无限增加的时间值 t. 因为根据假设,半轨线 L^+ 位于平面上的有界区域里, 这些位于 K_1 和 K_2 的 ε 邻域以外的点,至少应有一个凝点 M_1. 又由于这些点对应着无限增加的时间值 t, 所以 M_1 将是半轨线 L^+ 的一个极限点. 但是点 M_1 不能属于集合 K_1, 也不能属于集合 K_2(因为点 M_1 或在 K_1 及 K_2 的 ε 邻域外面, 或者在极端的情况下处于这些 ε 邻域的边界上), 所以 L^+ 应当有异于集合 K_1 和 K_2 之点的极限点, 这是和假设条件相矛盾的. 这样,定理的第二论断得证.

定理的最后一个论断——半轨线 L^+ 的极限点集合是由一些整轨线组成的——显然可由上一定理直接得到.

因为由于我们所作的假设, 可知对所研究的系统在相平面上任一有界区域里,平衡状态的数目是有限的,所以由证明过的定理,我们知道, 特别是在半轨线 L^+ 上没有异于平衡状态的极限点的情况中,这个半轨线将有一个且仅一个极限点——一个平衡状态. 同样显然,如果K是这个半轨线的所有极限点的集合,那么, 对任意小的 $\varepsilon > 0$, 此半轨线的所有对应于 $t > T$ 的点, 都将位于集合K的 ε 邻域之内,这里T是与 ε 有关的量.

我们已对相平面上的轨线的情况, 证明了第一基本定理, 但是,定理对其他相面(例如,环面)上的相轨线,以及 n 维相空间(有 n 个一阶微分方程组的情况)的轨线,也都是正确的.

3. 辅助定理. 第二基本定理将告诉我们，什么样的轨线可能是极限轨线，但是在证明第二定理之前，必须先讨论几个与所谓的"无切线段"有关的辅助定理. 在相平面上取某一个异于平衡状态的点 $M_0(x_0, y_0)$. 设 L_0 是通过 M_0 的轨线. 通过此点作一直线 D，使它在 M_0 点不和轨线 L_0 相切. 显然，我们总可以在这条直线上截取一个包含点 M_0 的线段，这个线段在其任一点上都不和系统(6.1)之轨线相切. 正象我们知道的，这个线段就称为无切线段.

下面给出一些与无切线段有关的辅助定理，这些定理是今后要用到的；有几个定理是十分明显的，所以未加证明.

I. 直线 D 将整个相平面分为两部分，并且我们能区分直线 D 的二边. 假定在所考虑的轨线 L_0 上给定了运动 $x=\bar{x}(t)$, $y=\bar{y}(t)$[1]，并且 M_0 对应着值 $t=t_0$. 因为在 M_0 点直线 D 不和轨线 L_0 相切，那么，由于方程式(6.1)之右端的连续性，我们总可以指出这样的 $t_1 < t_0$ 及 $t_2 > t_0$，使得满足不等式 $t_1 < t < t_0$ 的时间值 t 所对应的轨线部分，完全在直线 D 的一边，而位于区间 $t_0 < t < t_2$ 内之时间值对应的轨线部分，完全位于直线 D 的另一边.

II. 由于系统(6.1)右端的连续性，当相点沿任一与无切线段相交的轨线运动时，随着时间 t 的增加，相点总会从直线 D 的一边穿过 D 到另一边去，亦就是说，所有轨线都沿着同一方向穿过无切线段.

作为特殊情况，从这里可以得到结论：如果相轨线与无切线段相交二次，那么，它只可能如图 290 那样与无切线段相交，而不可能象图 291 那样.

III. 不管我们取的 $\Delta > 0$ 是多么小，永远存在着点 M_0 的充分小的邻域，使得于 $t = t_0$ 通过该邻域任一点之轨线，于 $t = t_0'$ 时和无切线段相交，而 t_0' 与 t_0 之差小于 Δ, $|t_0 - t_0'| < \Delta$.

IV. 在某一有限时间间隔 $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 中的时间值 t 所对应的

---

1) 在下面几个定理中，我们将假定，如果给了轨线 L_0，那么，也就给定了沿此轨线的运动，即系统(6.1)的对应于此轨线的、具有某一选定的初始时间值 t_0 的解.

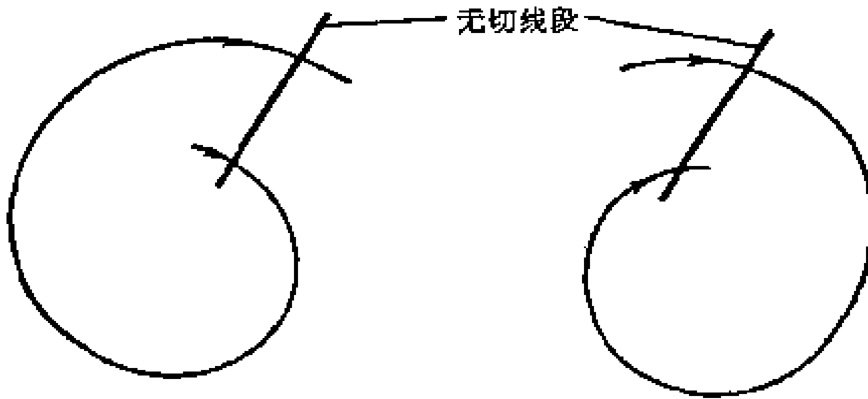


图 290



图 291

轨线部分，最多只能和任一无切线段有有限个交点.

用反证法来证明. 假设轨线 L 和某一无切线段 l 有无限多个交点，而且所有这些交点对应的时间值 t，都位于 α 及 β 之间. 由布查诺-魏叶斯特拉斯（Bolzano-Weierstrass）原理，从对应于这些交点的时间值 t 的无限集合中，我们可以选出一个收敛于 τ（当 $n\to\infty$ 时）的序列 $t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots (\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta)$，与此同时，对应于 t_n 之轨线上的点 $M_n(x_n, y_n)$，趋向于对应于 $t=\tau$ 的点 $M_0(x_0, y_0)$. 这个点 M_0 当然应该位于无切线段 l 上，因为趋向它的点 M_n 都是位于这个线段 l 上的. 但是由辅助定理 I，对于和 τ 相当接近的 t 值，在轨线 L 上不可能再有重新位于无切线段上的点. 最后的论断，和 τ 是 L 及 l 的交点所对应之 t 值的极限，是相矛盾的，亦就是说，和下列事实矛盾：有和 τ 任意接近的、对应于 L 及 l 之交点的值 t 存在. 我们导至了矛盾，这就证明了交点的数目是有限的.

V. 非闭轨线 L_0 和任何无切线段 l 的交点，如果它们对应的时间值 t 是相邻的，那么它们在线段 l 上的位置，也是相邻的. 把轨线 L_0 和线段 l 之交点所对应的时间值 t，按 t 的增加排成序列：$t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots$. 取 L_0 和 l 的二个交点：Q_k 及 Q_{k+1}，它们对应着相邻的时间值 t_k 及 t_{k+1}，将证明，在线段 Q_kQ_{k+1} 上不会再有 L_0 和 l 的交点了. 因为，如果在线段 Q_kQ_{k+1} 上还有一个交点的话，那么它对应的时间，或者是 $t<t_k$，或者是 $t>t_{k+1}$（因

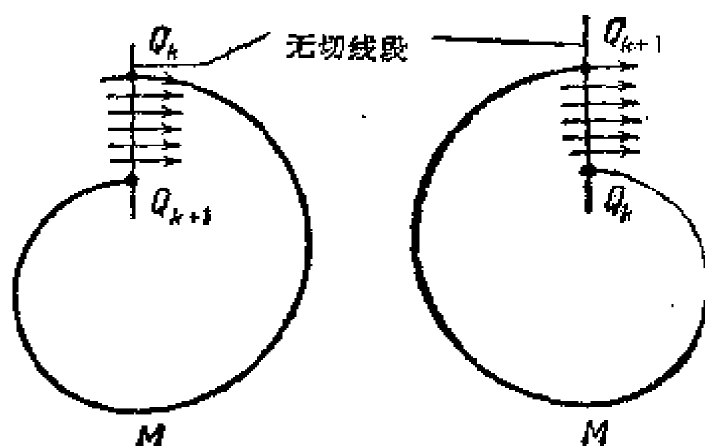


图 292

为在 t_k 与 t_{k+1} 之间，再没有 t_n 的值对应于 L_0 与 l 的交点）．但是当 $t=t_{k+1}$ 时，相点沿轨线运动时，或者将进入 $Q_kMQ_{k+1}Q_k$ 所围的区域，或者将走出它，这个区域的边界是由一段轨线 Q_kMQ_{k+1} 和线段 Q_kQ_{k+1} 组成的（292）．为了使相点能够再一次和线段 Q_kQ_{k+1} 相交，它应该能穿出（或进入）这条闭曲线．但这是不可能的，因为相点既不能和轨线段 Q_kMQ_{k+1} 相交（相平面上的轨线不能相交），亦不可能与线段 Q_kQ_{k+1} 相交，否则它穿过线段 Q_kQ_{k+1} 的方向就要与原来的方向相逆，而按辅助定理 II，这是不可能的．由此可以肯定，在线段 Q_kQ_{k+1} 上，对 $t>t_{k+1}$，不可能再有交点．同样的办法，可证明，在线段 Q_kQ_{k+1} 上，也不会有对应于 $t<t_k$ 值的和 L_0 的交点．

已证明的定理还可以叙述如下：**正半轨线与任一无切线段 l 之交点在 l 上的排列顺序和时间增加的次序一致．**

VI. **闭轨线和无切线段只能有一个交点．**事实上，假定闭轨线 L_0 和无切线段 l 有多于一个的交点，并令 Q_k 及 Q_{k+1} 表示两个相邻的交点，它们对应于时间值 $t=t_k$ 及 $t=t_{k+1}(t_{k+1}>t_k)$，于是线段 Q_kQ_{k+1} 上再没有 L_0 与 l 的交点．很明显，在轨线 L_0 上，有对应于 $t<t_k$ 的点，它们位于闭曲线 $Q_kMQ_{k+1}Q_k$ 的外部（或内部），而这条闭曲线是由轨线 L_0 的一段 Q_kMQ_{k+1} 和线段 Q_kQ_{k+1} 组成的；同样也有对应于时间值 $t>t_{k+1}$ 的点，它们位于上述闭曲线的内部（或外部）（图 292）．因为轨线 L_0 是闭的，所以当相点沿弧

$Q_k M Q_{k+1}$ 运动并进入 $Q_k M Q_{k+1} Q_k$（或保持在其外面）时，应该再从里面出来（或再进入），才能沿一个闭轨线 L_0 外部（或内部）绕行．但这显然是不可能的，因为所有轨线穿截 $Q_k Q_{k+1}$ 的方向是相同的，而相点也不可能和轨线的弧 $Q_k M Q_{k+1}$ 相交．我们导出的矛盾证明了：闭轨线 L_0 与无切线段 l 的所有交点必定重合成一个点．

VII．研究一非闭正半轨线 L^+，其极限轨线为 L^*（不是平衡状态）．如果通过轨线 L^* 上之某点 M_0 作一无切线段，那么，在其上将有一属于轨线 L^+ 的无限点列（按时间 t 之增加次序排列着），趋向于点 M_0．这个定理是第一基本定理及辅助定理 III 及 V 的推论．

VIII．令 $x = \bar{x}(t)$，$y = \bar{y}(t)$ 为沿轨线 L 的运动，它不是平衡状态，而且此轨线上的 M_0 点对应于时间值 $t = t_0$，M_1 对应于值 $t = t_1$．令 l 表示点 M_1 处的无切线段．于是，不管 ε 和 Δ（$\varepsilon > 0$，$\Delta > 0$）取得多小，总可以指出一 $\delta = \delta(\varepsilon, \Delta)$，使得于 $t = t_0$ 时离开 M_0 的距离小于 δ 的相点，在某一满足不等式 $|t_1 - t_1'| < \Delta$ 的时刻 $t = t_1'$，必然与无切线段 l 相交，并且在由 $t = t_0$ 到 $t = t_1'$ 的时间间隔内，相点离开轨线 L 上的点（对应的时间值 t 界于 t_0 及 t_1 之间）的距离小于 ε．

这个定理（对 $t_1 > t_0$ 及 $t_1 < t_0$ 都成立）是微分方程解对初始条件连续相关定理及辅助定理 III 的推论．

4. 关于半轨线极限点集合的第二基本定理． 如果半轨线 L^+ 非闭，且至少有一个异于平衡状态的极限轨线，那么它自己不可能是极限轨线．

令 L^* 表示半轨线 L^+ 的、非平衡状态的极限轨线．将用反证法来证明以上定理．假定半轨线 L^+ 本身又是某一半轨线 L_1^+ 的极限轨线，并证明这将导至矛盾．

在轨线 L^* 上任取一点 P，并过它作一无切线段 l．因为 P 是半轨线 L^+ 的极限点，那么在 l 上，将有属于 L^+ 的无限点集，并按时间 t 的增加顺序排列着（辅助定理 VII）．

取三个依次与 l 相交的 L^+ 的点：P_1，P_2，P_3；因为我们假设了

轨线 L^+ 本身又是半轨线 L_1^+ 的极限轨线，所以点 P_2 自然亦是半轨线 L_1^+ 的极限点．于是，又一次由于辅助定理 VII，或者在线段 P_1P_2 上或者在线段 P_2P_3 上，将有趋向于 P_2 的属于半轨线 L_1^+ 的点列．可以证明这是不可能的，因为半轨线 L_1^+ 只能和线段 P_1P_2 及 P_2P_3 的每一个相交一次．

实际上，令 Q 表示半轨线 L_1^+ 和线段 P_1P_2 的一个交点．在时间 $t=\tau$ 时位于 Q 的相点，当 $t>\tau$ 时或者进入闭曲线 $P_1MP_2P_1$ 所围成的区域，或者从里面走出来，而闭曲线 $P_1MP_2P_1$ 是由半轨线 L^+ 的弧段 P_1MP_2 和无切线段 P_1P_2 组成的．例如，假定相点当 $t>\tau$ 时进入上述区域，那么它就不会再从其中出来，因为它不能经过弧 P_1MP_2 穿出(轨线不能相交)，亦不能从线段 P_1P_2 穿出(所有轨线只能按同一的方向和无切线段 P_1P_2 相交)．因而，在 $t>\tau$ 时，相点已经不可能再与线段 P_1P_2 相交．

对于相点当 $t>\tau$ 时从闭曲线 $P_1MP_2P_1$ 所围区域穿出来的情况，亦可以进行完全同样的讨论；很明显，类似的讨论对线段 P_2P_3 来说也是正确的．这样，半轨线 L^+ 是半轨线 L_1^+ 的极限轨线的假定，就引出了矛盾，于是定理得证．

作为特殊情况，由此定理可以推出：非闭轨线不可能是自极限的，因为，否则的话，一方面将有一非平衡状态的极限轨线——它本身，另一方面它自己也成了一个极限轨线．

这个定理反映了平面上相轨线的特点，对于其他相空间的轨线来说，可能是不正确的．例如，对于环面上的轨线，定理就不成立，此外，对于三个方程之系统(类似于系统(6.1))的情况，当相空间是三维欧几里得空间时，亦是如此．

从第二基本定理可以得到结论，除了下述三种以外，不可能再有其他类型的极限轨线，这三种类型的极限轨线是：1)平衡状态，2)闭轨线，3)仅仅以平衡状态为极限点的非闭轨线，因为本定理已断定，不管什么非闭极限轨线，它自己已经不能有异于平衡状态的极限点了．下面对第二基本定理，再附加二个定理，这二个定理使我们能够肯定，极限轨线的上述类型的那些组合，可以构成半轨线

的一切极限点的集合.

定理 III. 如果半轨线 L^+ 有闭极限轨线 L_0, 那么, L_0 是 L^+ 的唯一极限轨线.

如果半轨线 L^+ 本身是闭的，那么它的所有点都是它自己的极限点，并且显然，它不可能再有任何其他极限点. 在这种情况中,定理是自明的.

现在假定 L^+ 不是闭的. 首先证明,我们不管把 $\varepsilon > 0$ 取得多么小,从某一个时间值 $t = t_1$ (与 ε 有关)起，半轨线 L^+ 的所有点都将位于轨线 L_0 的 ε 邻域的内部. 假定半轨线 L^+ 对应着运动 $x = x(t)$, $y = y(t)$,而轨线 L_0 对应着运动 $x=\bar{x}(t)$, $y = \bar{y}(t)$. 因为 L_0 是闭的,所以 $\bar{x}(t)$ 及 $\bar{y}(t)$ 都是周期函数,即存在着这样的 h (沿 L_0 之运动的周期),使得

$$\bar{x}(t + h) \equiv \bar{x}(t), \ \bar{y}(t + h) \equiv \bar{y}(t).$$

在轨线 L_0 上任取一点 P,和它对应的时间值为 $t = \tau$. 这一点还对应着值 $\tau + h$, $\tau + 2h$, $\cdots$. 提醒一下，由于方程式组(6.1)的自治性,我们总是可以这样选择沿 L_0 的运动，使得对应于 P 点的 τ 的数值,等于任意选择的数.

通过 P 点作一无切线段 l,使它完全位于所研究的 ε 邻域之内(ε 可取得任意小). 由辅助定理 VII, 在无切线段上，存在着属于半轨线 L^+ 的无限点列: $P_1, P_2, \cdots P_n, \cdots$, 趋向于点 P(因为 P 是半轨线 L^+ 的极限点). 同时，点 $P_1, P_2, \cdots$ 在线段 l 上的位置的次序,对应着时间值 t 的增加的顺序:

$$t_1, t_2, \cdots t_n, \cdots (t_n \to \infty \ \text{当} \ n \to \infty).$$

根据辅助定理 VIII, 取 $\Delta < \frac{h}{3}(\Delta > 0)$, 我们总可以绕 P 点作半径 $\delta = \delta(\varepsilon, \Delta)$ 的充分小的圆,使得当 $t = \tau$ 时通过圆内任一点的轨线,在时间从 $t = \tau$ 到 $t = T$ 之内,不越出 L_0 的 ε 邻域,而当 $t = T$ 时与线段 l 相交，这里，T 与 $\tau + h$ 的差可以任意小 ($|T - (\tau + h)| < \Delta$).

于半径为 δ 之圆内,在线段 l 上取对应于 $t = t_{k_1}$ 之点 P_{k_1}. 在

本情况中将令 $\tau = t_{k_1}$. 那么，由上所述，T 值将等于 t_{k_2}，同时由于Δ的选择$\left(\Delta < \frac{h}{3}\right)$，$t_{k_2}$ 一定大于 $t_{k_1}(t_{k_2} > t_{k_1})$.

对应于由 t_{k_1} 到 t_{k_2} 的时间间隔的半轨线 L^+ 部分，完全位于 L_0 的 ε 邻域之内. 显然，点 P_{k_2}（对应于 t_{k_2}）在线段 l 上离点 P 较点 P_{k_1} 为近，因而它位于 P 点的 δ 邻域里. 上述对点 P_{k_1} 的讨论对点 P_{k_2} 同样适用，也就是说，存在着对应于时间值 $t = t_{k_3} > t_{k_2}$ 的点 P_{k_3}，它亦位于无切线段 l 之上，同时对应于 t_{k_2} 及 t_{k_3} 间之时间值 t 的半轨线 L^+ 的那一部分，亦完全位于轨线 L_0 的 ε 邻域之内.

继续地这样讨论下去，可看出，所有对应于大于 t_{k_1} 的时间值 t 的半轨线 L^+ 的部分，都位于 L_0 的 ε 邻域之内.

现在证明闭轨线 L_0 包含着半轨线 L^+ 的一切极限点. 采用反证法来进行. 假设半轨线 L^+ 有一极限点 Q 不在闭轨线之上，因而它离开 L_0 有某一距离 $d > 0$. 在点 Q 的任意小的邻域里，应该有对应着任意大时间值 t 的半轨线 L^+ 的点.

但是，从另一方面，由于以上证明可知，不管 $\varepsilon > 0$ 我们取得多小，总可以找到一个 $t = \tau_0$，使得所有对应于 $t > \tau_0$ 的半轨线 L^+ 的点，都将位于轨线 L_0 的 ε 邻域之内.

我们总是可以取 ε 使之小于 $d/2$，以致点 Q 位于 L_0 的 ε 邻域以外，因而，就不会找到 L^+ 的点，它们离开点 Q 任意近而对应的时间值 t 任意地大. 这样我们导至了矛盾，因而定理得证.

定理 IV. 如果半轨线的极限点里没有平衡状态，那么，此半轨线或是闭的，或是非闭的但却有闭的极限轨线.

事实上，假定 L^+ 非闭. 由定理 III 所得的结论，L^+ 的极限轨线可能是闭轨线（那么根据定理 III，它必是 L^+ 的唯一的极限轨线），或者是趋向于平衡状态的非闭轨线. 但是很明显，第二种情况是不可能的，因为 L^+ 之极限轨线所趋近的平衡状态自然也将同样是 L^+ 的极限点，这就和假设矛盾. 这样，定理得证.

本定理的推论，是下述很常用到的一个定理.

定理 V. 令 G 表示闭双连通区域（环形区域），它不包含平衡状

态，且当 t 增加时(当 t 减少时)，没有轨线从中跑出．那么，区域 G 中至少存在着一个稳定的(不稳定的)极限环．

因为任意一个当 t 增加(t 减少)时进入区域 G 的非闭轨线，它的极限点集合，全部位于这个区域之内，所以它也就不包含平衡状态．那么，由定理 IV 这个极限点集合是一个闭轨线(极限环)．

这样，在区域 G 中至少有一个极限环．但是其中可以有多于一个的极限环．如果假设这些极限环中，没有“半稳定的”(半稳定极限环只能出现在“非粗”系统中，参看本章 § 4)，那么很明显，在 t 增加时所有轨线都进入区域 G 的情况中，至少有一个稳定极限环，而在 t 增加时所有轨线都走出区域 G 的情况中，至少有一个不稳定极限环．

当区域 G 中有半稳定极限环时，为了证明定理是正确的，需要较复杂的讨论，这里从略．但是在任何情况中，只要存在着二个无切环围成的区域，且当 t 增加时(或减少时)，所有轨线都进入其内部，我们都将应用这个定理[1]．

5. 半轨线及其极限点集合的可能类型． 对于完全位于平面上之有界区域内的半轨线的极限点集合，根据已证明的定理，就可以确定其性质．此集合可以是以下类型之一：I. 一个平衡状态．II. 一个闭轨线． III. 一些平衡状态和一些当 $t\to+\infty$ 时以及 $t\to-\infty$ 时均趋向这些平衡状态之轨线所组成的集合．

不难看出，第 III 种类型之极限点集合里的平衡状态，不可能是焦点或结点，因为任一轨线，只要它一进入这种平衡状态的充分小邻域之内，就会趋向平衡状态而不可能有任何其他极限点了．因而，属于第 III 种极限点集合中的平衡状态，当它是简单平衡状态时，一定是鞍点，而集合中的异于平衡状态的轨线一定是鞍点的分界线．知道了极限点集合的可能类型后，我们就可以立刻指出，

---

1) 对动力学系统的右端作一些更一般的假设条件，这个定理也是正确的，例如，对第八及十章中的分段线性系统的特殊情况，本定理也正确． 在这一情况里，只须将证明的过程作一些明显的改变就可以了，这里也从略，但是在那两章里，我们将应用这个定理．

那些类型的半轨线是可能的. 很明显，我们可得到以下半轨线的可能类型：1)平衡状态；2)闭半轨线；3)趋向于平衡状态之半轨线；4)趋向于闭轨线的半轨线；5)趋向于第 III 类极限点集合的半轨线[1].

上述各种半轨线、除了最后一种以外,已不止一次地在前面研究过的例子中遇到过. 最后一种半轨线的最简单例子，如图 293 所示,其中半轨线 L^+ 趋向的极限集合，是由从鞍点出发又回到鞍点的分界线组成的. 较复杂的情况如图 294 所示,其中半轨线 L^+(外面的一条)所趋向的极限集合包含：两个平衡状态和四条分界线，这四条分界线当 $t \to +\infty$ 及 $t \to -\infty$ 都趋向这两个平衡状态.

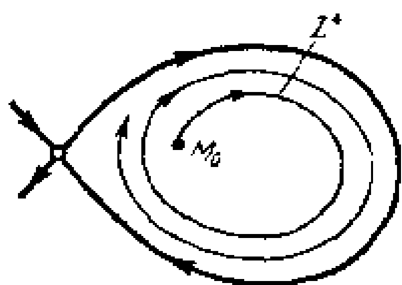


图 293

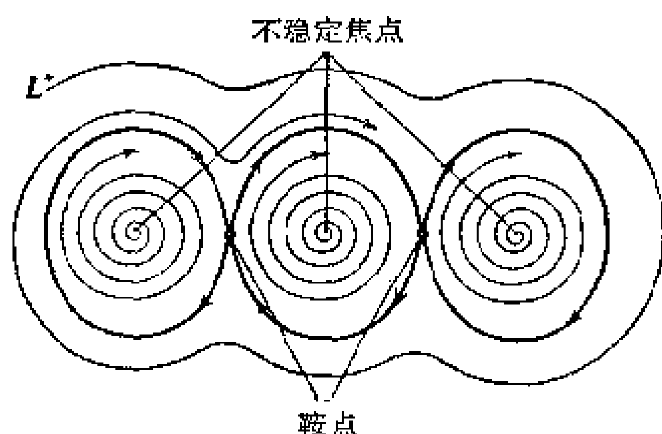


图 294

§3. 相平面的轨线划分的定性图. 奇轨线

1. 拓扑不变性及轨线划分的拓扑结构. 进一步讨论动力学系统之定性研究的基本问题——相平面的轨线划分的定性图的建立. 从前章所举特殊例子的研究,提供我们这样一个想法，为了知道定性图,并不需要知道所有轨线在平面上的性状,只要知道某些奇轨线就够了. 在研究过的例子中,这种奇轨线只有有限几条,并

1）应指出,如果系统的相面不是平面时,上述轨线的所有可能类型并不完全.

且它们把整个相平面划分成若干区，使得各区里之轨线的性状都是相同的．这些例子中的奇轨线为：平衡状态，极限环，以及趋近于鞍点的轨线——鞍点的分界线．如果知道了这些奇轨线的相互位置分布，此外还知道了那些平衡状态和极限环是稳定的，那些是不稳定的，那么我们就得到了整个轨线的定性图象．自然地会产生这样的问题：是否总是存在着有限个这样的奇轨线，知道它们之后，我们就能够建立起轨线的定性图象？在一般情况中，如何表征这些奇轨线，在上面的例子中所见到的奇轨线，是否已完全包括了这种轨线的所有可能类型？本节将阐明这些问题[17,30]．

但是，首先应该给一些常用到的概念以严格的定义，例如相轨线的定性图象和给定动力学系统的定性研究等．为此我们必须先重复一下拓扑映射(或变换)的概念．大家知道，平面对其自身(或一平面对另一平面)的相互单值及相互连续的映射称之为拓扑映射，即这样的映射，它使每一点 $M(x, y)$ 对应于同一平面（或另一平面）的一个且仅一个点 $M'(x', y')$*，任两个不同点 $M_1(x_1, y_1)$ 及 $M_2(x_2, y_2)$ 对应于两个不同的点 $M_1'(x_1', y_1')$ 和 $M_2'(x_2', y_2')$，此外任两个充分相近的点 M_1 及 M_2，对应于两个充分相近的点 M_1' 及 M_2'．显然，拓扑映射的逆映射，亦是拓扑的，即相互单值、相互连续的．任一平面对其自身的(或平面对另一平面的)拓扑映射，可以用两个单值连续函数

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y)$$

来给定，从此二式可以单值地解出 x 及 y：

$$x = \varphi_1(x', y'), \quad y = \psi_1(x', y'),$$

其中 φ_1 及 ψ_1 亦是连续函数[1]．显然，平面上的曲线、区域及一般的集合的形状，在拓扑映射下，可能变化很大，但是曲线、区域等的某些性质却保持不变．例如，在平面上给定一条闭曲线(例如，圆)，则经过任一平面对其自身的拓扑映射所得到的曲线，必定仍然是闭的，虽然其形状可以和原曲线有十分大的差异（圆之拓扑映射曲线称之为简单闭曲线）．直线线段经拓扑映射后所对应的已经不是直线线段，而是某一弧段，但此弧段必定是一不自交的弧段（线段经拓扑映射得到的弧段称之为简单弧段）．对一切可能拓扑映射

---

* 原书为(x, y)——译者注．

1）平面对其自身的拓扑映射，可以给予如下的一个清晰的说明．设想平面是由橡皮作成的，并用各种方式使它变形，亦即，在不同地方使它拉伸或压缩，但不能拉断或折叠．可以说，每一个拓扑映射都对应于所研究之橡皮平面的一种变形，但变形时应保证上述条件得到满足．

均保持不变的性质，称之曰拓扑不变性质或拓扑特性.

现假定给出了动力学系统(6.1). 它决定着某轨线族，或用另一术语，相平面的某一轨线划分. 将研究平面对其自身的所有可能的拓扑映射，并且观察此时系统(6.1)决定的轨线划分将如何地变化. 显然，轨线的形状将发生很大的变化，但是此划分的某些特点将保持不变，或者说是拓扑不变的. 例如，闭轨线和平衡状态等的数目以及相对位置是不变的；如果系统(6.1)之平衡状态为鞍点，则经过任一拓扑映射，其性质仍不改变.

从另一方面，不难看出，焦点和结点拓扑全同，亦即，总可以找到这样的平面对自身的拓扑变换，使得结点变成焦点，反之亦然，几何上这一事实是完全清楚的.

现在可以进而给出相轨线定性图象和轨线划分之拓扑结构二概念的严格定义. 二个形如(6.1)之系统所给出的相平面之轨线划分的拓扑结构称为全同的，如果存在着平面其自身的拓扑(相互单值且连续)映射，使得一个系统的轨线映射为另一系统的轨线(不仅正映射使轨线映射为轨线，逆映射也然). 此二结构全同性的定义亦是轨线划分之拓扑结构本身的一个间接定义. 可以说，轨线划分的拓扑结构(或者轨线的定性图象，亦是一样)应理解为此划分的那些性质，它们对所有可能的平面对自身的拓扑映射是不变的. 这些性质的例子前已举出过.

如果建立了动力学系统之轨线划分的拓扑结构，我们说，对此系统已进行了完全的定性研究. 正象前已指出过的，根据研究过的特殊例子，可以设想，为了建立轨线划分的拓扑结构，不需要知道所有轨线的性状，而只要知道某些奇轨线就够了.

2. 轨道稳定(非奇)轨线和轨道不稳定(奇)轨线. 现在来研究奇轨线与非奇轨线，在指出明显几何事实同时，将给出严格的数学论述. 同时，在今后的所有讨论中，都将假定，我们是在平面的有界区域 G 内研究系统(6.1)的. 将研究完全位于 G 内之轨线 L*.

---

* 应为"位于 G 中的轨线 L 的部分"——译者注.

从轨线 L 上取出任一正半轨线 L_M^+，它是从点 M 开始的，并研究其 ε 邻域. 此时应注意，半轨线 L_M^+ 的 ε 邻域，必定包含着此半轨线的极限集合的 ε 邻域*.

我们说，正半轨线 L_M^+ 是轨道稳定的，如果对任给的 $\varepsilon>0$，可以指出这样的 $\delta>0$，使得对任一轨线 L'，此轨线于 $t=t_0$ 时通过 M 之 δ 邻域内的任一点 M'，半轨线 $L_{M'}^{+}$** （其上各点对应于值 $t>t_0$）完全位于半轨线 L_M^+ 的 ε 邻域内部.

轨线 L 称为当 $t\to+\infty$ 时轨道稳定的，或 ω 轨道稳定的，如果从其上任取之正半轨线都是轨道稳定的. 可以证明（几何上这是显然的），如果轨线 L 只要有一条正半轨线是轨道稳定的，那么，从此轨线 L 上任取的另一正半轨线亦将是轨道稳定的，亦即轨线 L 是当 $t\to+\infty$ 时轨道稳定的[1].

不是当 $t\to+\infty$ 时轨道稳定的轨线或正半轨线，称之为当 $t\to+\infty$ 时轨道不稳定的，或者 ω 轨道不稳定的. 显然，如果轨线 L 是当 $t\to+\infty$ 时轨道不稳定的，且 M 为其上任一点，则总可以指出这样的 $\varepsilon_0>0$，使得对于任意小的 $\delta>0$，可找到轨线 L'，它于 $t=t_0$ 时通过 M 之 δ 邻域内的一点，并且在某一时刻 $t>t_0$，必定穿出半轨线 L_M^+*** 的 ε_0 邻域. 应注意，轨道不稳定之轨线的存在，和解与初始条件连续相关定理毫无矛盾，因为在此定理中，仅研究值 t 的有限间隔.

所有上述对正半轨线所讲的，作一些明显的改变，就可以对负半轨线作同样的讨论. 于是，我们又有当 $t\to-\infty$ 时轨道稳定或 α 轨道稳定的轨线，以及当 $t\to-\infty$ 时轨道不稳定或 α 轨道不稳定的轨线. 不仅当 $t\to+\infty$ 时轨道稳定，且当 $t\to-\infty$ 时亦轨道稳定的轨线 L，我们称之为轨道稳定的或非奇的轨线. 任一不是轨道稳定的轨线，称之为轨道不稳定的或奇轨线. 这样，奇轨线

---

* ε 邻域是泛指的，在谈到两个 ε 邻域时，两个 ε 不一定相等——译者注.

** 原书为 L_M^+——译者注.

1) 这个几何上完全显然的事实的严格数学证明并不是没有意义的.

*** 原书为 L——译者注.

必然至少一"面"是轨道不稳定的，亦就是说，它可能是当 $t\to+\infty$ 时轨道不稳定的，或者当 $t\to-\infty$ 时轨道不稳定的，或者同时是当 $t\to+\infty$ 及 $t\to-\infty$ 时轨道不稳定的.

此时应提醒注意(参看第二章 § 7 的例子)，当 $t\to+\infty$ 时轨道稳定的轨线，可以不是当 $t\to+\infty$ 时按列普诺夫稳定的.

这样引入的半轨线与轨线之轨道稳定性及不稳定性的概念，并不表征半轨线或轨线本身的性状，而表征着它们相对于邻近的半轨线或轨线的性状．以从前研究过的系统中遇到的轨线为例，对这些概念加以解释．显然，趋近于焦点型及结点型平衡状态的任何半轨线是轨道稳定的[1]．所有趋近于极限环的半轨线亦是轨道稳定的．轨道稳定的，即非奇的轨线显然还有：当 $t\to+\infty$ 及 $t\to-\infty$ 时都趋近于结点或焦点的轨线，当 $t\to+\infty(t\to-\infty)$ 时趋向结点而当 $t\to-\infty(t\to+\infty)$ 时趋向极限环的轨线，以及当 $t\to+\infty$ 及 $t\to-\infty$ 时都趋近于极限环的轨线(所有这些轨线都是当 $t\to+\infty$ 时和当 $t\to-\infty$ 时轨道稳定的).

从这些例子不难看出，当轨线是非奇的(轨道稳定的)时候，所有和它邻近的轨线的走向，都和它十分相象．但对于前面已归入"奇"轨线的那些轨线，这种情况就完全不存在了．先讨论平衡状态．结点及焦点或是当 $t\to+\infty$ 或是当 $t\to-\infty$ 时轨道稳定的，但永远不可能是当 $t\to+\infty$ 及 $t\to-\infty$ 时都轨道稳定；鞍点是当

---

1) 虽然几何上这一事实是十分明显的，但是我们仍然作如下讨论，利用这些讨论就可以证明这一事实．正象我们已经见到的，在平衡状态 O 是焦点或结点的情况中，存在着无切椭圆族，层层相套且向点 O 收缩．对任一 $\varepsilon>0$，总可以指出一无切椭圆 C_ε，它完全位于点 O 的 ε 邻域内．但任一趋近 O 点之半轨线的 ε 邻域必定包含着其极限点 O 的 ε 邻域，所以此椭圆 C_ε 以内的点，亦属于任一趋近 O 点之半轨线的 ε 邻域．令 L_M^+ 为一个这样的半轨线．显然，在某一瞬时 t，它到达这个椭圆 C_ε，进入并再也不会出来．但是由于微分方程的解和初始条件的连续相关性，总可以指出 M 点的这样的 δ 邻域，使得当 $t=t_0$ 时通过此 δ 邻域之点的所有轨线，经过有限时间间隔到达无切椭圆 C_ε，且在这以前不会越出半轨线 L_M^+ 的 ε 邻域（更严格地说，L_M^+ 到达无切椭圆 C_ε 前的那一段的 ε 邻域)；这些轨线进入椭圆 C_ε 后，显然就不会再从那里出来，因之亦就不会从 L_M^+ 的 ε 邻域中出来．因为以上所述对任一 $\varepsilon>0$ 都是正确的，于是，从此可得 L_M^+ 具有轨道稳定性的结论.

$t\to+\infty$ 及 $t\to-\infty$ 时轨道不稳定的. 稳定及不稳定极限环,就其轨道稳定性而言,和焦点及结点一样,亦即,可以只是当 $t\to+\infty$ 或只是当 $t\to-\infty$ 时轨道稳定的. 趋近于鞍点的半轨线(鞍点分界线)是轨道不稳定的. 因为如果 L_M^+ 是趋近于鞍点的半轨线, 则永远可以指出这样的 $\varepsilon>0$,使得对任意 $\delta>0$, 异于 L_M^+ 本身的、通过点M的 δ 邻域之点的半轨线, 当 t 增加时,必定从 L_M^+ 的 ε 邻域中穿出.

3. 奇轨线和非奇轨线的可能类型. 现在证明关于奇轨线以及相平面轨线划分定性图的几个基本的一般定理.

定理 I. 任一轨线,当它是某一异于它本身之轨线的极限轨线时,是奇轨线,即轨道不稳定的轨线.

假定 L^* 是这样的轨线, 它至少是某一个异于它本身的轨线 L 的极限轨线(为了肯定起见,假设当 $t\to+\infty$ 时 L 趋向于 L^*). 如果 L^* 是平衡状态,那么, 在 L 上一定可以找到点 M, 它到平衡状态的距离 d 不等于零. 如果 L^* 不是平衡状态, 则在 L 上亦一定可以找到一些点(其中的一个以 M 表示之),它们到轨线 L^*上的点之距离不等于零.

事实上,只有在轨线 L 是 L^* 的极限轨线的情况中, 这种点才有可能不存在. 但这种情况是不可能的, 因为 L 有异于平衡状态的极限点——L^* 上的点, 而由第二基本定理, 可知 L 不可能是任一轨线的极限轨线,特别地不会是 L^*的极限轨线. 现在取 $\varepsilon_0<d$. 那么,点M将位于 L^* 的 ε_0 邻域之外. 但 L^* 是 L 的极限轨线, 所以对任意 $\delta>0$, 在 L^* 的任一点的 δ 邻域里都可以找到 L 的点, 这些点(对于在 L 上某一选定之运动)对应着任意大的时间值 t,特别是, 可以大于M点所对应的时间. 而由于轨线 L 的点M根据 ε_0 的选择是在 L^* 的 ε_0 邻域外面的,很显然,由此可推出: 在任何情况下, L^* 都是当 $t\to-\infty$ 时轨道不稳定的 (α 轨道不稳定). 于是,定理证讫.

现在研究这样的半轨线, 其极限点中有异于平衡状态者. 令 L^+ 是这样的半轨线,而 K 为其极限集合. 极限集合 K 的 ε 邻域是

L^+ 的 ε 邻域的一部分．此时，对任一 $\varepsilon > 0$，可指出这样的 $T(\varepsilon)$，使得对应于 $t > T$ 的 L^+ 的点，完全位于K之 ε 邻域内．令 P 为集合K之任一异于平衡状态的点，l 为通过此点的无切线段．正象我们知道的那样（参看辅助定理 VII），在线段 l 上存在着半轨线的点列 $P_1P_2\cdots P_n\cdots$*，它们对应着无限增加的时间值 t，并趋近于 P 点．将以 C_i 表示闭曲线，它是由半轨线 L^+ 的弧 P_iP_{i+1} 和线段 l 上的一段 P_iP_{i+1} 组成的（这种闭曲线在辅助定理V中曾用到过）．

显然从某一充分大的 i 开始，所有闭曲线 C_i 都整个位于极限集合K的 ε 邻域之内．同时极限集合K或者位于所有这些闭曲线的外面，或者所有这些闭曲线的里面（图 295 及 296）．研究区域

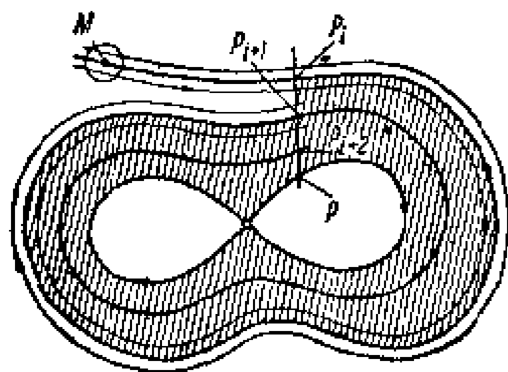


图 295

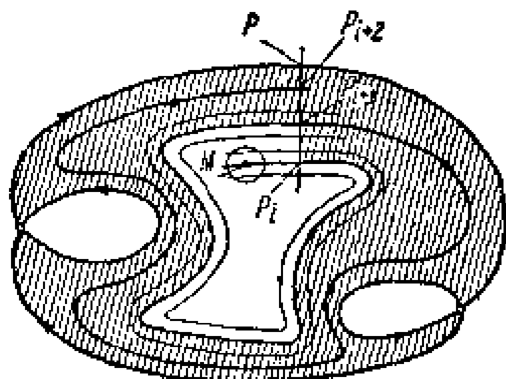


图 296

G_i，其边界为闭曲线 C_i 和极限集合 K（参看图 295 及 296 上之影线区）．对任意的 $\varepsilon > 0$，从某一充分大的 i 开始，所有区域 G_i 均将全部位于K之 ε 邻域的内部[1]．显然无切线段** l 上的 $P_{i+1}P$ 段的所有异于 P_{i+1} 和 P 的点，都位于区域 G_i 内．

作了这些说明后，证明下列定理：

定理 II. 任一非闭半轨线 L^+，如果其极限点中有异于平衡状态的极限点，必定是轨道稳定的．

---

* 原书为"$P_1P_2\cdots P_n$"——译者注．

1) 这一事实几何上是明显的，可是其严格的数学证明虽简单，但却需要十分细心．

** 原书为"弧 l"，为了前后一致，改为无切线段——译者注．

为了证明定理，只要证明下面一点就够了，那就是，对任一 $\varepsilon>0$，通过半轨线 L^+ 上任一点的充分小邻域内之点的所有轨线，随着 t 的增加最终必将进入极限集合 K 的 ε 邻域，且以后不会再出来。按前所述，对任意的 $\varepsilon>0$，总可指出这样的整数 I（与 ε 有关），使得对任一 $i>I$，以曲线 C_i 以及集合 K 为边界的区域 G_i，全部都位于 K 的 ε 邻域里。

令 M 为半轨线 L^+ 上的任一点，$i>I$ 为任一确定的整数。由辅助定理 VIII，总可以指出 M 的一个任意小的邻域，使得于 $t=t_0$ 时通过此邻域内之点的任一轨线，于某时刻 $t=T$ 和无切线段* l 相交，此交点是和 P_{i+1} 任意相近的点，且在任何情况中此点均位于点 P_i 及 P_{i+2} 之间（图 295 及 296）。显然对所有 $t>T$ 的值，这条轨线将位于区域 G_i 之内，并且不能再从中穿出。

事实上，此轨线不能和曲线 C_i 相交（参看辅助定理 V），亦不可能和由整轨线组成的（由 §2 之定理 II）极限集合 K 相交。于是定理证完。

特别地，从此定理可推得：任一趋近于极限环的半轨线是轨道稳定的。

现在来阐明，闭轨线何时是轨道稳定的（亦即，非奇的），何时是轨道不稳定的（亦即，奇的）。

为此首先指出，对我们所研究的动力学系统，即有解析的右端的系统，下节将证明，可能出现以下二种情况：

1）或者，所有异于给定闭轨线 L 的、且通过 L 之充分小邻域内的轨线非闭；

2）或者，所有通过一切充分接近 L 的点的轨线全是闭的[1]。

很明显，当轨线 L 是极限环时便得到第一种情况，而在保守系

---

* 原书为“弧 l”——译者注。

1）当然逻辑上还有一个可能性，在 L 的充分小邻域内既有闭的亦有非闭的轨线。例如，有一串闭轨线 L_i，一个套一个且收缩于给定的闭轨线 L，而在 L_i 之间可能有非闭的轨线。但是当动力学系统右端是解析函数时，这种情况是不可能的。

统中则有第二种情况.

定理 III. 闭轨线 L_0，如果它不是任一非闭轨线的极限轨线，必定是轨道稳定的.

为证明此定理首先证明，所有通过与轨线 L_0 充分邻近之点的轨线是闭的. 因为，如果和 L_0 充分相近的轨线中，可能有非闭轨线的话，那么我们将得到上述情况 1)，即除 L_0 之外，所有通过和 L_0 充分相近之点的轨线，全是非闭的. 但此时不难看出，轨线 L_0 必将是非闭轨线的极限轨线. 因为，令 $\varepsilon>0$ 是这样的，使得在 L_0 的 ε 邻域里，没有一个平衡状态，除了 L_0 之外亦没有一条闭轨线. 过 L_0 上的任一点 P 作无切线段 l. 令 L' 为某一轨线，于 $t=t_0$ 时通过线段上的和 P 任意相近的点 Q_1，而于某 $\tau>t_0$，当还没有从 L_0 之 ε 邻域穿出以前，又一次和线段 l 相交于 Q_2 点(参看本章 § 2 辅助定理 VIII). 令 C 表示闭曲线，它是由 L' 的弧 Q_1Q_2 和线段* l 的部分 Q_1Q_2 组成的. 曲线 C 和 C 及 L_0 间的环域 G 都整个位于 L_0 的 ε 邻域内. 另一方面，或者当 $t<t_0$ 时，或者当 $t>\tau$ 时，轨线 L' 将整个地位于区域 G 之内. 由于 ε 的选择，在 L_0 的 ε 邻域里，没有一个平衡状态，且除 L_0 之外亦没有一条闭轨线，那么由本章 § 2 的定理 IV，显然可推得，L_0 是非闭轨线 L_1 的极限轨线，这就和假设矛盾. 因之，通过 L_0 之某充分小邻域中之点的轨线全是闭的.

但是容易看出，此时所有充分接近于 L_0 的轨线，因为它们是闭的，又根据微分方程的解与初始条件连续相关定理，所有这些轨线将全部位于 L_0 的 ε 邻域之内. 而这正表明 L_0 是轨道稳定的. 定理证完.

就趋向于平衡状态的半轨线作一些注记，作为对上述定理之补充.

在前面研究过的例子中我们看到过，这种半轨线可能是轨道稳定的(例如趋近于焦点及结点的半轨线)，亦可能是轨道不稳定

---

* 原书中为"弧 l"——译者注.

的(例如趋向于鞍点的半轨线)．在这些情况中，平衡状态是简单的：结点，焦点及鞍点．可以在一般情况中证明，而不对所研究之半轨线趋向的平衡状态作任何假设(因之，这个平衡状态可以是简单的，也可以是复杂的)，在这种半轨线为轨道不稳定的情况中，它必然是某鞍点区的一个边界．虽然不加证明，但仍将就此问题作较详细的讨论．

如果趋向于平衡状态 O 的半轨线 L_M^+ 是轨道不稳定的，那么可以指出这样的 ε_0，使得通过和 L_M^+ 充分相近之点的轨线中，永远可以找到这样的轨线，它随着 t 的增加从 L_M^+ 的 ε_0 邻域里走出来*．研究平衡状态 O 的 ε_0 邻域．我们总可以假定 ε_0 是如此的小，使得 O 的 ε_0 邻域里，除 O 点外，没有一个平衡状态，没有一条闭轨线，亦不包含半轨线 L_M^+ 的点 M．在 L_M^+ 上取一这样的点 Q，它对应于 $t=\tau$，使得点 Q 本身以及 L_M^+ 之所有对应于 $t>\tau$ 的点，都位于平衡状态 O 的 ε_0 邻域之内．过 Q 点作无切线段 l(整个位于 O 的 ε_0 邻域内，参看图 297)．

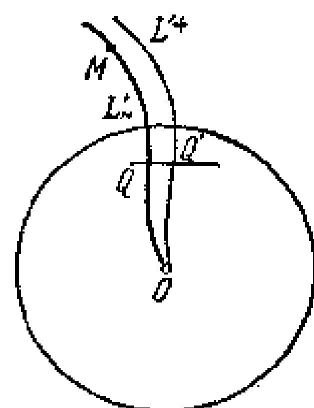


图 297

显然，通过与点 M 充分接近之点的所有轨线必然(当 t 增加时)要与线段 l 相交．假定过线段 l 上异于 Q 的点 Q' 的半轨线为 L'^+，它不会穿出 O 的 ε_0 邻域，且当 $t\to+\infty$ 时趋近于平衡状态 O．不难看出，所有和线段 l 上的 QQ' 段相交的轨线，当 t 增加时不会从 O 的 ε_0 邻域内穿出，因为当 t 增加时所有这些轨线都将进入"口袋"内部，这个口袋是由半轨线 L_M^+ 及 L'^+ 上的部分 QO 及 $Q'O$ 和无切线段上的部分 $Q'Q$ 组成的．

如果线段 l 上 Q 的二边均有轨线与之相交，且这些轨线随着 t 的增加，亦都不从 O 的 ε_0 邻域穿出，且向平衡状态 O 点趋近，则存在着 Q** 点的邻域，通过此域中所有点的轨线都不会从点 O 之

* 本句中二个 L_M^+ 原书中均为 L——译者注．

** 原书为"O 点"——译者注．

ε_0 邻域中穿出，这显然是和假设矛盾的. 因此，通过线段 l 上的和点 Q 任意接近(即便是 Q 的一边)的点之轨线中，必定有随 t 的增加而由 O 之 ε_0 邻域里穿出的轨线(图 298). 此时，对所研究之系统(右方为解析函数之系统)，可以证明，必然存在着趋向于平衡状态 O 的负半轨线 L^{*-}，它和半轨线 L_M^+ 一齐，构成"鞍点区"的边界，且当 ε_0 充分小时，也有位于平衡状态 O 的 ε_0 邻域以外的点(参看图 298).

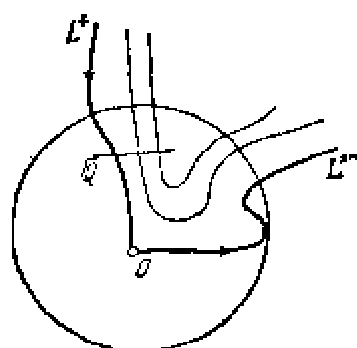


图 298

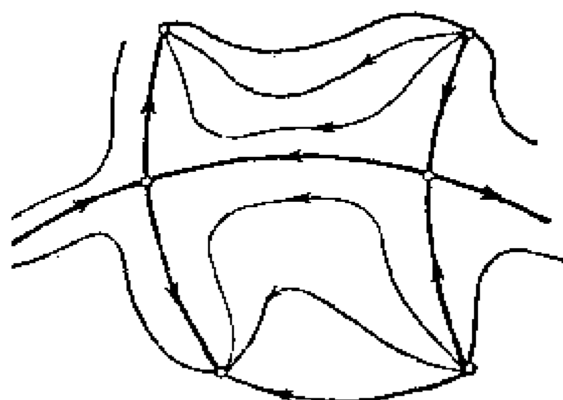


图 299

我们将称轨道不稳定的、趋向平衡状态的半轨线(不管它是趋近于简单平衡状态的，即鞍点，还是趋近于复杂平衡状态的)，为此平衡状态的**分界线**. 同时应指出，任何一个属于非闭极限轨线的半轨线，必然是分界线. 但是显然地，分界线亦可以不是极限轨线. 在此情况中，它是具有不同性状之轨线的边界线. 图 299 上给出了一个简单例子.

在上面所讲内容的基础上，我们可以就以下问题作出完整的结论，即哪些半轨线以及哪些轨线是轨道不稳定的. 答案是，任一轨道不稳定(即奇的)轨线属于下列类型之一:

1. 平衡状态[1];

---

1) 只要有一条趋近的轨线，平衡状态就是轨道不稳定的. 如果平衡状态是中心，那么显然它是轨道稳定的. 但是在所有情况中，我们都将把平衡状态归入奇轨线类中.

2. 极限环；

3. 至少有一个半轨线是某平衡状态之分界线的非闭轨线.

轨线是奇的还是非奇的，这是一个拓扑不变性质. 亦就是说，下定理成立：

定理 IV. 如果在有界区域 G 上，二动力学系统给出的轨线划分拓扑*全同，亦即，存在着平面对其自身的拓扑映射，使得在此映射下，二系统的轨线彼此相互映射，那么，轨道稳定的半轨线映射为轨道稳定的，而轨道不稳定的映射为轨道不稳定的.

此定理的证明没有什么困难，故从略.

4. 子域——充满相同性状之非奇轨线的区域. 现在我们研究给定系统(6.1)的全部奇轨线. 在本节里，将假定系统是在平面上的有界区域上给定的. 可以证明，在系统(6.1)右端为解析函数的假定下，奇轨线的数目是有限的. 对于最简单的粗系统情况，在下节所讲内容的基础上，可以简单地阐明这一事实[1].

奇轨线将区域 G 分成小区域，这些区域的点都是非奇(轨线稳定)轨线的点. 每一小区域的界点或属于奇轨线，或属于域 G 的边界. 这里仅限于研究这样的小区域，其边界上没有域 G 的边界的点. 这种小区域称之为子域. 显然子域是由轨道稳定的(即非奇)整轨线组成的. 此外不难看出，每一子域的边界是由奇整轨线组成的[2]. 同一奇轨线的点可以是几个子域的界点. 由于奇轨线的数目是有限的，在此基础上容易证明，在区域 G 中子域的数目亦是

---

* "拓扑"二字原书没有——译者注.

1) 在一般情况下，对右端为解析函数的系统，要证明奇轨线的数目有限，是十分复杂的，它超出本书范围.

2) 这一论断的证明如下（和§1 定理 I 的证明中所作的讨论完全类似）. 假定点 P 是某一子域的界点，它属于不是平衡状态的奇轨线 L_0（在 L_0 是平衡状态的情况中，上述结论是显然的）. 那么在点 P 的任意小邻域内，将有给定子域的点. 但由于子域是由整轨线(显然是轨道稳定的)组成的，又由于微分方程组的解和初始条件的连续相关性，在 L_0 上不论取什么异于点 P 的点 P_1，在点 P_1 的任意小邻域内，亦必然有所研究之子域的点. 这就说明，点 P_1 以及 L_0 的任一点都是给定子域的界点.

有限的[1].

现在详细地讨论一下,同一子域内的奇轨线有什么样的性状为此,首先引出几个简单的、但是对今后十分重要的辅助定理.

I. 对趋近于平衡状态 O 之轨道稳定的半轨线 L^+ 的每一点,总可以指出这样的邻域,使得通过此邻域之点的轨线是当 $t\to+\infty$ 时的轨道稳定轨线,且趋近于 L^+ 趋近的同一平衡状态 O.

证明这一论断. 为此首先应指出,对 L^+ 的每一点,显然总可以取一充分小的邻域,使得此邻域的所有点都属于 L^+ 所在的子域[2],因此,它们都是轨道稳定轨线的点. 此外,总可以取一任意小的 $\varepsilon>0$,使得半轨线 L^+ 的 ε 邻域中,除了半轨线 L^+ 趋近的平衡状态 O 以外,不再整个包括任何一个轨道不稳定的轨线. 于是所有通过 L^+ 之点的任意小邻域中的点的半轨线,由于 L^+ 的当 $t\to+\infty$ 时的轨道稳定性,都不会穿出 L^+ 的 ε 邻域,因此,这些半轨线的极限集合亦全部位于 L^+ 的 ε 邻域之内. 但是这个极限集合应该是由整奇轨线组成的,而由于整个位于 L^+ 之 ε 邻域里的只有一个奇整轨线——平衡状态 O,这就说明了,此极限集合只是由一个平衡状态 O 组成的,辅助定理 I 得证.

II. 半轨线 L^+ 有非平衡状态的极限轨线时,对其上任一点都可以指出这样的邻域,使得通过此邻域之点的、当 $t\to+\infty$ 及 $t\to-\infty$ 时为轨道稳定的轨线,有和 L^+ 相同的极限集合.

III. 对于轨道稳定的闭轨线上之每一点,都存在着这样的邻域,使得通过此邻域之点的轨道稳定的轨线,全是闭的,而且一个位于另一个之内.

辅助定理 II 及 III 的证明,和对辅助定理 I 进行的讨论类似

1) 这里不预备进行详细的证明,仅提出证明所依据的简单定理. 首先,非极限轨线之奇轨线不能是多于二个子域的边界. 在奇轨线 L_0 是二个子域之边界的情况中,很明显,一个子域的点在它的一边,而另一子域的点在它的另一边. 然后利用上述定理,可证明定理: 任一奇轨线只能是有限个子域的边界.

由此不难证明,子域的数目是有限的.

2) 显然,这可以根据子域本身的定义推出,因为子域是开区域,因此,其所有点都是内点,亦即,对属于此子域的点,总能指出一个邻域,使得此邻域中的点都是属于子域的点.

(只要稍作补充),故从略.

利用上述辅助定理,可以证明一系列的定理,这些定理可以完全表征同一子域内的轨线的性状.

定理 V. 如果同一子域内的轨线都是非闭的,那么,它们有相同的 ω 极限集合和 α 极限集合.

为了证明定理,采用反证法,亦即,假定存在着属于同一子域的轨线 L 及 L',它们的当 $t\to+\infty$(或 $t\to-\infty$)时的极限集合是不相同的.

以一连续弧 l,将 L 上的任一点 A 和 L' 上的任一点 B 连接起来,此弧全部位于所研究之子域内,因而通过弧 l 之点的轨线都是轨道稳定的(由于假定了轨线 L 及 L' 属于同一子域,显然,这样的弧总是可以作出的). 注意到本节中提出的辅助定理 I 及 II,不难看出,在弧 l 上可以区分两种类型的点:通过第一类点的轨线,当 $t\to+\infty$ 时有和轨线 L 相同的极限集合,而过第二类点的轨线,当 $t\to+\infty$ 时有和轨线 L' 相同的极限集合. 显然,弧 l 上与点 A 充分接近的点,是属于第一类的,而和点 B 充分接近的点是属于第二类的. 当沿弧 l 由点 A 走向点 B 时,我们应该从第一类点过渡到第二类点. 因而,在弧 l 上必定存在着这样的点(以 M_0 记之),它是第一类的最后点,或是第二类的头一个点,或者通过点 M_0 的轨线,当 $t\to+\infty$ 时有和 L 及 L' 不同的极限集合. 通过 M_0 的轨线 L_0 显然是轨道稳定的(因为弧 l 的所有点都属于轨道稳定的轨线). 但是 M_0 不可能是第一类点的最后点. 事实上,如果它是第一类点,即轨线 L_0 当 $t\to+\infty$ 时有和 L 相同的极限集合,那么由于 L_0 是轨道稳定的,又由本节*之辅助定理 I 及 II,过弧 l 上所有与 M_0 充分相近之点的轨线,都有和 L 相同的极限集合,显然 M_0 不可能是第一类点的最后点. 完全同样地可以证明,点 M_0 亦不能是第二类点的第一点. 最后,假定当 $t\to+\infty$ 时 L_0 的极限集合和 L 及 L' 的都不相同. 那么,由于本节的辅助定理 I 及 II,过弧 l 上的和点 M_0 充分近的点的轨线都有和 L_0 相同的极限集合,显

* 原书为"本章"——译者注.

然这表明，点 M_0 就不能是非第一类之其他类的第一点，这和所作假设矛盾．导出的矛盾就证明了定理．

用完全类似于上述定理之证明中进行的讨论，可以证明以下定理．

定理 VI. 如果在某一子域里，即便存在一个闭轨线，那么此子域中的所有轨线都将是闭的，它们层层相套，且在此子域的任二轨线之间，不可能有不属于此子域的点．

以上所列定理，以一般形式确立了以下事实，此事实我们这样来描述："每一子域里的非奇轨线性状相同"．上述定理也给了这句话以精确的含义．显然，对于我们所称的奇轨线，这句话不成立．

5. 单连通子域及双连通子域． 现在自然地会提出这样的问题，对我们所研究的动力学系统来说，子域可能有那些类型．就是说，正象在动力学系统的定义域 G 里，我们讨论过的轨线划分的拓扑结构那样，这里可以考虑每一子域的轨线划分的拓扑结构，并根据子域轨线划分的拓扑结构，来探讨子域的分类问题．此时，我们可以仅研究子域本身，或者，将子域连同其边界一起(界边是由整轨线组成的)进行研究，即研究作为闭区域的闭子域(为了定性研究的目的，正是将子域及其边界一起研究最有意义)．

在这个关于子域分类的问题上，虽不预备作详细的论证，但我们仍将列举(不加证明)与此问题有关的基本定理．

任一区域(包括子域)的基本拓扑性质为其连通数[1]，因而首先

---

1) 任一区域的界边或者是一个连通段——"边界连续通"，即连通闭集合，或者是由两个，三个，等等边界连续通组成的(亦可能是由无限多个边界连续通组成的，但这一情况对我们没有任何意义)．如果区域的边界是由一个边界连续通组成的，那么此区域称之为单连通的；如果是由两个、三个等等，则分别称之为双连通的、三连通的等等．在双连通及三连通等等的情况中，一个边界连续通称之为外边界连续通，其他的称为内边界连续通．

单连通区域的最简单例子为一简单闭曲线所包围的区域(特例，圆内的区域)，双连通区域——两个闭曲线之间的环域，三连通域——这样的域，其边界是由三条闭曲线组成的，一个外闭曲线，另两个简单闭曲线在其内，互不相交．此时应注意，在双连通区域、三连通区域等情况中，内边界连续通可以是一些点．显然连通数不同的区域必然不是拓扑全同的(这里的区域指的是点集、而所谓的拓扑全同亦是点集的拓扑全同)．

产生的问题是：子域可能有的连通性是怎样的.

下述定理给出了这个问题的解答，证明从略[1].

定理 VII. 任一子域的连通数不大于二. 容易看出，任一充满着闭轨线的子域是双连通的. 这可由定理 VI 及以下事实直接地推出，那就是：闭轨线里面必定有平衡状态. 充满非闭轨线的子域可以是单连通的，亦可以是双连通的.

再列举一个定理，亦不加证明，此定理给出关于充满非闭轨线的双连通子域边界的一个十分重要性质.

定理 VIII. 当充满非闭轨线之子域为双连通时，则其一个边界连续通是此子域之轨线的 α 极限，另一是 ω 极限.

于是，在充满非闭轨线的双连通子域情况中，此子域不可能有一个界点不是其中之轨线的极限点.

利用上述的那些定理，就可以彻底地描述出子域可能有的边界，并可以建立两个子域有相同轨线划分拓扑结构的条件[2](几何上这些条件是明显的)，这里所指的子域可以不带边界亦可以带有边界. 但是这一研究超出了本书的范围.

下节里将对所有"粗"系统的情况，给出闭子域的详尽分类. 在这一节里，我们仅列举一些单连通及双连通的(几何的)例子.

图 300 及 301 上给出了单连通域的例子（亦可参看图 306 及 309）. 图 302 及 303（参看图 305）上给出了双连通域的例子. 在这些图上，粗线表示子域边界中的奇轨线[3].

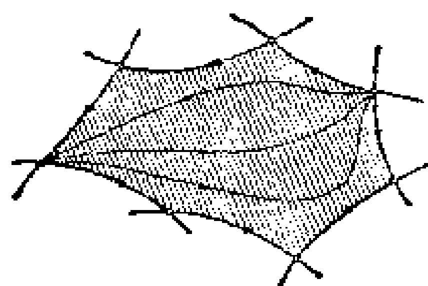
在结束本节以前，概括地讨论几个和给定系统（A）在区域 G

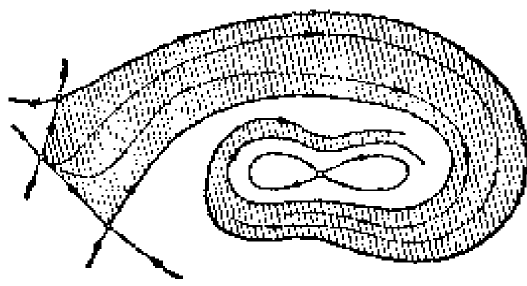
---

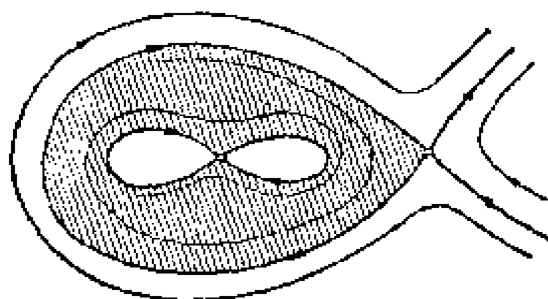
1) 此定理的证明想法上很简单，但却很冗长. 它建立在下辅助定理的基础上：在子域的每一个边界连续通上，必定有此子域之轨线的极限点.

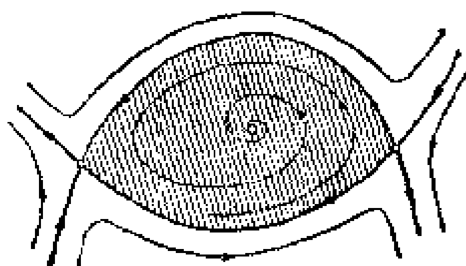
2) 不难看出，不同类型子域的数目(即有不同轨线划分拓扑结构之子域的数目)在不考虑子域边界的情况中，显然是有限的. 对闭子域的情况，即连同子域边界一起考虑时，随着动力学系统之平衡状态数目的增加，闭子域类型的数目将无限地增加. 但是在下节将研究的粗系统的情况中，与系统平衡状态的数目完全无关，闭子域类型的数目总是有限的.

3) 注意，在图 301 之例子中，子域边界有相当复杂的性质. 8 字形曲线的所有点，都是所谓的"不可到达的边界点"；因为不存在这样的简单弧，其一端是 8 字形曲线上的点，而其他点属于子域.


图 300


图 301


图 302


图 303

中的完整定性研究有关的问题，但不加任何证明。

奇轨线将区域 G 划分为若干个小区域，那就是：子域和边界上有 G 之界点的小区域。如果我们知道了所有这些小区域的轨线划分的拓扑结构，以及知道了它们的相互位置，那么我们将认为，对所研究之系统在区域 G 里的定性研究，最后完成了。

显然，为了知道小区域的相互位置，必须知道奇轨线的相互分布位置，以及子域中轨线的性状。

可以证明，如果知道了每一个平衡状态的性质，知道了极限集合(平衡状态，极限环，及类型 III 之极限集合，参看 § 1)的相互位置，以及非极限集合的分界线的相互位置，那么就可以完整地建立起所有子域的拓扑结构，以及它们的相互位置关系，亦即，可以完全地建立起域 G[1]中的轨线划分的拓扑结构。

这一事实是动力学系统定性研究中的基本问题，几何上亦是明显的，其证明的想法虽然也很简单，但却远超出本书的范围。下一节中，在研究粗系统时，还将讨论这个问题。

1) 对奇轨线相互位置的描述，称之为决定轨线划分之定性结构的"概图"(参看[82])。

§4. 粗 系 统[17,145]

1. 粗动力学系统. 对应于物理问题的动力学系统(模型)应具有什么性质的问题，在绪论中已作了一般性的讨论. 现在再就这个问题作较详细的研究.

正象前已说过的，在列微分方程时，我们永远不会也不可能毫无例外地计入所有因素，这些因素都对所研究的物理系统之运动性状，有着这样或那样的影响. 另一方面，当物理系统运动时，所计入的那些因素任何一个都不会是绝对不变的. 在研究某一具体物理系统时，我们给一些参数以完全确定的数值，只有在这些参数值的少量变化不会引起运动性质重大改变的条件下，这样作才有意义. 假定所研究的动力学系统对应于某一真实物理问题. 在此动力学系统之方程的右端，总含有某些参数，这些参数，对应于那些列微分方程时计入的所研究之物理问题的参数.

如果这个动力学系统能很好地反映所研究物理问题的性质，那么由上所述，当系统参数有不大变化时，一般而论，表征此物理模型运动性状的那些特点，仍应得到保留. 首先，当物理问题对应之动力学系统的参数有少量变化时，轨线划分的定性结构应保持不变. 如果系统的某些定性特点，是由参数间的一些确定的定量关系式所决定的，而这些参数均含于描述物理问题的微分方程里，那么，当参数有任意小的变更时，这些定性特点就将消失. 显然，一般说来，这样的定性特点在真实系统中是观察不到的.

所以，很自然地应该首先提出一类动力学系统，对它们来说，微分方程的不大变化，不会改变其轨线的拓扑结构. 这样的系统我们将称之为“粗的”. 在本节中，将给出粗系统的严格数学定义，并建立它的一些基本特性.

设给定系统(6.1)

$$\frac{dx}{dt}=P(x,\ y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,\ y)$$

——今后将称之为"系统 A"——是在平面上某有界区域 G 内考虑的. 此外,还假设区域 G 的边界是"无切环",即一简单(不自交的)闭曲线 C,且系统 A 的所有轨线均与之相交而无一与之相切[1]. 这个假设(在下述粗系统理论中,不是必要的)虽然大大地限制了所研究之系统的类型,但却使今后的讲述避免了一些非原则性的复杂化.

与系统 A 同时,还将考虑变更系统

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y) + p(x, y),\\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y) + q(x, y),\end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

其中 $p(x, y)$, $q(x, y)$ 为系统(6.1)右端的不大的附加项,它们亦是 x 及 y 的解析函数. 同时,今后除了函数 $p(x, y)$ 及 $q(x, y)$ 本身不大外,还将要求它们的偏导数亦不大. 变更系统今后将称之曰"系统 $(\tilde{A})$".

很明显,对所有的充分小的函数 $p(x, y)$ 及 $q(x, y)$,曲线 C 对系统 $\tilde{A}$ 亦仍将是无切环.

预先提醒一下几个基本的一般定理,即当微分方程组右端有小变化时,关于其解的变化的定理. 今后的论述是建立在这些定理的基础上的. 第一个定理——附录 I 的定理 IV——可用几何形式叙述如下:

任给定一有限时间间隔,总可以取系统 $(\tilde{A})$ 与给定系统 (A) 充分接近,且初始点亦充分接近,使得系统 (A) 及 $(\tilde{A})$ 的相应轨线,在给定的时间间隔上,相差得任意小.

但对于今后最重要的还是附录 I 之定理 V,在系统 (A) 及 $(\tilde{A})$ 之右端及其偏导数都十分相近的情况中,这个定理和定理 IV 相比较,在讨论系统 (A) 及 $(\tilde{A})$ 的解的相近性性质时,给出更精确的结果.

---

1) 这个无切环应取得足够大,使得仅在其所围之区域中研究轨线性质时,就能满足物理问题的要求.

根据这个定理，当系统$(\tilde{A})$之右端及其偏导数和系统(A)之右端及其偏导数充分接近，而初始点$\tilde{M}_0(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$亦与点$M_0(x_0, y_0)$充分接近时，如果

$$x = \varphi(t - t_0, x_0, y_0),$$
$$y = \psi(t - t_0, x_0, y_0)$$

为系统(A)之解，而

$$x = \tilde{\varphi}(t - t_0, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0),$$
$$y = \tilde{\psi}(t - t_0, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$$

为系统$(\tilde{A})$之解，那么，在任一有限时间间隔上，不仅函数本身$\varphi(t - t_0, x_0, y_0)$和$\tilde{\varphi}(t - t_0, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$以及$\psi(t - t_0, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$和$\tilde{\psi}(t - t_0, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$将任意相近，它们的偏导数$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$和$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_0}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$和$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y_0}$，$\frac{\partial\psi}{\partial x_0}$和$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_0}$，$\frac{\partial\psi}{\partial y_0}$和$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y_0}$亦将充分相近.

根据上述二个定理，在每一条轨线上，对应于有限时间间隔的那一段轨线，当右端变化不大时，变化也不大. 但是从这里还不能得出结论，说轨线在无限大的时间间隔上变化都不大. 从这里更不能推出：相近系统的轨线划分永远有相同的性质[1].

轨线划分定性图不变的要求，即系统"粗性"的要求，可给以如下的数学叙述：如果对任意的$\varepsilon > 0$，都能指出$\delta > 0$，使得对所有可能的解析函数$p(x, y)$及$q(x, y)$，只要它们在区域G里满足不等式：

$$\left.\begin{array}{l} |p(x, y)| < \delta, \ |q(x, y)| < \delta, \ |p'_x(x, y)| < \delta, \\ |p'_y(x, y)| < \delta, \ |q'_x(x, y)| < \delta, \ |q'_y(x, y)| < \delta, \end{array}\right\} \quad (6.6)$$

就存在着区域G对其自身的拓扑(亦即，相互单值及相互连续的)

1) 当右端有小变化时，轨线定性图象会发生变化之系统，下述系统便是一个最简单的例子：

$$\frac{dx}{dt} = ax + by; \ \frac{dy}{dt} = -bx + ay.$$

当$a = 0$时所有轨线全是闭的(座标原点是中心)，而对任意小的$a \neq 0$，没有一条闭轨线(座标原点为焦点).

映射，在此映射下系统(A)的每一轨线都变换成系统($\tilde{A}$)的轨线，反之亦然，同时相互对应之点间的距离小于 ε，那么，系统(A)称为"粗的"(在区域 G 内)。

下面给出"粗系统"的定义，这里不再假定研究动力学系统之区域的边界是一无切环。首先引入某些辅助名词。

令 G_1 及 G_1^* 为两个闭区域。如果存在着它们彼此间的拓扑映射，且在此映射下对应点彼此间之距离均小于 ε，我们说这两个区域 ε-接近。

假定在两个 ε-接近的闭域 G_1 及 G_1^* 上，各定义有相应的动力学系统(A_1)及(A_1^*)。

如果存在着 G_1 到 G_1^* 的拓扑映射，此映射建立起系统(A_1)[1]和系统(A_1^*)[2]之轨线彼此间的转换，且转换中相应点间之距离小于 ε，我们说，闭域 G_1 上系统(A_1)[1]的轨线划分和闭域 G_1^* 上系统(A_1^*)的轨线划分是 ε-全同的。

假定系统(A)定义于域 G 上，且 G_1 为某一含于(包括 G_1 之边界) G 内的闭域。系统 A 称为在闭域 G_1 中是粗的，如果对任一 $\varepsilon>0$，可以指出一 $\delta>0$，使得不管取什么系统($\tilde{A}$)，只要它在域 G 中满足不等式(6.6)，总可以找到一含于域 G 内的闭域(G_1^*)[3]，使系统(A)在其上的轨线划分和系统($\tilde{A}$)在域 G_1 上的轨线划分 ε 全同。

这样，在系统(A)是粗的情况中，任一变更系统($\tilde{A}$)在域 G 上的轨线划分，只要其右端及其偏导数与系统(6.1)[4]之右端及其导数充分地相近，就和给定系统(A)的轨线划分拓扑全同，此外，相对于给定系统(A)的轨线划分之位移亦很小(小于 ε，此时 $\varepsilon>0$ 可以取得任意地小)。很明显，例如，下特殊情况成立，对充分小的 $\varepsilon>0$[5] 及适当的 $\delta>0$，在系统(A)之每一平衡状态的 ε 邻域里，有一个且仅一个系统($\tilde{A}$)的平衡状态，在同样性质的情况中，在系统(A)的每一极限环的 ε 邻域里，有一个且仅有一个系统($\tilde{A}$)的极

---

1) 原文为 A——译者注。
2) 原文为 $\tilde{A}$——译者注。
3) G_1^* 应包含 G_1——译者注。
4) 原书为(6.5)——译者注。
5) 只有对这种充分小的 $\varepsilon>0$，在系统(A)的任一给定平衡状态的 ε 邻域里，除了 O 以外，不会再有其他平衡状态，而在系统(A)[2]的每一给定极限环的 ε 邻域里，亦不会再有其他极限环。

限环，等等.

在进一步建立粗性的必要充分条件之前，作如下的一个十分重要的注记：粗性的要求加给被研究系统上的限制是这样的，这些限制区分出"一般情况"(排除了特殊情况)．换句话说，任一预先给定的系统，一般来说都是粗的，而非粗系统都是十分特殊的系统(参看本章 § 5).

今后，谈到系统($\tilde{A}$)与系统(A)充分接近，对系统(A)右端的充分小附加项，或动力学系统的充分小变更等等，我们将永远这样来理解，不仅函数 $p(x, y)$ 及 $q(x, y)$ 本身很小，它们的偏导数也是很小的.

2. 粗平衡状态. 首先建立粗性要求对系统中存在的平衡状态，加了什么限制.

有下述定理：

定理 I. 粗系统不能有这样的平衡状态，在该处有

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0.$$

因为，如果平衡状态 $O(x_0, y_0)$ 是这样的，对它有 $\Delta = 0$，那么，很明显，这意味着，曲线 $P(x, y) = 0$ 和 $Q(x, y) = 0$ 在其共有点 $O(x_0, y_0)$ 处，不是单纯地相交，而是以某重相切．不难证明[1]，在此情况中，总可以找到解析函数

$$\tilde{P}(x, y), \ \tilde{Q}(x, y),$$

与函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 任意地相近(包括其偏导数一齐)，并且它们是这样的，在点 $O(x_0, y_0)$ 的任意小邻域内(即，对任意小的 $\varepsilon > 0$，在点 O 的 ε 邻域里*)曲线

$$\tilde{P}(x, y) = 0, \ \tilde{Q}(x, y) = 0$$

将有多于一个的公共点．而这正表明(这是显然的)，系统(A)不可能是粗的，随之定理得证.

---

1) 虽然给以严格的解析证明并无特殊困难，但由于这一事实几何上很显然，所以证明从略.

* 后半句为译者所加——译者注.

在 $\Delta(x_0, y_0) \neq 0$ 的情况中，等倾线

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0$$

在其公共点 $O(x_0, y_0)$ 处有简单的交点（这样的平衡状态亦称为简单的）。

在此情况中，不难证明，如果 $\tilde{P}(x, y)$ 和 $\tilde{Q}(x, y)$（以及它们的偏导数）取得与函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 足够地接近，那么曲线 $\tilde{P}(x, y) = 0$ 及 $\tilde{Q}(x, y) = 0$ 将仅只有一个和 $O(x_0, y_0)$ 甚近的公共点[1]。但是从这里还不能得到结论：条件 $\Delta \neq 0$ 是平衡状态"粗性"的充分条件，亦即，条件 $\Delta \neq 0$ 是平衡状态可能在粗系统中存在的充分条件；我们已经看到过，平衡状态是中心时的线性系统是非粗的，但是 $\Delta \neq 0$。这个问题还要求进一步的研究，下面我们就来研究它。

讨论一下，当有条件 $\Delta \neq 0$ 时，哪些平衡状态是可能的。

如果引入记号

$$\sigma = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0),$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & Q'_x(x_0, y_0) \\ P'_y(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix},$$

那么，正象前面已经看到的（参看第四章 § 2 及 4），可能有下列情况：

1）$\Delta > 0, \sigma^2 - 4\Delta > 0$。特征方程式的根是实的且同号。平衡状态为结点（稳定的或不稳定的视 σ 之符号而定）。

2）$\Delta < 0$。特征方程式的根是实的且反号。平衡状态为鞍点。

3）$\Delta > 0, \sigma^2 - 4\Delta < 0, \sigma \neq 0$。特征方程式的根是复共轭的。平衡状态为焦点（稳定的或不稳定的亦视 σ 之符号而定）。

不难确信，在情况 1)，2)及 3)中，平衡状态是"粗的"，即它们

1）应注意，此时，不仅附加项 $p(x, y)$ 及 $q(x, y)$ 本身要求小，它们的偏导数亦小的要求是十分重要的。因为可以证明，永远存在着任意小的附加项 $p(x, y)$ 及 $q(x, y)$，它们的偏导数并不小，使得在 $\Delta \neq 0$ 的情况中，曲线 $P(x, y) + p(x, y) = 0$ 与 $Q(x, y) + q(x, y) = 0$ 可以有任意预先给定之数目的公共点，它们都和点 $O(x_0, y_0)$ 任意地靠近。

可能在粗系统中存在．今后还将对这一点进行较详细些的讨论．

4) $\Delta > 0, \sigma = 0$. 特征方程式的根为一对纯虚根．在此情况中，平衡状态特性的一般形式我们尚未建立（对线性系统，特征根为纯虚根的平衡状态是中心）．

我们详细地研究后一情况（较之情况 1)，2)及 3)其研究复杂得多)，并将阐明，在此情况中平衡状态永远是"非粗的"，亦即，它不可能在粗系统中存在．

用以建立情况 4)之平衡状态性质的方法，对情况 3)亦适用．而由于对这二情况的研究，采用同一方法对今后是方便的，所以我们现在假设，特征方程式的根是复共轭的．

假定，平衡状态 O 与坐标原点重合，并进行适当的线性变换后，把系统(A)化为正则型，得：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - by + g(x, y),\\ \frac{dy}{dt} &= bx + ay + h(x, y),\end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

此处，$g(x, y)$ 及 $h(x, y)$ 为按 x 及 y 之幂次展开的级数，其初项之次数不低于二，而 a 及 b 为特征方程式之根 λ_1 及 λ_2 的实部及虚部，也就是说，$\lambda_1 = a + jb$, $\lambda_2 = a - jb$，且 $b \neq 0$；当 $a \neq 0$ 时得情况 3)，$a = 0$ 时得情况 4)．

函数 $g(x, y)$ 及 $h(x, y)$ 可以写成形式：

$$g(x, y) = P_2(x, y) + P_3(x, y) + \cdots,$$
$$h(x, y) = Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + \cdots,$$

其中 $P_i(x, y)$ 及 $Q_i(x, y)$ 为 i 次齐次多项式．

将系统(A)变换为极坐标，得：

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{ar^2 + r\cos\theta g(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\sin\theta h(r\cos\theta, r\sin\theta)}{r}\\ &= ar + r^2[P_2(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta + Q_2(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta] + \cdots\\ &\quad \cdots + r^i[P_i(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta + Q_i(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta] + \cdots,\end{aligned}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{d\theta}{dt}\\
&=\frac{1}{r^2}[br^2+h(r\cos\theta,r\sin\theta)r\cos\theta-g(r\cos\theta,r\sin\theta)r\sin\theta]^*\\
&=b+r[Q_2(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta-P_2(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta]+\cdots\\
&\cdots+r^{l-1}[Q_l(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta-Q_l(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta]+\cdots.
\end{aligned}
\right\}\quad(6.8)
$$

因为 $b \neq 0$，则对所有充分小的 r，即对所有充分小的 x 及 y，

$$\frac{d\theta}{dt} \neq 0.$$

显然，这表示着，任一半直线

$$\theta = \text{常数},$$

在所有充分接近坐标原点的点上（但异于原点），和轨线都没有切点，同时，随着 b 之符号的不同，将有：$\frac{d\theta}{dt} > 0$ 或 $\frac{d\theta}{dt} < 0$.

对今后的研究来说，以一个方程来代替系统(6.8)，将更为方便，以第二式除以第一式，便得到这一个方程：

$$
\begin{aligned}
&\frac{dr}{d\theta}\\
&=\frac{ar+r^2[P_2(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta+Q_2(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta]+\cdots}{b+r[Q_2\cos\theta-P_2\sin\theta]+r^2[Q_3\cos\theta-P_3\sin\theta]+\cdots}\\
&=R(r,\theta).
\end{aligned}
$$

注意到，此方程右端的分母当 $r=0$ 时不等于零，显然，我们可以将此右端按 r 的幂次展开：

$$\frac{dr}{d\theta}=R(r,\theta)=rR_1(\theta)+r^2R_2(\theta)+\cdots, \qquad (6.9)$$

其中 $R_i(\theta)$ 均为 θ 的周期函数，周期为 2π，并且在所有情况中，对充分小的 r 值，右方的级数对任何 θ 值都收敛．不难看出[1]，有

---

* 原书 h 为 g，g 为 h——译者注．

1) 获达用 P_i 及 Q_i 来表示系数 $R_i(\theta)$ 之表达式的最简单的办法如下：显然，由(6.9)可得到恒等式：$ar+(P_1\cos\theta+Q_2\sin\theta)r^2+\cdots=(R_1r+R_2r^2+\cdots)\times[b+r(Q_2\cos\theta-P_2\sin\theta)+r^2(\theta_3\cos\theta-P_3\sin\theta)+\cdots]$．比较同次的项，我们便得到求 $R_i(\theta)$ 的递推关系式．在(6.10)中，P_2 及 Q_2 分别表示 $P_2(\cos\theta, \sin\theta)$ 及 $Q_2(\cos\theta, \sin\theta)$．

$$\left.\begin{aligned} R_1(\theta) &= \frac{a}{b}, \\ R_2(\theta) &= \frac{P_2\cos\theta + Q_2\sin\theta}{b} - \frac{a}{b^2}(Q_2\cos\theta - P_2\sin\theta). \end{aligned}\right\} \quad (6.10)$$

令

$$r = f(\theta, r_0)$$

为方程(6.9)的解，当 $\theta = 0$ 时它等于 r_0，于是

$$f(0, r_0) \equiv r_0.$$

显然，方程(6.9)的每个解对应着系统(A)的一个轨线，它与半直线 $\theta = 0$ 的交点与原点之距离为 r_0；反之，任一在原点充分近处与半直线 $\theta = 0$ 相交的轨线亦对应着解 $r = f(\theta, r_0)$，此处 r_0 取某一给定值. 此外，不难看出，所有异于平衡状态 O 的、通过与 O 点充分相近之点的轨线，和半直线 $\theta = 0$ 之交点都与原点充分接近[1]. 因而，研究 r_0 充分小时之解 $r = f(\theta, r_0)$，我们也就研究了通过与原点充分接近之点的所有轨线. 由于方程(6.9)之右端是 θ 及 r 的解析函数，函数 $f(\theta, r_0)$ 亦将为 θ 及 r_0 的解析函数(参看附录 I 的定理 III)，并可以按 r_0 的幂次展开成级数，此级数当 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 时，对充分小的 r_0 值($|r_0| < \rho_0$，此处 $\rho_0 > 0$ 为某一充分小量)，是收敛的：

$$r = f(\theta, r_0) = u_1(\theta) r_0 + u_2(\theta) r_0^2 + \cdots \quad (6.11)$$

因为 $r = f(\theta, r_0)$ 是方程式(6.9)的解，则将表达式(6.11)代入此式，我们应得到 r_0 的恒等式，即：

$$\frac{du_1}{d\theta} r_0 + \frac{du_2}{d\theta} r_0^2 + \cdots = R_1(\theta)(u_1 r_0 + u_2 r_0^2 + \cdots) + R_2(\theta)(u_1 r_0 + u_2 r_0^2 + \cdots)^2 + \cdots$$

由此，令 r_0 之同幂次的系数表达式相等，我们便得到决定函数 $u_i(\theta)$ 的递推微分方程：

---

1) 根据附录 I 的定理 II，并注意到，解 $r = 0$ 对所有 θ 值有定义，就可以证明这一点.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{du_1}{d\theta}=u_1R_1,\\&\frac{du_2}{d\theta}=u_2R_1+R_2u_1^2,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\tag{6.12}$$

此外,由条件

$$f(0,r_0)=r_0,$$

明显地,可得到:

$$u_1(0)=1,\ u_i(0)=0\ (i=2,3,\cdots).$$

用这些初始条件和微分方程 (6.12) 一起,就可以完全确定函数 $u_i(\theta)$. 特别地,从其中的第一式,得:

$$u_1(\theta)=e^{\frac{a}{b}\theta},$$

从此,特别地还能得到,当 $a=0$ 时,

$$u_1(\theta)=1.$$

因为在所有和原点充分接近的点处(异于点 O),直线 $\theta=0$ 和系统(A)的轨线没有切点,那么,在此直线上,以点 O 为一端的充分短的线段,和一个无切线段完全类似,虽然其一个端点靠在平衡状态上. 如果在解 $r=f(\theta,r_0)$ 中令 $\theta=2\pi$,那么显然,对任何给定的 $r_0(|r_0|<\rho_0)$,r 的值对应于轨线和半直线 $\theta=0$ 的"后继点",而函数 $r=f(2\pi,r_0)=u_1(2\pi)r_0+\cdots$ 完全和第七章 §7 中讲过的后继函数相类似. 当然,这时应该仅考虑 r_0 的正值,因为负值没有几何意义. 利用这个函数,我们就可以作出关于平衡状态 O 邻域里之轨线性质的详尽结论.

引入函数 $\Psi(r_0)=f(2\pi,r_0)-r_0=\alpha_1r_0+\alpha_2r_0^2+\cdots.$

此处

$$\alpha_1=u_1(2\pi)-1=e^{2\pi\frac{a}{b}}-1,$$
$$\alpha_k=u_k(2\pi),\ k>1.$$

显然,使

$$\Psi(r_0)=f(2\pi,r_0)-r_0=0$$

的 r_0 值(亦只有这些值)对应着闭轨线.

应注意，当 $a=0$ 时，即在情况 4)中，我们有 $\alpha_1=0$. 此外，函数 $\Psi(r_0)$ 展开式中的系数 α_i，具有下列性质：如果 $\alpha_1=0$，则必有 $\alpha_2=0$. 并且在更一般情况中，如果 $\alpha_1=\alpha_3=\cdots=\alpha_{2n-1}=0$，则必有 $\alpha_{2n}=0$，亦就是说，第一个不等于零的系数之下标应该是奇数[1].

可能出现下面二种情况：

a）至少有一个系数 α_i 异于零.

假定 α_i 是第一个异于零的系数（由上所述 i 一定是奇数）. 那么对所有不大的 $r_0>0$，

$$\Psi(r_0)=\alpha_i r_0^i+\cdots$$

不等于零. 在此情况中，通过充分接近 O 之点的所有轨线都是螺线，或者，当 $t\to+\infty$ 时它们趋向平衡状态（当 $\alpha_i<0$ 及 $b>0$ 时，即对所有充分小的 r_0 有 $\Psi(r_0)<0$ 及 $\frac{d\theta}{dt}>0$ 时，或者，当 $\alpha_i>0$ 及 $b<0$ 时，即 $\Psi(r_0)>0$ 及 $\frac{d\theta}{dt}<0$ 时），或者，当 $t\to-\infty$ 时它们趋向平衡状态（当 $\alpha_i<0$ 及 $b<0$ 时，即对所有充分小的 r_0 有 $\Psi(r_0)<0$ 及 $\frac{d\theta}{dt}<0$ 时，或者，当 $\alpha_i>0$ 及 $b>0$ 时，即 $\Psi(r_0)>0$ 及 $\frac{d\theta}{dt}>0$ 时）*. 平衡状态具有焦点的性质. 这个焦点可以是稳定的或不稳定的（这决定于 b 及 α_i 的符号）. 情况 $a\neq0$，即 $i=1$ 的情况前面已研究过了. 在 $i>1$ 的情况中，我们将称平衡状态为 i 次的**复杂焦点**，或 i **重焦点**.

---

1) 兹证明在 $a=0$ 情况中，如果 $\alpha_1=0$ 必有 $\alpha_2=0$. 如果 $a=0$，则在公式(6.12) 里，$R_1=\frac{a}{b}=0$. 其第一方程取形状 $\frac{du_1}{d\theta}=0$. 考虑到初始条件，由此可得 $u_1=1$. 从(6.12)的第二式，将得 $\frac{du_2}{d\theta}=R_2(\theta)$，但按 (6.10)，$R_2(\theta)$ 是 $\cos\theta$ 及 $\sin\theta$ 的三次齐次函数. 将此式双方积分之，对 θ 的积分的上下限为 2π 及 0，并考虑到 $u_2(0)=0$，得 $u_2(2\pi)=0$. 类似地可以证明第一个异于零之系数 α_i 的下标是奇数(参看[84]，以及[33]).

* 这一段中的 $\frac{d\theta}{dt}$ 原书为 $\frac{d\Psi}{dt}$ 或 $\frac{d\varphi}{dt}$ ——译者注.

b) 所有系数 α_i 都等于零.

在此情况中，$\Psi(r_0)\equiv 0$，并且通过 O 点之充分小邻域的轨线全是闭的.

平衡状态 O 是**中心**[1].

以上指出的二种情况，就是这里可能出现的全部情况.

下面证明，在粗系统中，不可能有复杂焦点和中心，为此先作若干注记.

与系统(A)同时，再研究一变更系统($\tilde{A}$)，此系统和系统(A)充分地相近，其形式为[2]：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\tilde{a}x-\tilde{b}y+\tilde{g}(x,y),\\ \frac{dy}{dt}&=\tilde{b}x+\tilde{a}y+\tilde{h}(x,y).\end{aligned}\right\}\tag{6.13}$$

引人极座标，然后再化成一个方程，正象前面研究系统(A)时那样，得到类似于(6.9)的对应于系统($\tilde{A}$)的微分方程

$$\frac{dr}{d\theta}=\tilde{R}(r,\theta)=\tilde{R}_1(\theta)r+\tilde{R}_2(\theta)r^2+\cdots.\tag{6.14}$$

如果

$$r=\tilde{f}(r,\theta)=\tilde{u}_1(\theta)r+\tilde{u}_2(\theta)r^2+\cdots$$

为方程(6.14)的解，那么，很明显，为了求 $\tilde{u}_i(\theta)$ 我们又得到了求 $u_i(\theta)$ 时得到过的递推方程组，只要将其中的 $R_i(\theta)$ 代之以 $\tilde{R}_i(\theta)$ 就可以了.

此时仍有(和方程(6.9)的情况一样)，

$$\tilde{u}_1(\theta)=e^{\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\theta}.$$

象对系统(A)那样，将研究后继函数：

---

1) 可以证明，系统(A)在此情况中具有解析的积分，即下形式的积分

$$x^2+y^2+A_3(x,y)+\cdots=C,$$

其中未写出的项，对 x 及 y 的阶次不低于 3. 还应指出，当方程右端为非解析函数时，可能有这种情形，存在着层层相套且收缩为一点的无限多闭轨线，而在它们之间，仍可能有闭的及非闭的轨线.

2) 很明显，任何一个和系统(A)充分相近的变更系统，经过变量的线性变换，都可以化成这种形式.

$$r = \tilde{f}(2\pi, r_0),$$

以及函数

$$\tilde{\Psi}(r_0) = \tilde{f}(2\pi, r_0) - r_0.$$

假设,对系统(A)建立的函数

$$r = f(2\pi, r_0)$$

在满足不等式 $|r_0| < \rho_0$ 的所有 r_0 值上有定义(此处 ρ_0 为某一正值常数).

根据附录 I 之定理 V, 不难证明,对所有和系统(A)充分相近的系统,函数

$$r = \tilde{f}(2\pi, r_0)$$

在所有满足 $|r_0| < \rho_0$ 之 r_0 值上亦有定义,并且在这些值上,也和函数 $f(2\pi, r_0)$ 任意地相近,而且其导数亦和 $f(2\pi, r_0)$ 之导数任意地相近.

在作了这个注记以后,进一步来证明下面的定理.

定理 II. 粗系统不可能有满足条件:

$$\Delta > 0, \ \sigma = P'_x + Q'_y = 0$$

的平衡状态.

为了证明此定理,用反证法. 即假定粗系统(A)有这样的平衡状态,它们满足:

$$\Delta(x_0, y_0) > 0, \ \sigma = 0.$$

象前面那样, 如果假定平衡状态位于坐标原点, 则在此情况中,系统(A)可写成形式:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -by + g(x, y) = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= bx + h(x, y) = Q(x, y). \end{aligned}\right\} \qquad (6.15)$$

对此系统可能有二种情况,即上述的情况 a) 及 b),就是说,平衡状态或者是复杂焦点或者是中心.

现在证明,在这二种情况里, 可以指出一个与系统(A)任意相近的变更系统, 使得在某一包含原点之区域里, 其轨线划分和给

定系统（A）在此区域里的轨线划分有定性的差别．为此，研究变更系统($\widetilde{A}$)：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\tilde{a}x-by+g(x,y),\\ \frac{dy}{dt}&=\tilde{a}y+bx+h(x,y),\end{aligned}\right\}\tag{6.16}$$

其中 $\tilde{a}\neq 0$（后面再确定 $\tilde{a}$ 的符号）．

令

$$\Psi(r_0)=f(2\pi,r_0)-r_0,$$
$$\tilde{\Psi}(r_0)=\tilde{f}(2\pi,r_0)-r_0$$

如前已引入的函数，它们分别为对系统(A)及($\widetilde{A}$)建立的，且在所有 $r_0(|r_0|<\rho_0)$上有定义．

分别考虑对系统(A)可能的二个情况 a）及 b)．

a）系统（A）之平衡状态 $O(0,0)$是复杂焦点．在此情况中，$\Psi(r_0)$之展开式中的系数不全等于零．令 α_{2k+1} 为第一个异于零的系数，并有

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{2k}=0,\quad \alpha_{2k+1}\neq 0.$$

为确定起见假设，$b>0$ 及 $\alpha_{2k+1}<0$，亦即系统(A)之复杂焦点是稳定的（同样地可以研究不稳定复杂焦点的情况）．在此情况中，函数 $\Psi(r_0)$ 具有形状：

$$\Psi(r_0)=r_0^{2k+1}(\alpha_{2k+1}+\cdots),$$

而且永远可以指出那样小的 $r_0'<\rho_0$，使得有

$$\Psi(r_0')<0.$$

但是总可以取一与系统(A)甚为相近的变更系统($\widetilde{A}$)(参看(6.16))，使得对应的函数 $\tilde{\Psi}(r_0)$，对所有 $r_0(|r_0|<\rho_0)$和函数 $\Psi(r_0)$充分地相近，并有

$$\tilde{\Psi}(r_0')<0.$$

从另一方面，函数 $\tilde{\Psi}(r_0)$：

$$\tilde{\Psi}(r_0)=r_0(\tilde{\alpha}_1+\cdots)$$

的符号对所有充分小的 r_0（很明显，都是小于 r_0' 的）与 $\tilde{\alpha}_1$ 的符号

相同.

如果取 $\tilde{a}>0$,则 $\tilde{\alpha}_1=e^{\frac{d}{b}2\pi}-1>0$, 并且可以指出任意小的$r_0''<r_0'$, 此时

$$\tilde{\Psi}(r_0'')>0.$$

这样,我们有了:

$$\tilde{\Psi}(r_0'')>0,\ \tilde{\Psi}(r_0')<0$$

随之,必定存在这样的 $r_0^*(r_0''<r_0^*<r_0')$,使得有 $\tilde{\Psi}(r_0^*)=0$. 显然,这表明: 通过半直线上的对应于值 $r=r_0^*$ 的点,通过一条系统 $(\tilde{A})$ 的闭轨线——极限环. 不难确信, $\tilde{a}$ 愈小, 此极限环离点 O 愈近[1].

如果系统(A)是粗的,则在 O 点的任一充分小的邻域里, 给定系统(A)及所研究之系统 $(\tilde{A})$ (参看(6.16))的轨线划分应该是定性全同的. 显然,这是不可能的,因为我们总可以选取 O 点的这样的邻域,使得其中没有系统(A)的极限环,而由上所述,当 $\tilde{a}>0$ 充分小时,在此邻域里必定有系统$(\tilde{A})$的极限环.

下面考虑系统(A)的第二个可能情况.

b) 系统(A)的平衡状态为中心. 当 $\tilde{a}\neq 0$ 时系统 $(\tilde{A})$ 的平衡状态 O 为复杂焦点(稳定的或是不稳的, 与 $\tilde{a}$ 之符号有关). 因而, 系统(A)及$(\tilde{A})$的平衡状态 O 有不同的性质, 而系统(A)亦就不可能是粗的. 于是,定理得证.

很明显,由证明了的两个定理 I 及 II 可得结论,粗系统只能有简单的平衡状态: 1), 2) 及 3) 型的. 这些平衡状态是粗的,其含义为: 原系统 (A) 在这种平衡状态之充分小邻域内的轨线划分,和与系统(A)充分相近之系统$(\tilde{A})$的轨线划分拓扑全同,而且彼此间的位置差异甚小. 特别地, 当系统(A)的平衡状态 O 是鞍点时, 系统$(\tilde{A})$的平衡状态 $\tilde{O}$ 亦是鞍点, 而鞍点 $\tilde{O}$ 的分界线和系统(A)之鞍点 O 的分界线十分接近[2].

---

1) 这个极限环是由系统(A)之平衡状态 O"产生"的.

2) 对于这些几何上显然的事实,这里将不再进行详细证明.

3. 简单极限环和复杂极限环. 粗极限环. 现在进一步讨论闭轨线应满足的条件，在此条件下，它可以在粗系统中存在. 为此首先考虑任一闭轨线的邻域，此闭轨线不一定是粗系统的轨线. 下面进行的研究，和复杂焦点及中心情况进行的讨论类似. 这样，令 L_0 为闭轨线，

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$$

为某一对应于闭轨线的周期运动，τ 为此运动的周期.

考虑一无切线段，它通过轨线 L_0 上的任一点 Q，且包含点 Q 于其内部. 令 s 为此线段上的参数，且

$$\bar{s} = f(s)$$

为其上的后继函数[1)]（参看第Ⅴ章之§7）. 引入函数 $\Psi(s)=f(s)-s$. 函数 $f(s)$ 及 $\Psi(s)$ 都是 s 的解析函数（参看第Ⅴ章§7第3小节）.

如果 s_0 为对应于线段 l 上 Q 点之参数 s 的数值，而闭轨线是通过 Q 点的，那么显然，

$$\Psi(s_0) = f(s_0) - s_0 = 0.$$

如果对所研究的闭轨线特征指数 h 不等于零，那么，象已知的（参看第Ⅴ章§7），当 $h<0$ 时，即当 $\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)<1$ 因而 $\Psi'(s_0)<0$ 时，轨线 L_0 是稳定的极限环，而当 $h>0$ 时，即当 $\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)>0$，因而 $\Psi'(s_0)>0$ 时，轨线 L_0 是不稳定的极限环.

在此二情况中，值 $s=s_0$ 都是方程 $\Psi(s)=0$ 的简单根. 所以在 $h \neq 0$ 的情况中，极限环称之为简单极限环.

现在讨论特征指数 $h=0$ 的情况，这种情况在第Ⅴ章§7末曾涉及，此时 $\frac{d\bar{s}}{ds}=1$，因而 $\Psi'(s_0)=0$. 在此情况里，$s=s_0$ 是方程式 $\Psi(s)=0$ 的重根，其重数高于一. 这时会出现以下二种可能：

1）当 $s=s_0$ 时，$\Psi(s)$ 的各阶导数中至少有一个不等于零，

1）提醒注意，后继函数是这样建立的，使得"后继点"对应的时间大于"前行点"对应的时间.

即存在这样的 $k>1$，使有

$$\Psi'(s_0)=\cdots=\Psi^{(k-1)}(s_0)=0,\quad \Psi^{(k)}(s_0)\neq 0.$$

因而我们将有:

$$\Psi(s)=(s-s_0)^k[\Psi^{(k)}(s_0)+(s-s_0)\Psi^{(k+1)}(s_0)+\cdots].^*$$

此时总存在着这样的 $d>0$，使得对所有异于 s_0 且满足不等式

$$|s-s_0|<d$$

的 s 值，$\Psi(s)$ 不等于零，亦即，无切线段上存在有一段(其上各点满足 $|s-s_0|<d$)，只有一条闭轨线与之相交，它就是我们研究的 L_0。这条闭轨线 L_0 称之为 k 重复杂极限环.

研究 k 为奇数的情况. 假定 $\Psi^{(k)}(s_0)<0$。于是当 $s<s_0$ 时，

$$\Psi(s)>0,\ \text{即}\ f(s)>s,$$

而当 $s>s_0$ 时，

$$\Psi(s)<0,\ \text{即}\ f(s)<s.$$

因而，线段 l 上每一个后继点到点 Q(闭轨线 L_0 和线段 l 的交点)的距离，小于其前行点到 Q 的距离. 因为按后继函数的构造方法，可知后继点对应的时间值 t 大于其前行点所对应的时间 t，那么注意到: L_0 是和无切线段 l 上被研究的那一段相交的唯一闭轨线，根据本章之定理 II，不难证明[1]，任一异于 L_0 的、和 l 之交点离 Q 甚近的轨线，当 $t\to+\infty$ 时趋近于极限环 L_0。此极限环 L_0 是一个稳定的(奇重)极限环.

如果 $\Psi^{(k)}(s_0)>0$，经过完全类似的讨论，可以证明，任一与线段 l 之交点和点 Q 甚近的轨线，当 $t\to-\infty$ 时趋近于极限环 L_0。此极限环是一个不稳定的(奇重)极限环.

现在假定 k 是偶数. 那么，对所有的 $s\neq s_0$，由于 $\Psi^{(k)}(s_0)$ 的符号不同，或者 $\Psi(s)>0$，即 $f(s)>s$ (如果 $\Psi^{(k)}(s_0)>0$)，或者 $\Psi(s)<0$，即 $f(s)<s$ (如果 $\Psi^{(k)}(s_0)<0$). 此时不难证明，当 $\Psi^{(k)}(s_0)>0$ 时，所有轨线，如果它们和线段 l 之交点对应于值

---

* 这一方程是 $\Psi(s)$ 的泰勒级数，各项均漏掉系数. ——译者注.

1) 由于在这里讨论的情况中，$f'(s_0)=1$，所以显然不能沿用第V章 §7 中进行的讨论.

$s < s_0$，当 $t \to +\infty$ 时趋近于 L_0，而如果它们和线段 l 的交点对应于值 $s > s_0$，则当 $t \to -\infty$ 时趋近于 L_0；当 $\Psi^{(k)}(s_0) < 0$ 时，则情况完全相反.

很明显，在所研究的情况(偶数 k)里，极限环 L_0 是不稳定的.但是这种类型的极限环常称之为"半稳定的"(偶重)极限环，而"不稳定"一词，仅用来描述另一种极限环，对它来说，所有充分与之相近的轨线，当 $t \to -\infty$ 时向它趋近.

当 $k > 1$ 时，不论 k 是奇数还是偶数，极限环都称为"复杂极限环".

2) 当 $s = s_0$ 时，函数 $\Psi(s)$ 的各阶导数全等于零，即对任意 i

$$\Psi^{(i)}(s_0) = 0.$$

那么显然，由于 $\Psi(s)$ 是解析函数，对我们研究的所有的 s，有:

$$\Psi(s) \equiv 0;$$

亦即，后继函数为:

$$\bar{s} = s.$$

很明显，这意味着，所有和 L_0 充分相近的轨线都是闭的.

为了使上面的论述具有清晰的几何形象，作出拉梅尔图，就是说，研究以 $\bar{s}$ 及 s 为坐标轴的直角坐标系，并在此平面上研究表示后继函数

$$\bar{s} = f(s)$$

的曲线以及直线 $\bar{s} = s$. 闭轨线对应的 s 值满足

$$f(s) = s,$$

亦即，曲线 $\bar{s} = f(s)$ 与直线 $\bar{s} = s$ 有公共点时的 s 值. 如果这个公共点是简单交点，则它对应的闭轨线是一个极限环，对此极限环有$\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right) \neq 1$. 如果此公共点是有某一定重数的切点，则极限环亦是有某一定重数的极限环. 特别地，如果曲线 $\bar{s} = f(s)$ 与直线 $\bar{s} = s$ 重合，则这正是情况 2).

我们将阐明，在粗系统中不可能存在下述两种闭轨线，k 重极限环且 $k>1$(情况 1))，以及邻域中全是闭轨线的闭轨线(情况 2)).

预先作几点注记.

对系统(A)之轨线是无切线段的线段 l, 对于和系统(A)充分相近之变更系统($\widetilde{A}$)来说,仍是其轨线的无切线段. 此外, 如果参数 s 的值 s_1 及 s_2 ($s_1 < s_2$) 对应着线段 l 上的点不是 l 的端点, 则按附录 I 的定理 IV, 不难证明,在 l 上的所有满足 $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ 的 s 值上,可以决定一相应于系统($\widetilde{A}$)的后继函数:

$$\bar{s} = \tilde{f}(s).$$

根据附录 I 的定理 V, 不难看出, 如果系统($\widetilde{A}$)和系统(A)相当地接近,这个函数 $\tilde{f}(s)$及其导数 $\tilde{f}'(s)$ 分别和函数 $f(s)$ 及其导数 $f'(s)$ 的差可任意地小.

考虑到以上所述,自然可以期待, 特征指数为零($h = 0$)的闭轨线, 即 $k > 1$ 时的情况 1) 和情况 2), 在粗系统中不可能存在. 事实上,假定 R_0 是曲线 $\bar{s} = f(s)$ 和直线 $\bar{s} = s$ 的公共点,而它对应的正是上述的那种闭轨线. 曲线 $\bar{s} = f(s)$ 或者在 R_0 点上和直线 $\bar{s} = s$ 有某重的切点(情况 1)), 或者和直线重合(情况 2)). 但是在这二种情况里, 可指出一个函数 $\bar{s} = \tilde{f}(s)$, 它和函数 $f(s)$ 任意地相近,且二者的导数亦任意地相近, 使得在 R_0 的任意小邻域内,或者曲线 $\bar{s} = \tilde{f}(s)$ 和直线 $\bar{s} = s$ 的交点多于一个, 或者二者没有一个交点(在曲线 $\bar{s} = \tilde{f}(s)$ 和直线 $\bar{s} = s$ 之切点为偶重的情况中,参看图 313, 以及二者重合的情况中). 此外,如果我们能够说明,存在着和系统(A)任意相近的变更系统($\widetilde{A}$), 且 $\tilde{f}(s)$ 为其在线段 l 上的后继函数,那么很明显, 这就表明, 使系统(A)的右端有一适当选择的任意小的改变, 所研究的极限环或者将分成几个极限环,或者自己也将消失(k 为偶数的情况和情况 2)). 显然,从此可以得出结论: 系统 (A) 不是粗的. 这样, 要证明在粗系统中不可能存在 k 重极限环($k > 0$), 可以用建造变更系统($\widetilde{A}$)的方法来进行,此时,所造系统($\widetilde{A}$)的后继函数 $\tilde{f}(s)$ 就具有我们所需要的性质. 显然,这种证明(下面将给出)和定理 II 的证明十分相似.

下面进行严格的论述. 先提出一个辅助引理,但不予证明.

引理. 存在着定义于域 G 中的函数

$$z = F(x, y),$$

它有不低于二阶的连续偏导数，且有：1) $F(\varphi, \psi) \equiv 0$（即函数 $z = F(x, y)$ 在轨线 L_0 的点上等于零）；2) $[F'_x(\varphi, \psi)]^2 + [F'_y(\varphi, \psi)]^2 \neq 0$。

这个引理的论断有十分简单的几何意义。那就是，在 x, y, z 空间研究一具有引理所述性质的函数 $z = F(x, y)$。这个函数表示一光滑的曲面，这个曲面通过平面 x, y 上的轨线 L_0，并且按 2) 在 L_0 的所有点上，都不和平面 x, y 相切[1]。

现在来证明定理，此定理将给出闭轨线能在粗系统中存在的必要条件，亦即，"粗闭轨线"的必要条件。

定理 III. 在粗系统里，不可能存在

$$h = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau [P'_x(x, y) + Q'_y(x, y)]\,dt = 0$$

的闭轨线。

如果对系统 (A) 的闭轨线 L_0，其参数方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

满足条件

$$h = 0.$$

那么由上所述，或者这条闭轨线是 k 重复杂极限环 $(k > 1)$（情况

---

1) 为了证明具有引理所述性质之函数 $F(x, y)$ 的存在性，例如，可以采用下述方法。研究曾在第 V 章 §7 第 3 小节中引入的曲线坐标。曲线 $v =$ 常数都是闭的，而且很明显，曲线 $v = 0$ 就是所研究的闭轨线 L_0。在轨线 L_0 的各点上，即当 $v = 0$ 而 u 取所有可能值时，行列式

$$D = \begin{vmatrix} \varphi'(u) - v\psi''(u) & -\psi'(u) \\ \psi'(u) + v\varphi''(u) & \varphi'(u) \end{vmatrix}$$

显然不等于零。所以在轨线 L_0 上各点的邻域里，可以找到 u 为 x, y 的函数：$u = \Phi(x, y)$。不难确信，函数 $u = \Phi(x, y)$ 是单值解析函数，定义于 L_0 的某邻域上，且在 L_0 的各点上等于零。此外不难证明，函数 $\Phi(x, y)$ 满足本引理中的条件。一般说来，函数 $\Phi(x, y)$ 仅在轨线 L_0 的某个不大的邻域上有定义。但是由熟知的函数延拓定理（参看 Г. М. 菲赫金哥尔茨，微积分学教程，第一卷第二分册，高等教育出版社，附录 I），总可以造出一函数 $F(x, y)$，它在整个系统 (A) 的定义域上有定义，且在轨线 L_0 的某一邻域上和函数 $\Phi(x, y)$ 重合。

有了具有引理所述性质的函数 $F(x, y)$，将有助于建造具有所需要性质的变更系统 $(\tilde{A})$。

1)),且存在着 L_0 的邻域,其中除 L_0 外不再有其他闭轨线,或者所有轨线在 L_0 的邻域中都是闭的. 先研究情况 1).

为简单计,假设对线段 l 上选定的参数 s, 此线段和闭轨线 L_0 的交点对应着值 $s=0$. 和前面一样, 令 $\bar{s}=f(s)$ 为线段 l 上的后继函数, 且 $\Psi(s)=f(s)-s$. 显然 $\Psi(0)=0$, 且在所研究的情况中, $\Psi'(0)=\Psi''(0)=\cdots=\Psi^{(k-1)}(0)=0$*; $\Psi^{(k)}(0)\neq 0$ (k 可以是奇数, 亦可以是偶数). 为肯定起见, 假定 $\Psi^{(k)}(0)>0$ ($\Psi^{(k)}<0$ 情况中的讨论完全类似).

定理论断之证明, 下面将这样来进行: 先研究一辅助变更系统,其右端不是解析函数[1],然后研究一个与其任意相近的系统,这个系统的右端已经是解析函数.

我们将研究的辅助变更系统(其右端为非解析函数)有以下形状:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=P(x,y)+\lambda F(x,y)F'_x(x,y)=P^*(x,y),\\ \frac{dy}{dt}&=Q(x,y)+\lambda F(x,y)F'_y(x,y)=Q^*(x,y),\end{aligned}\right\}\tag{6.17}$$

其中 λ 为参数,函数 $F(x,y)$ 满足上述引理条件,于是在所有情况中,这个系统的右端具有连续的一阶偏导数(这里,函数 $F(x,y)$ 根据引理要求具有直到二阶的偏导数); 系统 (6.17) 我们将称之为 "系统 (A_λ^*)".

因为按函数 $F(x,y)$ 的选择,有

$$F(\varphi(t),\psi(t))\equiv 0,$$

显然,

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$$

---

* 原书无"=0"——译者注.

1) 这样的系统我们以前没有研究过. 但是如果系统右端虽不是解析函数, 却有连续的偏导数, 那么这种系统满足附录 I 之定理 I (解的存在性及唯一性定理)以及定理 II. 如果具有引理之性质 1)及 2)的函数 $F(x,y)$ 是解析的,那么下面所研究的系统 (A_λ^*) 亦将是解析的, 而本定理的进一步论证将大大简化. 可是有满足引理条件 1) 及 2) 的解析函数存在一事的严格证明, 较之下面进行的论证复杂得很多.

亦是系统(A_λ^*)的解，亦即，轨线 L_0 亦是系统(A_λ^*)的轨线. 很明显，对所有充分小的 λ，系统(A_λ^*)将与系统(A)任意地相近. 将只考虑甚小的 λ($|\lambda| < \eta$，此处 η 为适当选定的常数)，对这些 λ，线段 l 仍为系统(A_λ^*)的无切线段. 令

$$\bar{s} = f^*(s, \lambda)$$

为对系统(A_λ^*)所作的线段 l 上的后继函数，并且 $\Psi^*(s, \lambda) = f^*(s, \lambda) - s$.

完全类似于系统(A)的情况，可以求出后继函数 $\bar{s} = f^*(s, \lambda)$. 此时，由于轨线 L_0 同时是系统(A)及系统(A_λ^*)的轨线，我们可采用同一曲线坐标系 u, v（参看第V章§7），和对系统(A)的情况一样. 假定对系统(A_λ^*)之类似于方程(5.56)的方程为 $\frac{dv}{du} = g^*(u, v, \lambda)$，其当 $u = 0$ 时取值 s 的解为 $v = \Phi^*(u, s, \lambda)$(提醒一下，我们总是可以假定线段 l 是直线 $u = 0$ 上的一个线段). 于是后继函数 $f^*(s, \lambda) = \Phi^*(\tau, s, \lambda)$($\tau$ 是沿闭轨线 L_0 之运动的周期). 因为系统(A_λ^*)右端，因而函数 $\Phi^*(\tau, s, \lambda)$，都是非解析的函数，则函数 $\Psi^*(s, \lambda) = f^*(s, \lambda) - s$ 亦不是解析函数，而在第五章§7中进行的讨论这里就不能沿用了(那里利用了这样的事实：函数 $g^*(u, v, \lambda)$和 $\Phi^*(u, s, \lambda)$可以展成级数). 但是可以证明，函数 $g^*(u, v, \lambda)$必有连续的一阶偏导数. 从此按熟知的定理可知，函数 $\Phi^*(u, s, \lambda)$对 s 有连续的导数，且此导数为下微分方程的解：

$$\frac{d}{du}\frac{\partial \Phi^*}{\partial s} = \frac{\partial g^*}{\partial v}\frac{\partial \Phi^*}{\partial s}.$$

利用这个方程式，和第五章§7第3小节一样，得到：

$$f^{*\prime}(0) = e^{\int_0^\tau (P_x^{*\prime} + Q_y^{*\prime})dt}.$$

按附录I的定理V，当 λ 甚小时函数 $\Psi^*(s, \lambda)$ 及其导数和函数 $\Psi(s)$ 及其导数任意地相近. 由于轨线 L_0 是系统(A_λ^*)的轨线，显然，我们有：

$$\Psi^*(0, \lambda) = 0.$$

下面我们来寻求 $\Psi^{*\prime}(0, \lambda)$ 的表达式. 注意到 $P^*(x, y, \lambda)$ 和 $Q^*(x, y, \lambda)$的表达式，并注意到，根据条件有

$$h = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (P_x' + Q_y')\,dt = 0,$$

我们将有：

$$f^{*\prime}(0, \lambda) = e^{\int_0^T (P_x^{*\prime} + Q_y^{*\prime}) dt} = e^{\lambda \int_0^\tau (F_x'^2 + F_y'^2) dt} > 0,$$

以及

$$\Psi^{*\prime}(0, \lambda) = e^{\lambda \int_0^\tau (F_x'^2 + F_y'^2) dt} - 1.$$

显然，从这些表达式可得结论：闭轨线是系统(A_λ^*)的简单极限环，且当 $\lambda < 0$ 时是稳定的，当 $\lambda > 0$ 时是不稳定的.

按条件有

$$\Psi^{(k)}(0) > 0.$$

因为

$$\Psi(s) = \Psi^{(k)}(0) s^k + \cdots,$$

所以总可以取这样的 $s_1 > 0$ (s_1 可选得任意地小)，使得此时

$$\Psi(s_1) > 0.$$

但对所有充分小的 λ 值，函数 $\Psi^*(s, \lambda)$ 和函数 $\Psi(s)$ 之差是任意小，所以也总是可以取一固定的 λ^*(λ^* 的绝对值可取得任意小，符号任意)，使得我们有

$$\Psi^*(s_1, \lambda^*) > 0. \tag{6.18}$$

但如果 $\lambda^* < 0$，则我们有：

$$\Psi^{*\prime}(0, \lambda^*) = e^{\lambda^* \int_0^\tau (F_x'^2 + F_y'^2) dt} - 1 < 0.$$

因而，在此情况中总可以选取这样的 $s_2 > 0$($s_2 < s_1$)，使得有

$$\Psi^*(s_2, \lambda^*) < 0. \tag{6.19}$$

从(6.18)和(6.19)，显然可以推出，在系统(A_λ^*)中，除了 L_0 之外，还存在着一条闭轨线，它与线段 l 之交点上的 s 值介于 s_1 和 s_2 之间.

最后，由于

$$\Psi^*(0, \lambda^*) = 0, \ \Psi^{*\prime}(0, \lambda^*) < 0,$$

总是可能指出一个 $s_3 < 0$，使得 $\Psi^*(s_3, \lambda^*) > 0$，即 $\Psi^*(s, \lambda^*)$[1] 在开区间 $s_3 < s < s_2$ 上又一次等于零，而系统(A_λ^*) 亦又有一条

1) 原书为 $\Psi^*(s, \lambda)$——译者注.

闭轨线(除 L_0 外)，它和线段 l 在上开区间里相交*.

但对任一固定的 λ^*，总可以指出一变更系统($\tilde{A}$)

$$\frac{dx}{dt}=\tilde{P}(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=\tilde{Q}(x, y), \tag{6.20}$$

其右端是 x 及 y 的解析函数，且与系统(A_λ^*)任意相近，并且有

$$\tilde{\Psi}(s_3)>0, \quad \tilde{\Psi}(s_2)<0, \quad \tilde{\Psi}(s_1)>0,$$

其中 $\tilde{\Psi}(s)$ 是系统($\tilde{A}$)的后继函数，和 $\Psi(s)$ 类似．那么必定存在着这样的 $\tilde{s}_1$ 及 $\tilde{s}_2$ 值，使得

$$\tilde{\Psi}(\tilde{s}_1)=0, \quad \tilde{\Psi}(\tilde{s}_2)=0,$$

即在系统($\tilde{A}$)中至少存在二个和无切线段相交的闭轨线(交点为此线段上的对应于 $\tilde{s}_1$ 及 $\tilde{s}_2$ 的点)．取绝对值充分小的 λ 及 s，以及和系统($\tilde{A}_\lambda$)充分相近的系统($\tilde{A}$)，永远可以作到，使得此系统($\tilde{A}$)和系统(A)任意地相近，而此系统的上述闭轨线位于轨线 L_0 的任意小邻域内．从此显然可以推出，系统(A)不可能是“粗的”，于是对情况 1)(复杂极限环)定理的论断得证．

在情况 2)中，即所有轨线皆闭的情况中，考虑同一个辅助非解析系统(A_λ^*)．和前面一样，有：

$$f^{*\prime}(0, \lambda^*)=e^{\lambda^*\int_0^{\tau}(P_x^{*\prime}+Q_y^{*\prime})dt}.$$

因而，函数 $\Psi^*(s, \lambda)$ 在所考虑的值 s 的开区间上不恒等于零．不难看出，此时对任一系统($\tilde{A}$)，它有解析右端且和系统(A_λ^*)充分地相近，对应的 $\tilde{\Psi}(s)$ 亦不恒等于零．但这意味着，与所考虑的那一段无切线段相交的、系统($\tilde{A}$)的所有轨线，不全是闭轨线．由于能够指出这种和系统(A)任意相近的系统($\tilde{A}$)，它具有上述性质，那

---

* 由条件：$\Psi^*(s_3, \lambda^*)>0$，$\Psi^*(0, \lambda^*)=0$，$\Psi^{*\prime}(0, \lambda^*)<0$，$\Psi^*(s_2, \lambda^*)<0$，$\Psi^*(s_1, \lambda^*)>0$，$s_3<0<s_2<s_1$，不能得出“又有一条闭轨线(除 L_0 外)”的结论．因而在区间(s_3, s_2)上(A_λ^*)只有一条闭轨线，即 L_0，而这是前面已知的，无需证明．所以本段目的不在于证明(s_3, s_2)上除 L_0 外还有一闭轨线，而在于确立：“$\Psi^*(s_3, \lambda^*)>0$，$\Psi^*(s_2, \lambda^*)<0$，$\Psi^*(s_1, \lambda^*)>0$，$s_3<0<s_2<s_1$，s_3，s_2，s_1 均可任意地小(绝对值)”，这是下面要用到的，即对变更系统($\tilde{A}$)：$\tilde{\Psi}(s_3)>0$，$\tilde{\Psi}(s_2)<0$，$\tilde{\Psi}(s_1)>0$，因而在(s_3, s_2)上有一条闭轨线(非 L_0)，在(s_2, s_1)上亦有一条——译者注．

么显然系统(A)是非粗的[1].

当系统(A)之极限环 L_0 是简单的极限环时,即对它有 $h \neq 0$,因之亦有 $f'(0) \neq 1$ 及 $\Psi'(0) \neq 0$ 时,这个极限环是"粗的",即是说,它可以在粗系统中存在.在这个情况中,对应于极限环 L^0 的,曲线 $\bar{s} = f(s)$ 和直线 $\bar{s} = s$ 的交点 R_0,是一个简单的交点,亦即,在此点上曲线 $\bar{s} = f(s)$* 不和直线 $\bar{s} = s$ 相切.那么曲线 $\bar{s} = \tilde{f}(s, \lambda)$将和直线 $\bar{s} = s$ 有一个且仅一个公共点 R,这里 $\bar{s} = \tilde{f}(s, \lambda)$ 对应于任一函数 $\tilde{f}(s)$,而 $\tilde{f}(s)$ 及其导数 $\tilde{f}'(s)$ 和函数 $f(s)$及其导数 $f'(s)$ 充分地相近,点 R 也和 R_0 任意地相近[2]. 显然,由此可得结论,在任一个和系统(A)充分相近的变更系统($\tilde{A}$)中,将存在一个且仅一个极限环 $\tilde{L}_0$**,它和系统($\tilde{A}$) 的极限环 L_0 是任意地接近的. 由于 $\tilde{f}'(s)$ 和 $f'(s)$ 相差得任意小,如果极限环 L_0 是稳定的,则此极限环 $\tilde{L}_0$ 亦是稳定的,如果极限环 L_0 不稳定时,$\tilde{L}_0$ 亦是不稳定的.

此外,在上述基础上,不难阐明,在极限环 L_0 之某邻域上,系统(A)及($\tilde{A}$)的轨线划分彼此差别甚小.

应指出,不论在平衡状态情况中,还是极限环情况中,粗性的要求都给系统之微分方程加上了解析性的条件.从拓扑上看,对简单与复杂平衡状态以及简单与复杂极限环,其邻域上的轨线划分可能是全同的(例如,奇重复杂极限环和简单极限环的轨线划分拓扑全同).

4. 粗系统中鞍点分界线的性状. 现在进而研究粗系统中可能存在的另一种奇轨线,那就是鞍点的分界线.粗性的要求同样地亦对鞍点分界线的性质加上了一些限制.如果鞍点 O 的一个分

---

1) 在极限环为偶重的情况,以及情况 II 里,如果引用本章定理 IV 中采用的系统,即这样的系统,其向量是将系统(A)之向量场转过某一常量角而得到的,那么粗性的证明将是十分简便的.

* 原书为 $f(s, \lambda)$——译者注.

2) 不难看出,不仅函数 $f(s)$ 与 $\tilde{f}(s)$ 相近的要求,而其导数 $f'(s)$ 与 $\tilde{f}'(s)$ 相近的要求亦是关键性的.

** 原书为 L_0——译者注.

界线当 $t\to+\infty$ 时趋近于此鞍点，而当 $t\to-\infty$ 时亦趋近于鞍点(同一鞍点 O 或异于 O 之鞍点)，那么我们将简单地说，此分界线是"由鞍点到鞍点"的.

定理IV. 粗系统中不可能存在从鞍点到鞍点的分界线.

为了证明定理，用反证法，即假定粗系统(A)中存在着从一个鞍点 O 到另一个鞍点 O' 的分界线(作为例子，参看图 299)，或存在着回到同一鞍点的分界线(参看图 293).

研究第一种情况(对分界线回到同一鞍点的情况，研究过程完全类似).以 L 表示系统(A)的分界线，它是从鞍点 O 到鞍点 O' 的.

考虑变更系统:

$$\frac{dx}{dt}=P-\alpha Q,\quad \frac{dy}{dt}=Q+\alpha P. \tag{6.21}$$

称此系统为系统($\tilde{A}_\alpha$). 不难看出，系统($\tilde{A}_\alpha$)的平衡状态所在的那些点亦是系统(A)之平衡状态所在的点(反之亦然). 因为只有当同时有

$$P=0,\ Q=0$$

时，

$$P-\alpha Q=0,\ Q+\alpha P=0$$

才可能同时成立. 在给定点 $M(x,y)$，系统(A)之轨线的切线和系统($\tilde{A}_\alpha$)之轨线的切线间的夹角 φ 的正切，显然为:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\dfrac{Q+\alpha P}{P-\alpha Q}-\dfrac{Q}{P}}{1+\dfrac{Q+\alpha P}{P-\alpha Q}\,\dfrac{Q}{P}}=\alpha,$$

即 $\operatorname{tg}\varphi$ 对域 G 中的所有点都是相同的.

我们将说，系统($\tilde{A}_\alpha$)给定的向量场相对系统(A)的向量场转过一常角度(正的或负的有赖于 α 之符号).

由上所述，点 O 及 O' 亦是系统($\tilde{A}_\alpha$)的平衡状态. 因为根据假设，系统(A)是粗的，点 O 及 O' 亦应该是系统($\tilde{A}_\alpha$)的鞍点，而系统($\tilde{A}_\alpha$)中，亦应有从 O 到 O' 的分界线 L_α. 总可以取甚小之 $\varepsilon>0$，使得 L 的 ε 邻域里，除了 O 及 O' 点外，不再有系统(A)的其他平

衡状态，因而其中亦没任一个整闭轨线（参看第V章 §8 示性数理论的推论 I 及 II），此外它除了全部包含 L 以外，不再全部包含系统 (A) 之其他由 O 到 O' 的分界线．对所有的充分小的 α，系统 $(\tilde{A}_\alpha)$ 的分界线 L_α 将全部位于 L 的 ε 邻域之内．此时，分界线 L 及 L_α 或者有或者没有公共点．

先假定它们没有公共点，并研究简单闭曲线 C_0，即由 L，L_α，鞍点 O 和鞍点 O' 组成的曲线．这条闭曲线显然全部位于选定之 L 的 ε 邻域内．系统 $(\tilde{A}_\alpha)$ 的分界线 L_α 很明显是系统 (A) 之轨线的"无切线段"（因为系统 $(\tilde{A}_\alpha)$ 的向量场相对系统 (A) 的向量场沿同一方向有一常转角），于是系统 (A) 之轨线沿同一方向穿过 L_α．在所有这些和 L_α 相交的系统 (A) 的轨线中，必有异于由鞍点 O 到 O' 之分界线者．令 L' 为这样的轨线．显然在 L' 和 L_α 的交点处，L' 或者当 t 增加或者当 t 减少时进入 C_0 之内部．假定当 t 增加时，L' 进入 C_0 之内部．随着 t 的继续增加，它已经不能再从 C_0 中穿出，因为它不能和 L 相交（因为 L 和 L' 都是系统 (A) 的轨线），同时它亦不能穿越 L_α 从 C_0 中出来（因为它这时应以相反的方向和 L_α 相交）．所以当 $t \to +\infty$ 时，L' 应趋向某一极限集合，此集合全部位于 C_0 之内，亦即，L 的 ε 邻域之内．但是在此邻域内不可能有任何的极限集合．因为根据这个邻域的选择，其中没有异于 O 及 O' 的平衡状态，以及系统 (A) 的任何一个整闭轨线；其中亦不可能有类型 III 的极限集合（参看本章 §2 第 5 小节），因为不难看出，在这样的极限集合里，必定至少有一个异于 L 的从鞍点 O 到 O' 的分界线，而在所考虑的 L 之 ε 邻域内，除了 L_0 之外，已不再有整分界线了．

于是，我们导出矛盾，因而在所研究的情况中定理得证．

在 L 及 L_α 有公共点的情况下，可考虑这样的简单闭曲线 C_0，它是由 O 点和由 O 点到 L 及 L_α 的最近交点间之二段 L 及 L_α 组成的（或者 C_0 是由二相继交点间之 L 及 L_α 的二段组成的），并进行完全类似于前面所进行的讨论，就可在此情况中证明定理的论断．

5. 粗性的必要及充分条件． 总合得到的结果，可以提出以

下系统(A)在域G内是粗的必要条件：

I. 在域G内只能有简单(粗的)平衡状态，即这样的平衡状态，在这些点上特征方程式之根的实部异于零．这个要求还可以叙述如下：在域G内不能有平衡状态 $x = x_0$ 及 $y = y_0$：

a) 对它们：有

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0;$$

b) 对这些点当 $\Delta > 0$ 时 $\sigma = [P'_x(x_0,y_0) + Q'_y(x_0,y_0)] = 0$.

II. 在域G里只能有简单(粗的)极限环，即特征指数不为零的极限环．这一要求还可以这样提出：在域G里不能有这样的周期运动：$x = \varphi(t), y = \psi(t)[\varphi(t+\tau) = \varphi(t), \psi(t+\tau) = \psi(t)]$，对它们，有

$$h = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (P'_x + Q'_y)dt = 0.$$

III. 在域G里不能有从鞍点到鞍点的分界线．

由于这些条件，在粗系统中，仅可能有下列类型的奇轨线：简单(粗的)平衡状态，简单(粗的)极限环，以及鞍点分界线，它的一端趋向于焦点、结点、极限环、或者此分界线于某时刻t到达无切环边界(G之边界)．

显然，此时粗系统中的极限集合只能够是平衡状态和极限环．

事实上，如果鞍点分界线是极限集合的话，则不难看出，它应该是从鞍点到鞍点的，而这在粗系统中是不可能的．

于是，粗性要求不允许奇轨线具有复杂性．上述条件I, II及III是给定系统之粗性的必要条件．

可以阐明，这些条件也是系统具有粗性的充分条件．也就是说，在粗系统理论中有以下基本的逆定理[1]．

定理 V. 如果系统

---

1) 我们在上面三个定理之后，直接地提出了这个逆定理，虽然这个定理的证明(我们不预备进行)将要部分地用到后面的知识．

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y)$$

在域 G 里(其边界为无切环 C)仅有:

1) 这样的平衡状态,对它们有 $\Delta\neq 0$ 且当 $\Delta>0$ 时有 $\sigma\neq 0$;

2) 这样的极限环,对它们有 $h\neq 0$;

3) 这样的分界线,它们不是从鞍点到鞍点的,那么这样的系统在域 G 中是粗的.

虽然不预备证明这个定理,但我们还将对它作一些说明.

如果有某动力学系统,满足条件 1), 2) 及 3), 是粗的话, 那么,其右端的不大变化不会改变它的轨线划分之拓扑结构,只不过使整个这个划分有"小变动". 但是当条件 1), 2) 及 3)满足时,亦即满足条件: 系统(A)之奇轨线仅是简单平衡状态*、简单极限环以及非从鞍点到鞍点的分界线 (分界线可能类型的详细列举参看后面)时, 不难证明, 当系统(A)右端有不大变化时, 或换一种说法,当换成变更系统($\tilde{A}$)时, 奇轨线不改变自己的性质, 而仅有小的变动. 这个事实使定理的论断几何上十分清晰. 为了严格地证明定理,需要对任一个和系统(A)充分相近之变更系统($\tilde{A}$), 实际作出域 G 到其自身的这种映射,使得在此映射下, 系统(A)的轨线映射为系统($\tilde{A}$)的轨线,且对应点彼此间的距离可任意地小.

6. 粗系统中可能轨线的分类. 进而讨论粗系统中的可能轨线的详细分类.

此时为肯定起见,假设系统($\tilde{A}$)的所有轨线, 在作为域 G 之边界的无切环的各点上, 随时间 t 的增加都进入此域. 我们得到轨线的 16 种类型(在图 304 上这些类型的轨线都表示出来了,并标有相对应的号码).在下表中,这些轨线的类型又分成五个基本类型.

奇(轨道不稳定)轨线

I. 平衡状态
- 稳定焦点(结点) (1)
- 不稳定焦点(结点) (2)
- 鞍点 (3)

* 原书中没有"简单平衡状态"——译者注.

II. 极　限　环	稳定的	(4)
	不稳定的	(5)
III. 分　界　线	从不稳定焦点或结点倒缠开的	(6)
	从不稳定极限环倒缠开的	(7)
	通过无切环边界进入域 G 的	(8)
	趋近于稳定焦点或结点的	(9)
	趋近于稳定极限环的	(10)

非奇(轨道稳定)轨线[1]

IV. 趋向于稳定焦点及结点之轨线	从不稳定焦点及结点倒缠开的	(11)
	从不稳定极限环倒缠开的	(12)
	通过无切环边界进入域 G 的	(13)
V. 趋向于稳定极限环的轨线	从不稳定焦点及结点倒缠开的	(14)
	从不稳定极限环倒缠开的	(15)
	通过无切环边界进入域 G 的	(16)

正象本章§2中见到的，区域 G 被奇(轨道不稳定)轨线分成子域，每一子域中充满着性状相同的非奇(轨道稳定)轨线．此时所有子域可分成两类：与域 G 之无切环边界 C 接触的子域及内子域．注意到上面列出的、粗系统中可能有的奇轨线，不难看出，每一内子域之边界的组成中，有一个“吸引元素”或“汇”，它或是稳定结点或焦点，或是稳定极限环，以及一个“排斥元素”或“源”，它或是不稳定结点或焦点，或是不稳定极限环．

显然，“吸引元素”或“汇”就是给定子域之任一非奇轨线的 ω 极限集合的点，而“排斥元素”或“源”就是子域之非奇轨线的 α 极限集合的点(参看本章§3第四及五小节)．在每一个和边界环接触的子域里，仅存在一个吸引元素——汇．不难看出，此时不同奇轨线的作用是不同的．

1) 可以证明，在粗系统中，所有非奇轨线不仅是轨道稳定的，亦是当 $t\to+\infty$ 及当 $t\to-\infty$ 按李亚普诺夫稳定的．这一点，对于当 $t\to+\infty(t\to-\infty)$ 时趋近于平衡状态的轨线，可用398页§3第二小节之脚注的讨论来阐明，而对于当 $t\to+\infty(t\to-\infty)$ 时趋近于极限环之轨线，参看第V章§6．

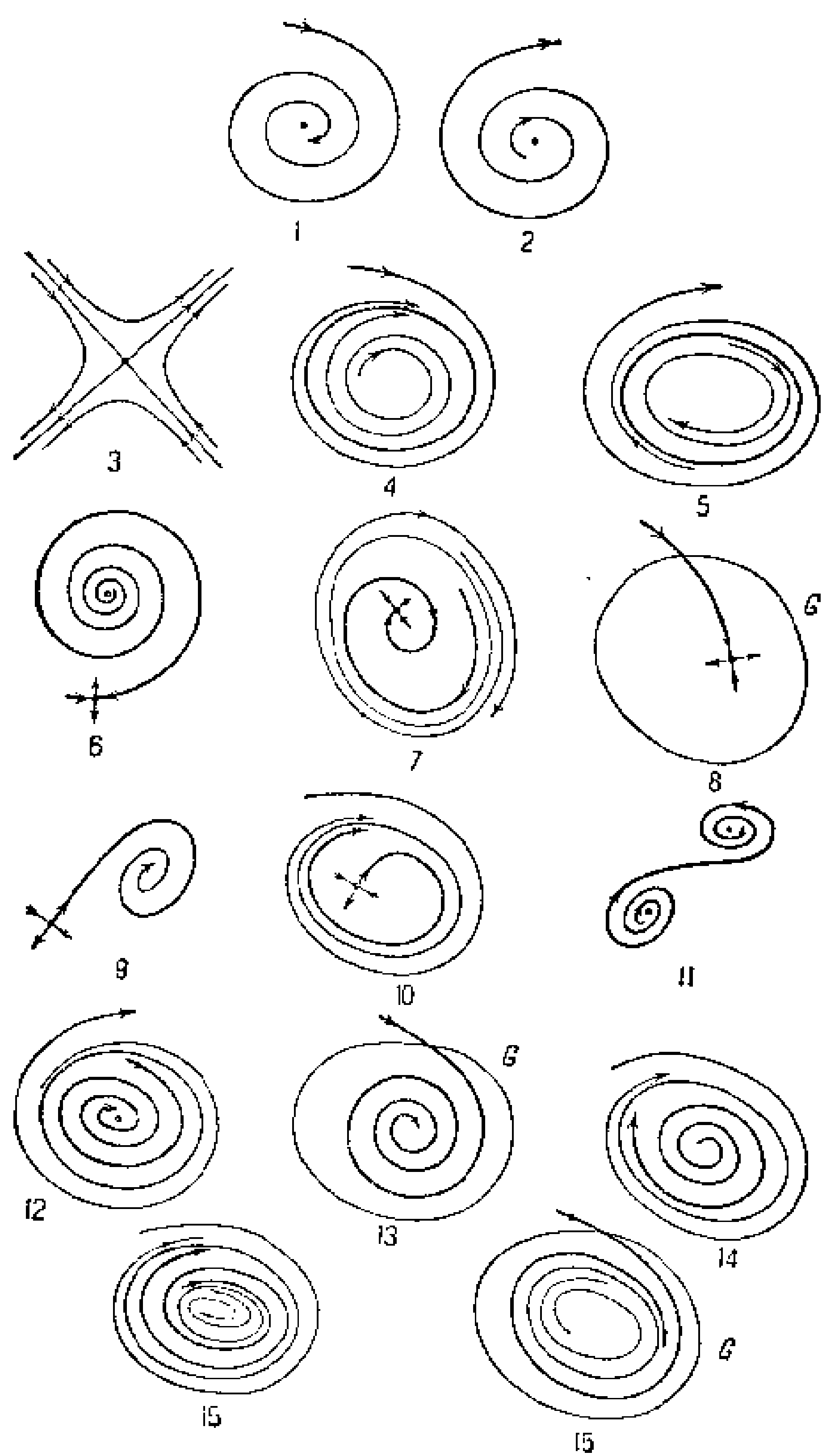


图 304

焦点(或结点)可以是源或汇;虽然它们属于子域的边界,但是在将相平面划分为子域时,它们不起什么重要作用. 鞍点型的平衡状态不可能是源或汇;和结点一样,它亦属于子域的边界; 虽然鞍点对将相平面划分为子域不起重要作用,但是它们作为分界线的产生者这一点,是十分重要的. 分界线(鞍点分界线)不能是源亦不能是汇,它们是属于子域边界的,并对相平面划分为子域这一点,起着重要作用,可以这样说,分界线是"分水岭",它将性状不同的轨线分隔开来. 对相平面划分为子域,极限环起着重要作用,它同时是吸引元素(ω 极限集合)或排斥元素(α 极限集合).

可以证明(参看本章 § 3),如果我们知道了全部奇轨线,即知道了平衡状态、极限环及分界线的相互位置,知道了沿极限环及分界线的运动走向,还知道了吸引元素及排斥元素的稳定性(结点、焦点及极限环),那么,这些知识就足以使我们单值地建立起轨线划分的拓扑结构,亦即,足以对粗动力学系统进行完整的定性研究.

7. 粗系统中可能的子域类型. 下面将阐明,在粗系统里,每一子域上的轨线划分之拓扑结构有那些可能种类. 此时在研究每一子域时,把边界连同子域一起考虑. 此外,对所有拓扑结构相同的子域,我们还将把它们分为二类; 即是说,如果对一些子域存在着保持转向不变的[1]拓扑映射(将轨线映射为轨线的映射),在此情况中,将称这些子域属于同一类.

可以证明,在粗系统中,子域的可能类型是有限的.

不预备全面地研究所有类型,只分析一些简单的情况. 先对不与无切环接触的内子域进行分类;此时,利用将 t 变为 $-t$ 而得到的子域,我们将不计入(当时间这样改变时,沿"分隔"轨线之运动的方向以及吸引元素和排斥元素的稳定性都将变化). 任取一子域. 此时可能有以下二种情况:

---

1) 拓扑映射分为二类: 一类是保持转向不变的映射,另一类是改变转向的映射(用另一术语来叙述——保持方位不变的映射及改变方位的映射).

反射映射是改变转向的映射之最简单的例子. 由于正文中所说的,二个子域,其一为另一的反射映射时,我们将认为它们是属于不同类型的.

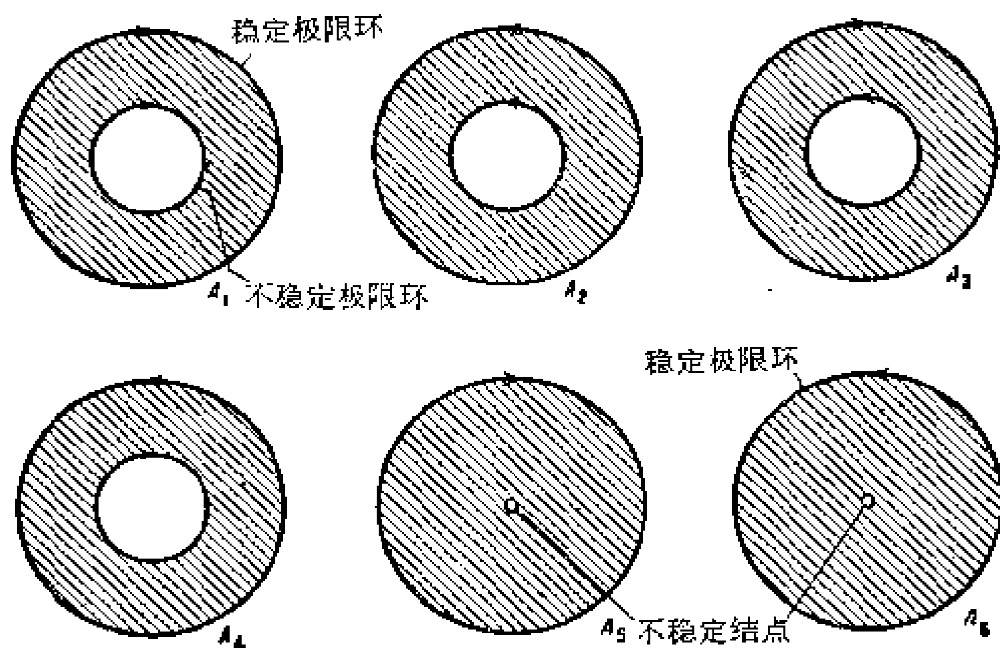


图 305

A) 边界中无鞍点，B)边界中有鞍点*.

研究第一种情况(A). 如果边界中没有鞍点，则从此可推出，边界中必定有极限环，因为平面不能由平衡状态将其分为子域，而可以组成边界的奇轨线为：分界线(此时必然有鞍点)、极限环和平衡状态. 如果极限环是边界的一个组成部分，则此时又有二种情况：

AI. 子域的轨线位于极限环之外.

AII. 子域的轨线位于极限环之内.

在第一情况中(由于没有鞍点)还应有一个(外)极限环. 因为显然，在此情况中其他允许的奇轨线不可能属于边界，那么考虑到转向及稳定性，在此情况中我们得到子域的四种不同类型：AIa_1, AIa_2, AIa_3, AIa_4 (图 305 中的情况 A_1, A_2, A_3, A_4). 在第二情况里，只可能有两种：或者在其中又有极限环——此时又得到上述几个类型，或者其中有焦点(或结点)——此时考虑到转向及稳定

* 为了使分类之各情况的标号与图中的标号相符，将原书中的 1), 2) 改为 A) 及 B)，以下适当的地方都作了改变——译者注.

性，又得到两种类型的子域：$AIIb_1$ 及 $AIIb_2$(图 305 上之情况 A_5 及 A_6)。

现在分析第二基本情况(B)，即边界中有鞍点的情况．此情况亦应分成二类：

BI．边界中没有极限环；

BII．边界中有极限环．

研究第一类 BI，此时边界中没有极限环但有鞍点．正象熟知的，鞍点有四根胡须：两根稳定的，两根不稳定的*．首先假定(情况 BIa)边界中有二根同稳定性的胡须，例如都是不稳定的．因为每一根这样的胡须属于区域的边界且不能（由于粗性）再进入鞍点，则它的渐近性状与其他轨线全同，即此二不稳定胡须将趋向稳定元素，在此情况中趋向于稳定结点(或焦点)．这样我们便得到闭曲线 C，它是由鞍点、二根不稳定鞍点胡须以及稳定结点(或焦点)组成的．我们研究的子域，或者全部位于这个闭曲线的外部，或者内部．设它全部在内部．试看边界中此时还有什么．显然位于曲线 C 内部的那根稳定的鞍点胡须亦应该是边界．它趋向不稳定元素——不稳定结点(或焦点)，此不稳定元素必然位于曲线 C 的内部，这是可以想到的．这样，所研究之子域的边界中有：相应分布之鞍点的三根胡须和三个平衡状态．边界中是否还能有其他东西？因为我们假设了边界中没有极限环，由于界边只能包括一个源及一个汇，那么边界中只能再有带胡须的鞍点．我们证明这是不可能的，所研究的连通子域边界仅仅能有上述六个奇元素．采用反证法．假定，在曲线 C 中某处有一鞍点，它也是边界的一部分．既然鞍点进入边界，则其胡须也必进入边界．

不难看出，如果一根胡须进入边界，则另一相邻的胡须亦必是边界．于是边界中应有一根稳定胡须及一根不稳定胡须．因为这些分界线必定趋向于上面说过的稳定及不稳定元素，则我们的子域将被分成二块，使得曲线 C 已经不再是子域的边界了．我们导

---

* 意为二条趋向鞍点的，二条离开的．以下同此——译者注．

致了矛盾. 对我们考虑的这一类来说，不可能再有其他奇轨线进入边界.

我们还没有研究另一类，即所考虑的子域全部位于曲线 C 之外部的一类，C 是属于边界的. 进行和前面同样的推论，容易证明此情况也将导致矛盾. 于是情况 BIa 只能由一种子域的拓扑类型来实现(参看图 306 情况 BIa).

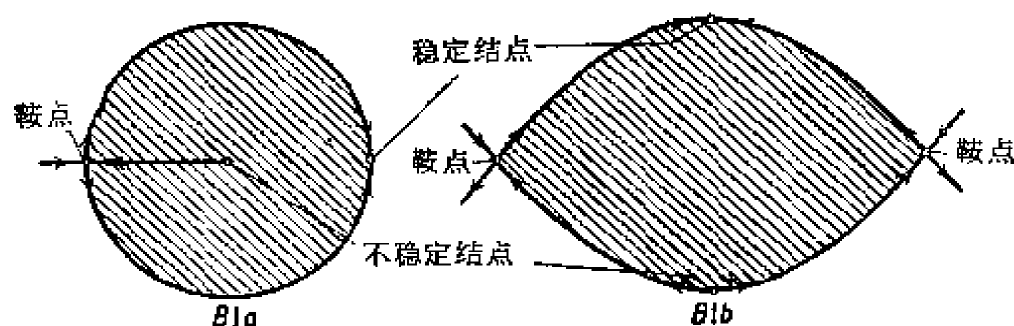


图 306

现在假设(情况 BIb)边界中有两根相邻的、具有不同稳定性的鞍点胡须：一根稳定的，一根不稳定的，而另两根胡须不属于被考虑之子域的边界. 因为胡须不能是由鞍点到鞍的，则稳定胡须必定由于不稳定结点(或焦点)出来的，而不稳定胡须是走向稳定结点(或焦点)的. 因为按假设，所考虑之另两根胡须不属边界，则边界中必然还有一个鞍点. 关于第二个鞍点的胡须之性状，此处显然可能有两种情况(图 307). 情况 I 是不可能的，因为两根同稳定性之胡须同时进入子域边界的类型已研究过了，并阐明了，此时边界中已不能再有第二个鞍点. 剩下还有情况 II. 此处亦应作两个假定：或者我们的子域全部位于曲线 C 内部，或者外部，此曲线

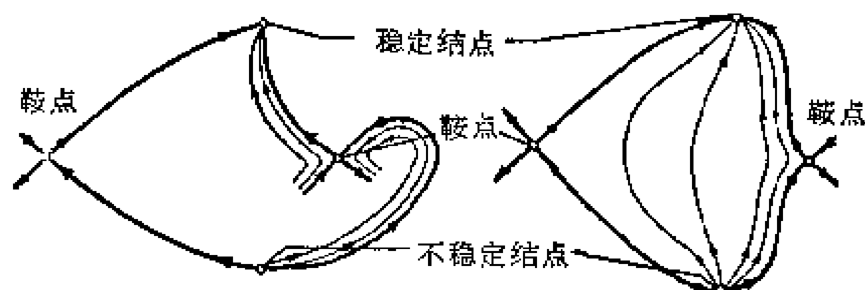


图 307

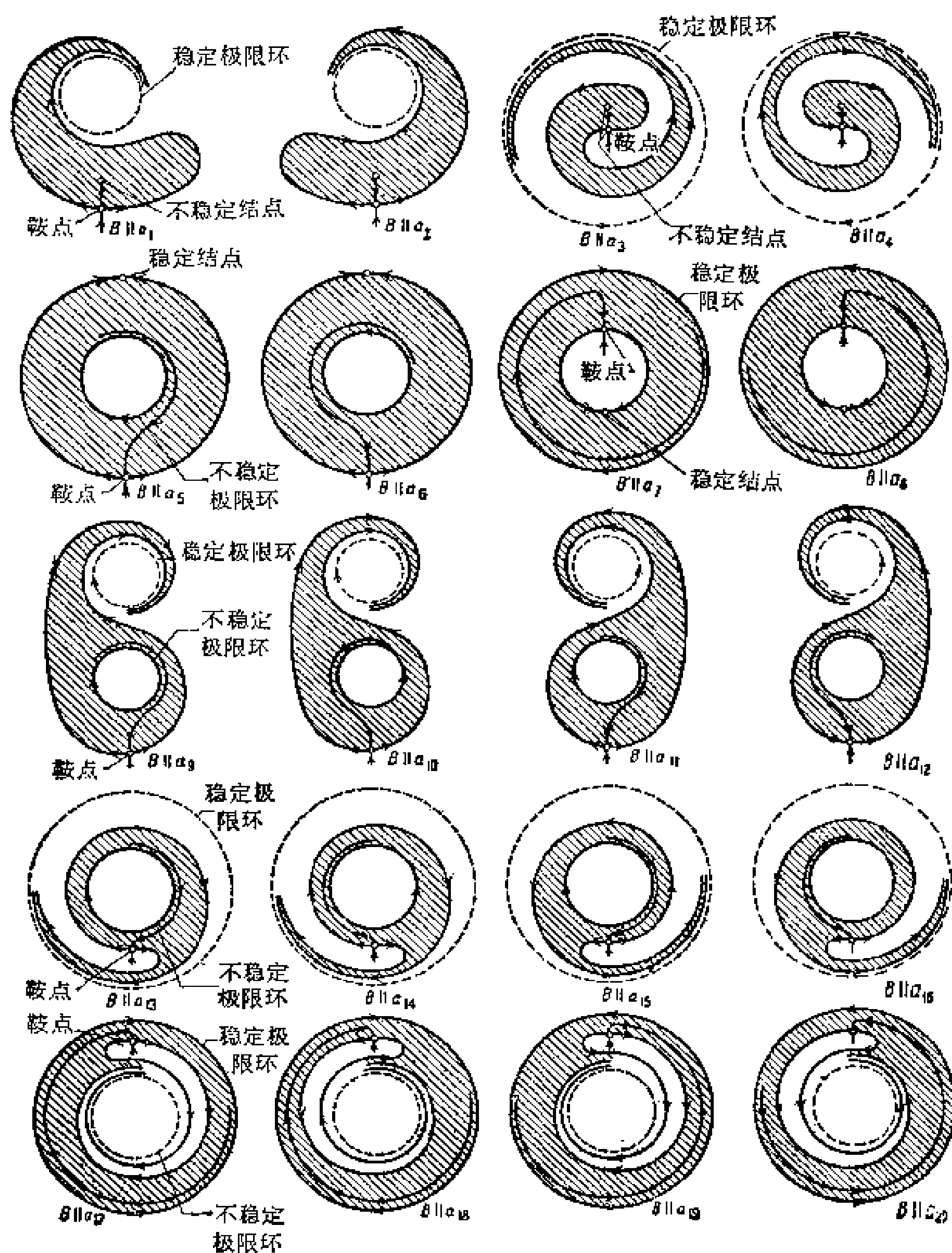

稳定极限环
鞍点
不稳定结点
$B\|a_1$
$B\|a_2$
稳定极限环
鞍点
不稳定结点
$B\|a_3$
$B\|a_4$
稳定结点
鞍点
$B\|a_5$
不稳定
极限环
$B\|a_6$
稳定极
限环
鞍点
稳定结点
$B\|a_7$
$B\|a_8$
稳定极限环
不稳定
极限环
鞍点
$B\|a_9$
$B\|a_{10}$
$B\|a_{11}$
$B\|a_{12}$
稳定极
限环
鞍点
$B\|a_{13}$
不稳定
极限环
$B\|a_{14}$
$B\|a_{15}$
$B\|a_{16}$
鞍点
稳定极
限环
$B\|a_{17}$
不稳定
极限环
$B\|a_{18}$
$B\|a_{19}$
$B\|a_{20}$

图 308

C是由四根胡须及四个平衡状态组成的．考虑第一个假定情况：子域全部位于曲线C的内部．现证，所考虑的子域的边界不可能再有其他奇轨线了．事实上，还可以进入边界的唯一的一些奇轨线是分界线，因之还有鞍点（按假设边界中不能有极限环，源及汇已经有了）．但是如果边界中再有鞍点的话，则必然也有相邻的两根胡须．这些胡须必定走向稳定及不稳定结点（或焦点），并将把我们的子域分成两部分，使得曲线C不可能全部属于子域的边界．我们得到了矛盾，因此待证的证完．不难推翻假定：子域全部位于曲线C的外部．于是情况 BIb 亦只能由一种子域的拓扑类型来实现（参看图 306 上的情况 BIb）．

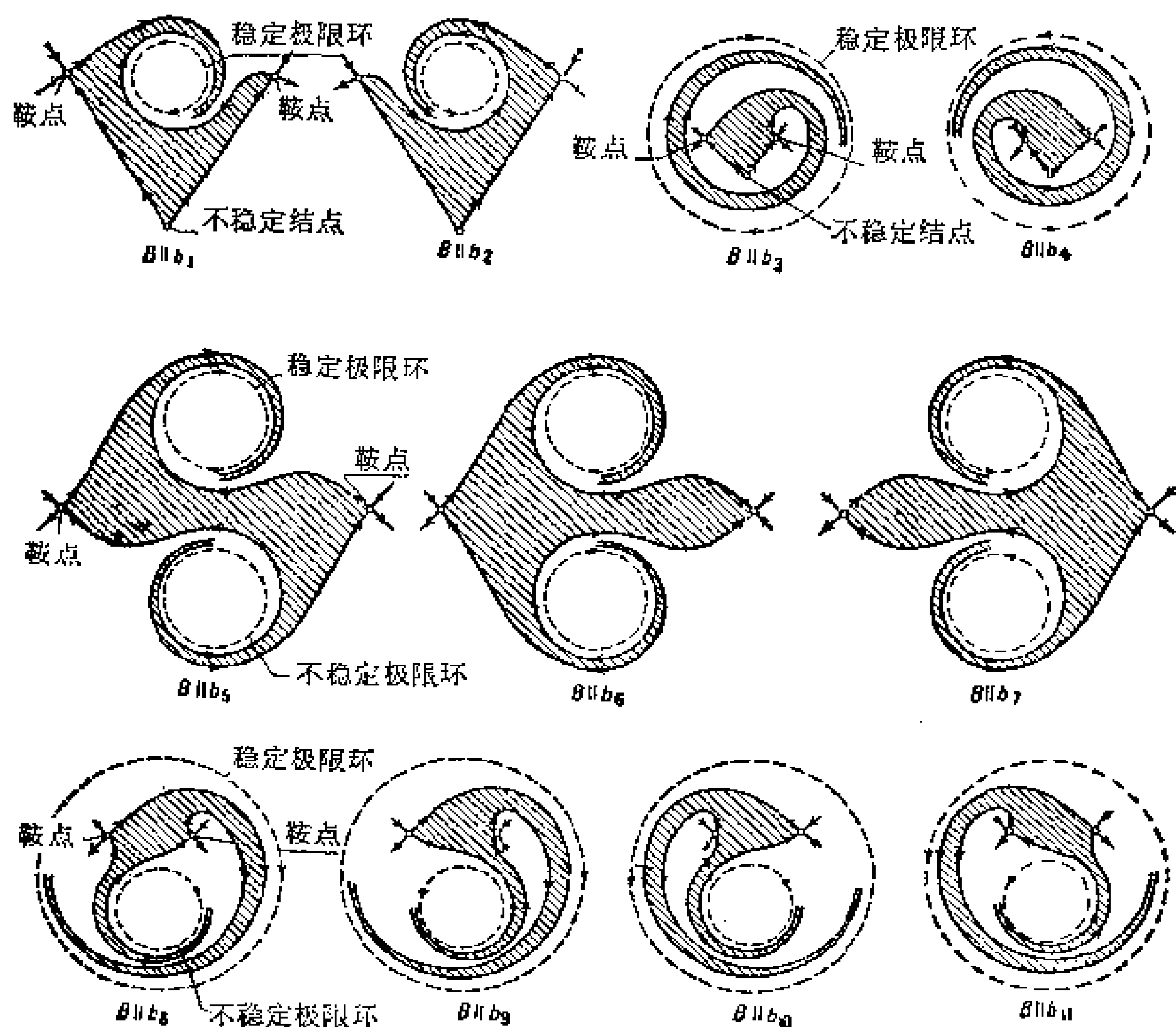
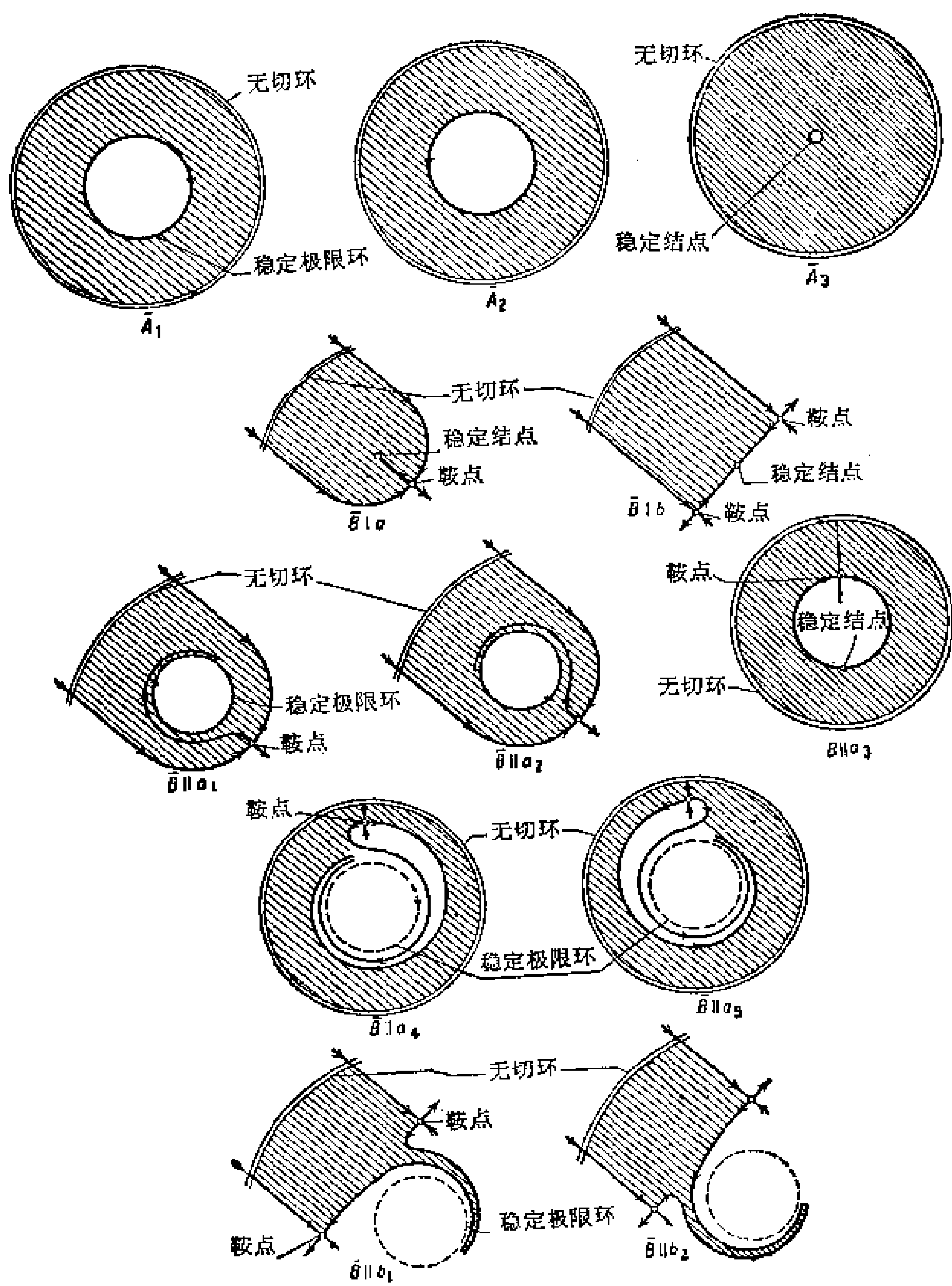


图　309



无切环
稳定极限环
$\bar{A}_1$
$\bar{A}_2$
无切环
稳定结点
$\bar{A}_3$
无切环
稳定结点
鞍点
$\bar{B}$ I a
鞍点
稳定结点
$\bar{B}$ I b
鞍点
无切环
稳定极限环
鞍点
$\bar{B}$ II a_1
$\bar{B}$ II a_2
鞍点
稳定结点
无切环
$\bar{B}$ II a_3
鞍点
无切环
稳定极限环
$\bar{B}$ II a_4
$\bar{B}$ II a_5
无切环
鞍点
稳定极限环
鞍点
$\bar{B}$ II b_1
$\bar{B}$ II b_2

图 310

我们将不再详细地研究最复杂的情况BII可能有的拓扑类型，在这些情况中，子域边界中有极限环及鞍点．此处的可能情况表示于图 308 及 309 上．应注意到，情况BII的各种类型在一定的意义上，是情况 BI 之各类型的对应类型．亦就是说，在情况 BI 的各类型中，相应地将一个或二个结点换为其他吸引元素或排斥元素——极限环，就可以得到情况 BII 的各种类型；由于一个环可以位于其他一个的内部或外部，并且还应区分环上的转向，所以类型的数目大大地增加了．对于边界与无切环相接触之子域的情况，亦不作专门的研究．此时可能出现的情况表示于图 310 上．

研究了粗系统中子域的各种类型之后，就产生了关于不同类型子域"同时存在规律"的问题．我们这里将不涉及这个尚未完全解决了的问题． 仅说明一个与此问题有一定关系的概念． 那就是，有时采用给定元素的大范围稳定域的概念是很方便的；大范围稳定域应这样理解，它是一些这样的子域，所有这种子域的吸引元素都是上述被研究的奇元素（给定元素）．这一注记作为我们对粗系统研究的结束[1]．

§5. 轨线定性图与参数的关系[10—13]

微分方程右端含有某一参数之动力学系统的情况，我们已经不止一次地研究过了，并且也研究了当此参数改变时，关于轨线划分之定性结构如何变化的问题（参看第II章）．现在在对所研究之微分方程组，作较第II章更加一般些的假设下，更详细地研究这个问题．

任一对应于实际物理系统的方程组，都包含有某些参数，这些参数的变化范围决定于问题的条件． 例如，这些参数可以是互导系数、迴路的电阻等等． 假定我们给予了这些参数某些固定值．

---

1) 再指出粗系统的一简单但十分重要的性质：利用近似方法作出所有奇轨线（平衡状态，极限环及分界线），就可以建立任一粗系统之轨线划分的定性结构．近似作奇轨线应有的精确度，决定于某一称作"粗度"的量[11]．

根据上一节所述，我们应该认为，如果参数有"小的"改变时，相平面上轨线的定性图并不改变，即对于给定的参数的特殊值，系统是粗的[1]，只有在这种情况下，参数有给定特殊值时的定性图能够反映真实物理系统．但是当参数值有甚大改变时，一般来说，物理系统之运动性质将有很大变化．例如，对一些参数值，系统中有自振，而对另一些参数值，就可能没有自振．因而，当参数值有较大改变时，对应于所考虑的物理系统的微分方程所决定的轨线之定性图亦将改变．

我们的任务是研究参数变化时，轨线在相平面上之定性图的改变．为简单起见，我们假定，所研究之微分方程组的右端仅与一个参数 λ 有关(对有较多参数的情况，研究亦类似)．于是所研究之系统为：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y, \lambda), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y, \lambda).\end{aligned}\right\} \tag{6.22}$$

此外我们假设，右端 $P(x, y, \lambda)$ 及 $Q(x, y, \lambda)$ 在 x 及 y 的某一域 G(与 λ 无关)里，是 x 及 y 的解析函数，且对域 $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ 中之 λ 值，亦是 λ 的解析函数，其中 λ_1 及 λ_2 为某二常量．

研究参数改变时轨线变化所必需的基本定理，是附录 I 中提出的定理 IV, V 及 VI．但是正象在本章 § 4 中指出的，这些定理回答的问题仅仅是：当参数改变时，对应于有限时间间隔的那段轨线将如何变化，丝毫也不直接涉及整轨线将如何变化，或轨线定性图将如何变化等问题．当参数改变时，轨线定性图将如何变化的问题需要专门的研究．

1. 参数的分枝值． 提醒一下第 II 章 § 5 中所引 λ 的参数分枝值的定义．设我们给定了某个值 $\lambda = \lambda_0(\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2)$．如果存在着这样的 ε $(\varepsilon > 0)$，使得对所有满足条件 $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ 的

---

1) 或"相对粗"的，亦即，对给定的"系统和参数的依赖关系"是粗的．但为简单计，我们将只假定系统是粗的．

λ 值，相平面的轨线划分之拓扑结构全同，那么我们说 $\lambda = \lambda_0$ 是参数的普通值．值 $\lambda = \lambda_0$ 称为参数的分枝值，如果可以找到和 λ_0 任意接近的 λ 值，对这些值，相平面上的轨线划分定性图，和 $\lambda = \lambda_0$ 时的定性图并不相同．从参数分枝值定义本身可以看出，对这种值，系统不可能是粗的．

正象我们知道的，相平面的轨线划分之定性图，决定于所谓的奇元素，奇轨线(参看本章之§3)．所以，为了研究轨线定性图对参数的关系，应研究全部奇元素和参数的依赖关系．在本章中，我们将研究奇元素和参数间之依赖关系的一些情况，主要是极限环．

假定当 $\lambda = \lambda_0$ 时我们的系统是粗的，亦就是说，在相平面上存在着决定域 G 的无切环，在此区域中，所有平衡状态都是粗的，即对它们有 $\Delta \neq 0$，且当 $\Delta > 0$，$\sigma \neq 0$，所有极限环的特征指数不等于零，同时分界线亦不是从鞍点到鞍点的．显然，根据粗系统的定义，以及方程组(6.22)右端是 λ 之解析函数的假设，值 $\lambda = \lambda_0$ 不可能是分枝值．

事实上不难看出，如果 $\lambda = \lambda_0$ 对应着粗系统，则我们总可以指出一个含有 $\lambda = \lambda_0$ 的 λ 的开区间(充分小)，使得对此区间中的任一 λ 值，系统也是粗的，且此时轨线的定性图和 $\lambda = \lambda_0$ 时的完全一样．从此很明显，不可能有"最末的粗的"值 λ(对应于粗系统的)，但可能有"最初的非粗的" λ 值．

为简化讨论，假设对考虑的所有 λ 值($\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$)，无切环永远保持是无切环．显然，只有参数 λ 的那些值是分枝值，对这些值，将出现具有非粗性质的奇元素．

下面是这种非粗奇元素的最简单的情况：

1）复杂平衡状态(这种平衡状态或者是新出现的，或者是从存在的简单奇点*，象结点和鞍点，汇合后得到的)；

2）退化的焦点或中心；

3）双重极限环(这种极限环或者是新出现的，或者是从稳定

---

* 原书为"简单点"——译者注．

的及不稳定的极限环相汇合后得到的)；

4) 从鞍点到鞍点的分界线.

当参数继续改变时，系统可能重新成为粗的；复杂奇点可能，或者消失，或者分裂成简单奇点；象以后可以看到的那样，退化焦点亦可能在改变稳定性性质及产生极限环后，变成非退化的.

2. 平衡状态的最简单的分枝. 首先叙述一些关于平衡状态和参数之依赖关系的简单想法. 第一，显然(在讲述所谓 σ，Δ 图时，我们已经讲过)，当参数值变化时，只有在对应于平衡状态的 Δ 及 δ 有一个等于零时，平衡状态的性质才能改变. 第二，容易看出，在我们对 $P(x, y, \lambda)$ 及 $Q(x, y, \lambda)$ 所作之假设下，闭曲线 N 的示性数

$$j = \frac{1}{2\pi}\int_N \frac{PdQ - QdP}{Q^2 + P^2}$$

是参数 λ 的连续(且是解析的)函数，只要在曲线 N 上没有平衡状态；从此可推出，当参数变化时，示性数并不改变，因为它只能是整数.

由此可看出，当参数改变时，示性数不等于零的平衡状态，一个也不可能出现，一个也不会消失. 如果我们有一个简单奇点——结点，则它可能，例如，消失，而且只能是在先和鞍点汇合，成为一示性数等于零的复杂奇点，然后才能消失. 反之，鞍点或结点可能以如下方式产生：先出现示性数等于零的复杂奇点，然后它再分成二个：鞍点及结点[1].

如果注意到，平衡状态是曲线(等倾线)

$$P(x, y, \lambda) = 0, \ Q(x, y, \lambda) = 0$$

的公共点，我们亦能得到上述结论. 在所有复杂奇点中，"最简单"[2]

---

1) 在某些情况中，适当地引入参数，使得当参数取某固定值时我们得到一复杂奇点，而当参数取邻近值时这个复杂奇点分成一些简单奇点，用这样的方法来研究复杂奇点，是很方便的.

2) 可以给不确定的话"最简单"的复杂奇点*以严格的定义. 那就是，如果只研究非粗的奇点，并从中分出"相对粗的"奇点，则这种相对粗的奇点将是鞍结点型奇点.

* 原书为"最简单"的奇点——译者注.

的是鞍点和结点汇合而成的复杂奇点． 这个奇点称之为"鞍结点"．可以证明[1]，这种奇点的邻域，具有图 311 所示之性质．如果当 $\lambda=\lambda_0$ 时所研究的系统具有这种奇点：鞍结点，而对所有和 λ_0 充分接近的 λ 值，系统没有这种点，则显然，当 λ 从 λ_0 开始变化时，鞍结点型奇点或将分而为二：鞍点和结点，或将消失．

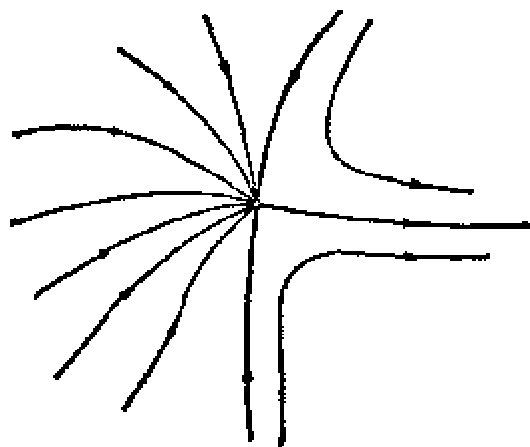


图 311

3. 从复杂极限环产生极限环． 现在考虑一些情况，在这些情况中，当参数穿过分枝值时，可能有极限环的产生或消失．在 § 4 中我们已经讨论过，当微分方程组右端改变时，复杂极限环可以分成若干个极限环，或者将消失．

现在就讨论这个问题，并假定右端是参数 λ 的函数．和本章 § 4 一样，此时我们将利用后继函数．

假定当值 $\lambda=\lambda_0$ 时，我们有无切线段 l 及在此线段上的后继函数．依据附录 I 之定理 VI（此定理在本节之初已谈到过），可以提出以下论断：总是可以指出这样的 $\eta>0$，使得对所有介于 $\lambda_0-\eta<\lambda<\lambda_0+\eta$ 中的 λ 值，无切线段仍是无切线段[2]，且对值 s；$s_1<s<s_2$（此处 s_1 及 s_2 可取为与 λ 无关的数），在无切线段上存在着后继函数 $\bar{s}=f(s,\lambda)$．并且函数 $f(s,\lambda)$ 是变量 s 及 λ 的解析函数，s 及 λ 的变化范围如上所述（参看本章 § 4 第 3 小节）．

现研究当 λ 变化时，极限环将怎样地产生及消失．

在 $\bar{s}$ 及 s 平面上研究拉梅尔图，即曲线 $\bar{s}=f(s,\lambda)$ 和直线

1) 为此需要的研究已超出本书的范围．

2) 容易看出，如果以"动的"无切线段（或弧）代替固定不动的无切线段，此时，这一线段（或弧）的后继函数的参数方程仍是 λ 的解析函数，在此情况中，这个论断亦是正确的．

$\bar{s}=s$. 闭轨线(参看第V章§7)对应于使 $f(s,\lambda)-s=0$ 的 s 值，即曲线 $\bar{s}=f(s,\lambda)$ 和直线 $\bar{s}=s$ 的公共点. 我们已见到过（参看第V章§7)，根据函数 $\bar{s}=f(s,\lambda)$ 在其与直线 $\bar{s}=s$ 之交点附近的性状,就可以对轨线在极限环近旁的性状作出结论.

首先假定,当 $\lambda=\lambda_0$ 时,无切线段在对应于 $s=s_0$ 之点处和粗极限环相交，即有 $h\neq 0$ 的极限环(参看本章§4 第三小节). 那么在拉梅尔图上，当 $s=s_0$ 时曲线 $\bar{s}=f(s,\lambda)$ 和直线 $\bar{s}=s$ 有简单交点 R_0,亦即,在它们的公共点上曲线 $\bar{s}=f(s,\lambda)$ 之切线与直线 $\bar{s}=s$ 不相重合,于是 $f'(s_0,\lambda)\neq 1$. 由于后继函数是 λ 的解析函数,那么当 λ 有小变化时，曲线 $\bar{s}=f(s,\lambda)$ 及其切线亦改变得不大,因而对于和 λ_0 充分相近之 λ 值,曲线 $\bar{s}=f(s,\lambda)$ 亦将与直线有交点 R，点 R 和 R_0 甚近,且不与直线 $\bar{s}=s$ 再有其他和 R_0^* 充分接近的交点(图 312).

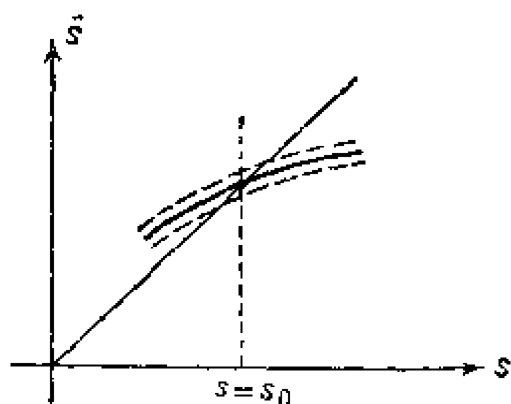


图 312

这就表明，对所有和 λ_0 充分相近的 λ 值，我们将有一个且仅一个（对应于和 s_0 充分相近的 s 值）极限环，它是稳定的或不稳定，这决定于极限环 L_0** 是稳定的还是不稳定的.

假定值 $\lambda=\lambda_0$ 是分枝值，且对此值 λ_0 系统 (22) 中存在着双重极限环(参看§4 第3小节)，它和无切线段交于 $s=s_0$ 点,此处 $s_1<s_0<s_2$. 那么表示后继函数

$$\bar{s}=f(s,\lambda)$$

的曲线,和直线 $\bar{s}=s$ 在对应于值 $s=s_0$ 的点处有简单的切点. 当参数有小的改变时,直线 $\bar{s}=s$ 和曲线 $\bar{s}=f(s,\lambda)$ 的公共点或将消失,或将分成两个简单交点(图 313). 假定对值 $\lambda<\lambda_0$，直线 $\bar{s}=s$ 和曲线 $\bar{s}=f(s,\lambda)$ 的公共点消失,而当 $\lambda>\lambda_0$ 时分而为二. 那么

---

* 原书为 R——译者注.

** L_0 为当 $\lambda=\lambda_0$ 时对应于 $s=s_0$ 的极限环——译者注.

当参数 λ 从某一值 $\lambda_1 < \lambda_0(|\lambda_1 - \lambda_0| < \eta)$ 变到另一值 $\lambda_2 > \lambda_0$ $(|\lambda_2 - \lambda_0| < \eta)$，系统开始时没有极限环和无切线段 l 相交，然后出现一个双重("半稳定的")极限环，再后随着参数的改变，此极限环分成两个简单极限环，其中一个是稳定的，一个是不稳定的[1]。反之，双重极线环亦可从两简单极限环的汇合得到，其中一个是稳定的，一个是不稳定的。

类似地可以研究更复杂的情况，即当 $\lambda = \lambda_0$ 时有 k 重极限环 $(k \geq 3)$ 的情况，并研究它分解成 k 个简单环或一些低重环的问题，但是我们将不作进一步讨论。仅指出，上述想法亦可以用另一种几何形式来讲述，并归结为普通的分枝理论，为此应引入前面研究过的函数

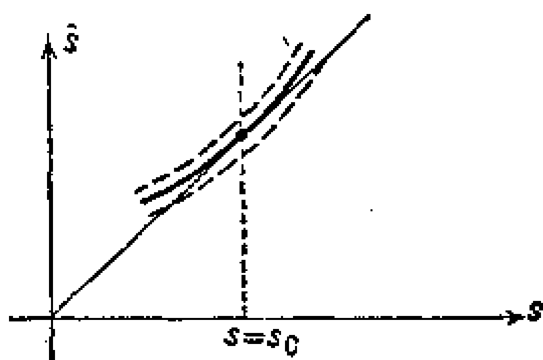


图 313

$$\Psi(s, \lambda) = f(s, \lambda) - s.$$

显然(参看 § 4)，方程式

$$\Psi(s, \lambda) = 0$$

的根，对任意给定的 λ 值都对应着极限环[2]。

我们不再详细地讨论这种分枝图，因为它和上述分枝图本质上没有差别，而且完全类似的分枝图将在从平衡状态产生极限环的情况里详细地讨论。

4. 从复杂焦点产生极限环. 现在研究从复杂焦点(即 $\Delta > 0, \sigma = 0$ 之平衡状态)产生极限环，或极限环退缩为这种平衡状态的情况。前在 § 4 中我们已涉及到这个问题。在所研究的系统右端依赖于参数的假设下，这里再次研究这一问题。

---

1) 有这种分枝性的物理例子将在第九章 § 10 中研究(电子管振荡器中振荡的硬激)。

2) 在 § 4 中曾指出，在 k 重极限环的情况中，通过适当地改变系统的右端，可以使它分解为不少于两个极限环。如果对给定的 λ，$\Psi(s, \lambda) = 0$ 成为一恒等式，那么这表示着，所有和无切线段相交的轨线都是闭的。这一特殊情况现在不考虑。

假定，原方程组经适当变换后化为正则型，即变换为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_1(\lambda)x - b_1(\lambda)y + g(x, y, \lambda),\\ \frac{dy}{dt} &= b_1(\lambda)x + a_1(\lambda)y + h(x, y, \lambda),\end{aligned}\right\} \tag{6.23}$$

使得所考虑的平衡状态位于坐标原点．此时 $g(x, y, \lambda)$ 及 $h(x, y, \lambda)$ 为按 x 及 y 展开的级数，起始项不低于二次，而 $a_1(\lambda)$ 及 $b_1(\lambda)$ 为特征方程式之根的实部及虚部（这里，不失一般性，可以假定，我们研究的所有 λ, $b_1(\lambda) > 0$）．那么，当 $a_1(\lambda) < 0$ 时平衡状态 O 是稳定焦点，而当 $a_1(\lambda) > 0$ 时，平衡状态 O 是不稳定焦点；如果有 $a_1(\lambda) = 0$，则一次项不能决定稳定性问题．

和在 § 4 中一样，变换为极坐标并代之以一个方程式，得：

$$\frac{dr}{d\theta} = r\frac{a_1(\lambda)r + g(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + h(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta}{b_1(\lambda)r + h(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta - g(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta}$$

$$= rR_1(\theta, \lambda) + r^2R_2(\theta, \lambda) + \cdots \tag{6.42}$$

因为根据假定，对所研究的 λ 值，$b_1(\lambda)$ 不等于零，则右端之级数，对所有 θ 值及所有被研究的 λ 值（$\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$），当 r 之值充分小时，$|r| < \rho$（ρ 与 θ 及 λ 无关）是收敛的．此时（参看本章 § 4）$R_i(\theta, \lambda)$ 是 θ 的周期函数，且有 $R_1(\theta, \lambda) = \dfrac{a_1(\lambda)}{b_1(\lambda)}$．和 § 4 中一样，将求方程式(6.24)的这种解 $r = f(\theta, r_0, \lambda)$，它当 $\theta = 0$ 时等于 r_0（显然，只有 $r_0 \geqslant 0$ 才有意义）．由附录 I 的定理 IV 及其推论，这个解（参看 § 4）可以按 r_0 展开成级数，且对所有 θ：$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，对所有被研究的 λ 值，当值 r_0 满足 $|r_0| < \rho_0$ 时（ρ_0 可取得与 λ 无关），此级数是收敛的．于是，

$$r = r_0u_1(\theta, \lambda) + r_0^2u_2(\theta, \lambda) + \cdots,$$

且 $u_i(\theta, \lambda)$ 象本章 § 4 里指出的那样，可以从形如（6.12）那样的递推方程算出，唯一的不同是这里 $R_i(\theta)$ 与 λ 有关．在半直线 $\theta = 0$ 上研究后继函数（和 § 4 一样）：

$$r = f(2\pi, r_0, \lambda) = u_1(2\pi, \lambda)r_0 + \cdots,$$

其中

$$u_1(2\pi, \lambda) = e^{\frac{a_1}{b_1}2\pi}.$$

利用这个函数，我们可以进行几何研究，正象我们对普通后继函数所作的研究那样．但是我们采用不同的几何研究方法．引入函数

$$\Psi(r_0, \lambda) = f(2\pi, \lambda) - r_0 = \alpha_1(\lambda)r_0 + \alpha_2(\lambda)r_0^2 + \cdots$$

考虑半平面 r_0, λ, $(r_0 \geqslant 0)$，并将对此情况建立普通的分枝图．

试看这里有那几种可能性：

1）假定对所研究的 λ 值，$a_1(\lambda) \neq 0$，因而有 $\alpha_1(\lambda) \neq 0$．那么对所研究的 λ 值，曲线 $\Psi(r_0, \lambda) = 0$ 没有奇点（微分几何意义下的奇点：同时有 Ψ'_{r_0}* $= 0$ 及 $\Psi'_\lambda = 0$ 的点）；$a_1(\lambda)$ 的符号不改变，奇点（焦点）不改变其稳定性，从它不可能分出极限环（极限环亦不可能向它退缩）．

2）现在考虑（前已讲过）$a_1(\lambda) = \dfrac{\sigma}{2}$ 等于零的情况，即在所研究的 λ 值中，可以找到这样的值 $\lambda = \lambda_0$，使得 $a_1(\lambda_0) = 0$，因而 $\alpha_1(\lambda_0) = 0$（焦点变成退化焦点）．这时曲线 $\Psi(r_0, \lambda) = 0$ 在点 $r_0 = 0$ 处有奇点（容易验证：$(\Psi'_{r_0})_{\substack{r_0=0\\ \lambda=\lambda_0}} = 0$，$(\Psi'_\lambda)_{\substack{r_0=0\\ \lambda=\lambda_0}} = 0$）．

在研究点 $r_0 = 0$, $\lambda = \lambda_0$ 附近分枝图的性质之前，提醒一下，如果 $\alpha_1(\lambda_0) = 0$，则 $\alpha_2(\lambda_0)$ 亦必定等于零．且一般而论，如果 $\alpha_1(\lambda_0) = \cdots = \alpha_{2n-1}(\lambda_0) = 0$，必然有 $\alpha_{2n}(\lambda_0) = 0$．

研究函数 $\Psi(r_0, \lambda) = 0$．为了研究奇点 $r_0 = 0$，$\lambda = \lambda_0$，先求出函数 $\Psi(r_0, \lambda)$ 在 $r_0 = 0$, $\lambda = \lambda_0$ 处的二阶导数的表达式．得：

$$(\Psi''_{r_0r_0})_{\substack{r_0=0\\ \lambda=\lambda_0}} = \alpha_2(\lambda_0) = 0; \quad (\Psi''_{\lambda\lambda})_{\substack{r_0=0\\ \lambda=\lambda_0}} = 0;$$

$$(\Psi''_{r_0\lambda})_{\substack{r_0=0\\ \lambda=\lambda_0}} = \left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda} = 2\pi\frac{a_1'(\lambda_0)}{b_1(\lambda_0)}.$$

详细地讨论

$$(\Psi''_{r_0\lambda})_{\substack{r_0=0\\ \lambda=\lambda_0}} = \left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} \neq 0$$

---

* 原书为 Ψ'_r ——译者注。

而且

$$(\Psi''_{r_0r_0})_{\substack{r_0=0\\ \lambda=\lambda_0}}(\Psi''_{\lambda\lambda})_{\substack{r_0=0\\ \lambda=\lambda_0}}-(\Psi''_{r_0\lambda})^2_{\substack{r_0=0\\ \lambda=\lambda_0}}<0,$$

的情况；此时点 $r_0=0,\ \lambda=\lambda_0$ 将是曲线 $\Psi(r_0,\ \lambda)=0$ 的简单双重点(节点)。

在此情况中，当 λ 从小于 λ_0 之值变到大于 λ_0 之值时，$\alpha_1(\lambda)$ 及 $a_1(\lambda)$ 改变符号，且所研究的焦点改变稳定性。

如果利用 $\Psi(r_0,\ \lambda)=0$ 可分解为直线 $r_0=0$ 及曲线 $\varphi(r_0,\ \lambda)=\alpha_1(\lambda)+\alpha_2(\lambda)r_0+\cdots=0$ 这一事实，对点 $r_0=0,\ \lambda=\lambda_0$ 之性质的研究将是最简单的。

为了要阐明曲线 $\varphi(r_0,\ \lambda)=0$ 在点 $r_0=0,\ \lambda=\lambda_0$ 近旁的分布概况，应计算在此点的 $\dfrac{d\lambda}{dr_0}$ 及 $\dfrac{d^2\lambda}{dr_0^2}$ 的值。得到：

$$\left(\frac{d\lambda}{dr_0}\right)_{\substack{\lambda=\lambda_0\\ r_0=0}}=-\frac{\alpha_2(\lambda_0)}{\left(\dfrac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0}}=0,$$

即曲线 $\varphi(r_0,\ \lambda)=0$ 在点 $r_0=0,\ \lambda=\lambda_0$ 处有铅垂切线，还得到：

$$\left(\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}\right)_{\substack{r_0=0\\ \lambda=\lambda_0}}=-\frac{2\alpha_3(\lambda_0)}{\left(\dfrac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0}}.$$

假定 $\alpha_3(\lambda_0)\neq 0$。那么曲线 $\varphi(r_0,\ \lambda)=0$ 在点 $r_0=0,\ \lambda=\lambda_0$ 近旁全完位于切线的一边。

不难看出，由于 $a_1'(\lambda_0)$ 及 $\alpha_3(\lambda_0)$ 的符号不同(按上所述 $b_1(\lambda)$ 不等于零，我们将认为 $b_1(\lambda)>0$)，此处可能有四种可能情况。作出对应于这四种情况分枝图，和通常一样，影区表示 $\Psi(r_0,\ \lambda)>0$ 的区域。

a) $a_1'(\lambda_0)>0,\ \alpha_3(\lambda_0)<0$；

于是

$$\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0}>0,\quad \left(\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}\right)_{\substack{r_0=0\\ \lambda=\lambda_0}}>0.$$

分枝图表示于图 314 上. 在此情况中, 随着 λ 的增加, 焦点由稳定的变为不稳定的, 同时出现稳定的极限环(仅一个).

b) $a_1'(\lambda_0) > 0$, $\alpha_3(\lambda_0) > 0$;

于是

$$\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} > 0, \quad \left(\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}\right)_{\substack{r_0=0\\ \lambda=\lambda_0}} < 0.$$

分枝图的形状如图 315 所示. 当 λ 增加时, 焦点由稳定变为不稳定, 同时不稳定极限环(仅一个)收缩到焦点.

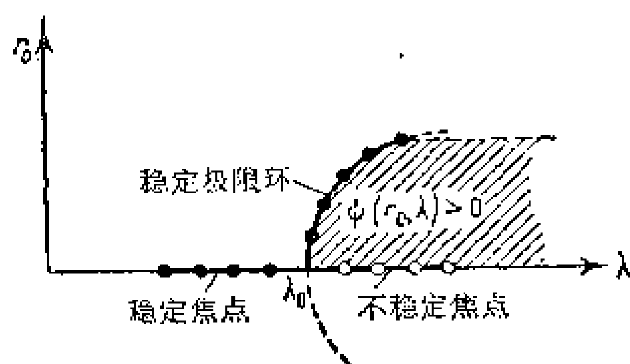


图 314

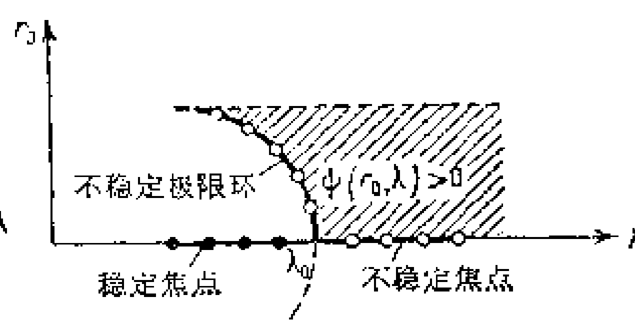


图 315

c) $a_1'(\lambda_0) < 0$, $\alpha_3(\lambda_0) > 0$;

于是

$$\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} < 0, \quad \left(\frac{d^2\lambda^2}{dr_0^2}\right)_{\substack{r_0=0\\ \lambda=\lambda_0}} > 0.$$

在此情况中, 不稳定焦点当 λ 增加时变成稳定的, 并产生一不稳定

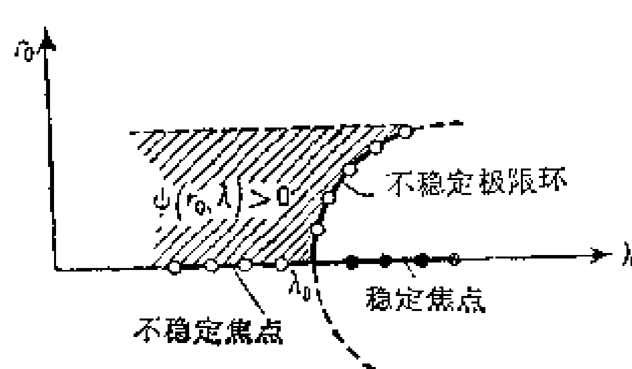


图 316

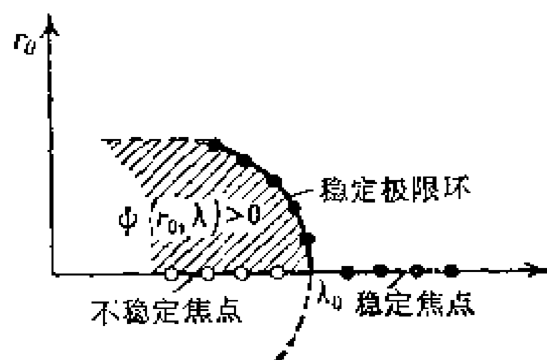


图 317

的极限环(图 316).

d) $\alpha_1'(\lambda_0) < 0$, $\alpha_3(\lambda_0) < 0$;

于是

$$\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} < 0, \quad \left(\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}\right)_{\substack{r_0=0\\ \lambda=\lambda_0}} < 0.$$

当 λ 增加时不稳定焦点变成稳定的. 稳定极限环收缩到焦点(图 317).

如果 $\alpha_3(\lambda_0) = 0$ 且第一个不等于零的系数为 $\alpha_{2k+1}(\lambda_0)$(此处 $k > 1$),我们亦可以得到相同的结果. 在此情况中, 亦总是有一个且仅一个极限环出现(或消失). 我们将不研究 $\alpha_1'(\lambda_0) = 0$ 的情况. 一般来说,在此情况中,当 λ 变化时可能出现两个,三个,等等极限环.

在研究物理实例之前,指出以下事实. 象我们已看到的,在最简单的情况中(最有实际意义的情况中),为了解决问题,我们仅需要知道 $\lambda = \lambda_0$ 时的 $\alpha_k(\lambda)$ 值. 因而为了简化计算,只需对 $\lambda = \lambda_0$ 写出方程(6.24):

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{b_1(\lambda_0)}\left[(P_2)_0\cos\theta + (Q_2)_0\sin\theta + \cdots\right]$$
$$\times\left\{1 + \frac{(P_2)_0\sin\theta - (Q_2)_0\cos\theta}{b_1(\lambda_0)r}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{(P_2)_0\sin\theta - (Q_2)_0\cos\theta}{b_1(\lambda_0)r}\right)^2 + \cdots\right\}, \qquad (6.25)$$

其中以 $(P_2)_0$ 及 $(Q_2)_0$ 表示 $\lambda = \lambda_0$ 时的 $P_2(r\cos\theta, r\sin\theta, \lambda)$ 及 $Q_2(r\cos\theta, r\sin\theta, \lambda)$, 或者

$$\frac{dr}{d\theta} = R_2(\theta, \lambda_0)r^2 + R_3(\theta, \lambda_0)r^3 + \cdots,$$

因为 $R_1(\lambda_0, \theta) = 0$. 再一次以级数

$$r = r_0u_1 + r_0^2u_2 + r_0^3u_3 + \cdots$$

形式求此简化方程的解,同时 $u_1 = 1$, 对其他 $u_k(\theta, \lambda_0)$ 得方程:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du_2}{d\theta} &= R_2(\theta, \lambda_0);\\
\frac{du_3}{d\theta} &= 2u_2R_2(\theta, \lambda_0) + R_3(\theta, \lambda_0);\\
\frac{du_4}{d\theta} &= (u_2^2 + 2u_3)R_2(\theta, \lambda_0) + 3u_2R_3(\theta, \lambda_0) + R_4(\theta, \lambda_0);\\
\frac{du_5}{d\theta} &= (2u_4 + 2u_2u_3)R_2(\theta, \lambda_0) + (3u_2^2 + 3u_3)R_3(\theta, \lambda_0)\\
&\quad + 4u_2R_4(\theta, \lambda_0) + R_5(\theta, \lambda_0);\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots.
\end{aligned}\right\} \quad (6.26)$$

初始条件为 $u_k(0, \lambda_0) = 0$ $(k = 2, 3, \cdots)$.

从此可以求得 $\alpha_3(\lambda_0)$，而当 $\alpha_3(\lambda_0) = 0$ 时，可以求得 $\alpha_5(\lambda_0)$ 等等. 至于 $\alpha_1'(\lambda_0)$ 的表达式，此式对解决极限环的收缩及产生问题也是必须的，其计算需要知道 $a_1(\lambda)$ 及 $b_1(\lambda)$，而此二量可以从决定特征根的一般方程求得.

5. 物理例子. 为了说明上述理论，研究电子管振荡器中的所谓的自振的软激. 电子管振荡器栅极回路中有振荡回路，在通常的理想化条件下，且电子管特性以三次多项式

$$i_a = i_{a_0} + S_0u + S_1u^2 - S_2u^3$$

来逼近，此处 i_a 为屏极电流，u 为电子管栅极电压的交变分量，而系数 i_{a_0}, S_0, S_2 均为正数，则此电子管振荡器的方程可写作(参看第 IX 章之例子)：

$$LC\frac{d^2u}{dt^2} + u = (MS_0 - RC + 2MS_1u - 3MS_2u^2)\frac{du}{dt}.$$

如果引入无量纲变量 $\tau = \omega_0 t\left(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$，$y = \frac{u}{u_0}$ (u_0 为某一电压标准量) 及 $x = \frac{dy}{d\tau}$，则电子管的振动方程可写成下两个一阶微分方程[1]：

---

1) 这里选取的相平面坐标与通常的有些不同，这是为了使系统(6.27)当 $\alpha = 0$ 时能直接变成形如(6.23)之系统(系统中 $a_1 = 0$ 及 $b_2 = 1>0$).

$$\frac{dx}{d\tau} = -y + (\alpha + \beta y - \gamma y^2)x, \quad \frac{dy}{d\tau} = x, \tag{6.27}$$

其中
$$\alpha = \omega_0(MS_0 - RC), \quad \beta = 2\omega_0 MS_1 u_0,$$
$$\gamma = 3\omega_0 MS_2 u_0^2 (\gamma > 0).$$

将研究平衡状态，并研究当反馈互感系数M改变时产生极限环的可能性问题．此平衡状态的特征方程为：

$$\nu^2 + \alpha\nu + 1 = 0,$$

由此

$$a_1(M) = \frac{\alpha}{2} = \frac{\omega_0}{2}(MS_0 - RC),$$

$$b_1(M) = +\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{4}(MS_0 - RC)^2}.$$

参数M的分枝值为：

$$M_0 = \frac{RC}{S_0},$$

由此

$$a_1'(M_0) = \frac{\omega_0 S_0}{2}.$$

进而计算 $\alpha_3(M_0)$．在(6.25)及(6.27)的基础上，得[1]：

$$R_2(\theta, M_0) = \beta_0 \cos^2\theta \sin\theta,$$
$$R_3(\theta, M_0) = -\gamma_0 \sin^2\theta \cos^2\theta + 2\beta_0 \cos^3\theta \sin^3\theta,$$

按公式(6.26)，从此可求出：

$$u_2(\theta, M_0) = \frac{1}{3}\beta_0(1 - \cos^3\theta),$$

$$u_3(2\pi, M_0) = \alpha_3(M_0) = -\frac{1}{8}\gamma_0 2\pi = -\frac{3\pi\omega_0}{4} RC \frac{S_2}{S_0}.$$

因为按假设 $S_0 > 0$, $S_2 > 0$, 则 $a_1'(M_0) > 0$, $\alpha_3(M_0) < 0$；根据我们的分类，便得到：第一情况——情况 a)：当M增加时焦点从稳定的变成不稳定的，且同时出现稳定的极限环．从此可得结

1) $\beta_0 = (\beta)_{M=M_0}$, $\gamma_0 = (\gamma)_{M=M_0}$.

论：当 $M > M_0$ 但和 M_0 相当接近时，在系统中必然会有稳定的自振过程．如果 $S_2 < 0$，则我们得到第二情况——情况 b)，随着 M 的增加，焦点从稳定变为不稳定，且不稳定极限环收缩成一点．

再作二点注记：1)如果我们进一步在电子管特性的展开式中计入含有 u^4, u^5, u^6 等等的项，那么不难从式(6.26)看出，当 $S_2 \neq 0$ 时，这些项对解决极限环的产生及消失问题，没有任何影响；2)在得到所有结论时，关于量 α, β, γ，我们并没有假定它们是小的．当继续增加反馈时，在电子管振荡器中，自振产生这一更深入的问题(不单是在奇点邻域中研究极限环的变化)的类似的研究，将在第 IX 章中进行；但是那里将被迫对电子管特性的系数、电阻等，提出某些要求，即假定它们是小量．

6. 从由鞍点到鞍点的分界线产生极限环，及从鞍结点型平衡状态之分界线的消失中产生极限环． 再简略地论述极限环产生(及相应的极限环消失)的二个简单情况，那就是，关于复杂奇点消失时极限环产生的情况，以及从分界线产生极限环的情况．这些情况不论从微分方程理论的角度还是及物理的角度来看，都有着重大意义．

假设当参数 λ 取所研究之区间的某一值时，微分方程组有一个鞍点，且它的两条从此鞍点出发的分界线趋向于同一结点(图 318, I)．此外还假定当 λ 增加时鞍点及结点逐渐接近，且最后当

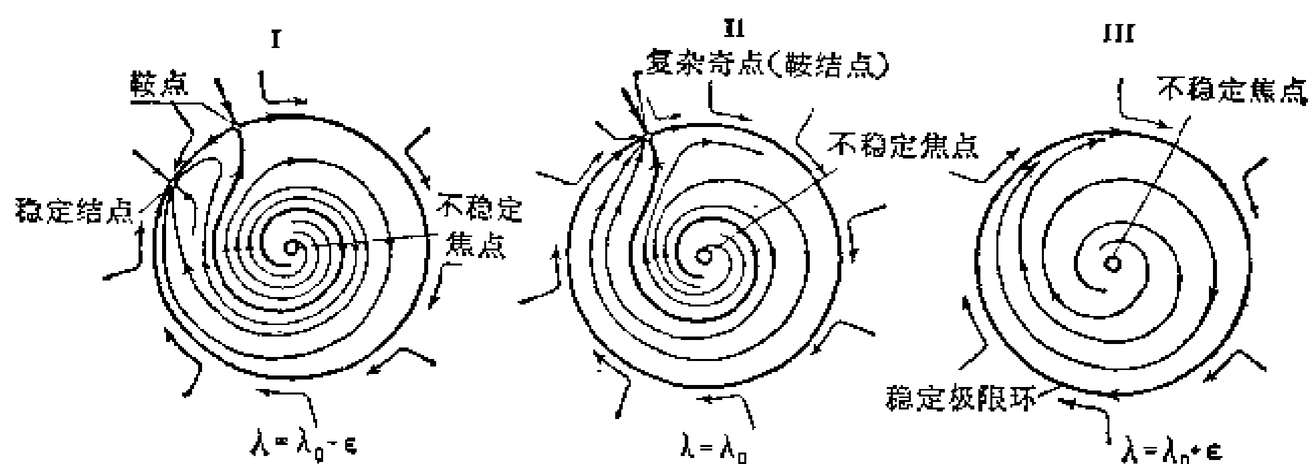


图 318

到达某值 $\lambda=\lambda_0$ 时二者汇合成一复杂奇点鞍结点（图 318, II）。那么这个鞍结点的一条分界线(记之以 L_0)，从鞍结点出发又回到那里(当 $t\to+\infty$)（图 318, II）. 如果随 λ 的继续增加此复杂奇点(鞍结点)消失，则必然出现一极限环，它当值 λ 和 λ_0 充分接近时，位于 L_0 的任意小邻域之内(图 318, III)[1]. 同样地很明显，如果随着 λ 的增加(或减小)到达某值 λ_0 时，极限环上出现复杂奇点鞍结点，然后它又分为二个奇点，则极限环可能消失.

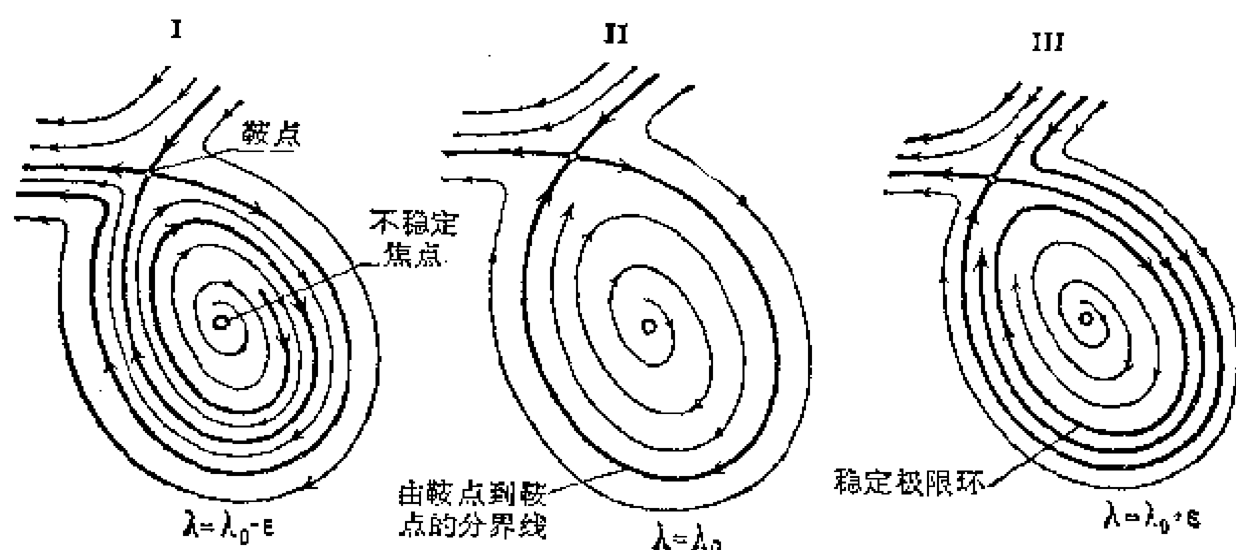


图 319

现讨论从鞍点分界线产生极限环的情况. 假定当 λ 在所研究的区间中取某个值时，鞍点分界线的状况如图 319, I 所示，而随着 λ 的增加(或减少)分界线逐渐接近，最后当 λ 到达某值 λ_0 时合并成为一个"分界线环"(即当 $\lambda=\lambda_0$ 时存在着鞍点 O 的分界线，从此鞍点出发又回到它)（图 319, II）. 如果随着 λ 的进一步增加(或减少)鞍点分界线重新分而为二个，如图 319, III 所示，那么此

---

1) 以 x_0 及 y_0 表示奇点鞍结点的坐标，由假定，当 $\lambda=\lambda_0$ 时此奇点才能存在，并列出表达式

$$\sigma_0=P'_x(x_0,y_0,\lambda_0)+Q'_y(x_0,y_0,\lambda_0).$$

不难证明，对奇点鞍结点 $\sigma_0\neq0$. 可以证明，在 $\sigma_0<0$ 的情况里，从此奇点鞍结点产生的极限环是稳定的，而在 $\sigma_0>0$ 的情况中，不稳定.

时从此分界线环至少分出(产生)一个极限环[1]. 显然反过来,如果极限环先和分界线环汇合,它亦会消失. 在上述二种情况里,图 II (318 及 319)对应着参数的分枝值.

---

1) 以 x_0 及 y_0 表示 $\lambda=\lambda_0$ 时之鞍点坐标,并研究表达式

$$\sigma_0 = P'_x(x_0, y_0, \lambda_0) + Q'_y(x_0, y_0, \lambda_0).$$

此式可以不等于零,亦可以等于零. 可以证明,在 $\sigma_0<0$ 的情况中"分界线环"是稳定的(通过与环充分相近之点(环内及环外的)的所有轨线,当 $t\to+\infty$ 时趋向此环),而在 $\sigma_0>0$ 的情况中,此环是不稳定的. 在 $\sigma_0=0$ 的情况中,量 σ_0 不能决定环的稳定性.

同样可以证明,当 $\sigma_0\neq0$ 时,从分界线环将产生唯一的极限环,且如果 $\sigma_0<0$ 此极限环稳定,如 $\sigma_0>0$ 则不稳定.

第七章　具有相柱面的系统[1]

§1. 相　柱　面

将动力学系统的性状映射到相空间时，我们要求系统状态及相空间的点之间，具有相互单值及连续的对应．就是说，系统的每一状态应对应于一个且仅一个相空间的点，反之，相空间的每一个点，亦应对应于一个且仅一个系统的状态，同时系统的邻近状态应该对应于相空间的邻近点．这一要求就建立起了物理系统性质和给定系统之相空间的几何形象的主要特点间的一定连系．至今为止，我们研究了一些物理系统(一个自由度的)，其相空间都是平面．但是，正象在上册第二及第三章中所看到的，存在着这样的系统，对它们来说，平面不能作为其相空间，因为此时相互单值的要求不成立．

普通的物理摆可以作为这种系统的例子．事实上，摆的状态决定于其偏离平衡位置的角度以及其速度，但是当偏角改变一 2π 时，又得到摆的同一状态，实际上与前一状态毫无差异．所以，在相平面上有无穷多个点(沿横轴彼此相距 $2k\pi$ 的所有点)，对应于系统的同一物理状态．因而，严格地说，作为普通物理摆的相面的话，平面是不合宜的，因为此时平面的点与摆的状态之间的相互单值性及连续性的条件，已不再成立．诚然，利用平面作为相面亦不致成为产生误解的原因，特别是，当我们仅限于考虑那些范围不超过一整圈的运动时，不会引起误解．但是当我们研究的运动超越 2π 的界限时，为了保证相互单值性及连续性的要求，我们应该将

1) 本章是热列佐夫改写的．§§1 及 4 是他新写的．

运动映射到相圆柱面上[1]. 这一情况显然和存在摆的二种性质不同之类型的周期运动有关（平衡状态附近的振动以及摆绕其转轴的转动）.

对所有位置完全决定于角度的机械的(或机电的)系统，亦有类似的图象. 因为这种系统经常遇到，所以相柱面的应用有着很大的意义.

本章里我们将研究几个物理系统，其性状应映射到相圆柱面上，亦将阐明，动力学系统相图之建立及研究的一般方法，在此情况中应该如何应用.

为了建立被研究之动力学系统的相图，此系统的方程的一般形式可以写成两个一阶方程的形式:

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\Phi(\vartheta, z), \quad \frac{dz}{dt}=F(\vartheta, z), \tag{7.1}$$

其中 ϑ 及 z 为相柱面的坐标，和相平面的情况完全一样，我们应该研究相图的基本元素: 奇点、分界线及对应于周期运动的极限环. 但是在相柱面上，除了"普通的"、位于柱面上、包围平衡状态但不围绕圆柱的极限环外（这种曲线和相平面上的闭轨线完全类似），可能遇到完全新型的极限环，它们围绕的不是平衡状态，而是柱本身. 显然，这些闭轨线亦对应于周期运动. 为了在相柱面上建立相图，我们也应知道这些围绕柱的闭轨线. 我们所以应该特别注意这种闭轨线，因为它们对应于周期运动，以及积分曲线方程

$$\frac{dz}{d\vartheta}=\frac{F(\vartheta, z)}{\Phi(\vartheta, z)} \tag{7.2}$$

的周期解. 由于这些解是以周期为 2π 的周期解，因而当 ϑ 取任意

1) 沿柱的导线(一圆)标记决定摆位置的角度 ϑ，而沿母线标记角速度 $z=\dot{\vartheta}$. 为了表示相轨线，将柱面展开于平面 ϑ, z 上来代替柱面，常常是很方便的，正象在上册第二章 §4 及 §5 中所作的那样. 但此时展开面的二个边界直线的点应彼此等同起来，这二直线就是切开柱面时的那一条切开线(例如，直线 $\vartheta=+\pi$ 及 $\vartheta=-\pi$ 上的点)，就是说，将认为它们对应于系统的同一些状态(有相同 z 的点才应等同起来).

值时，它们都满足条件 $z(\vartheta+2\pi)=z(\vartheta)$[1]. 为了发现这类周期解的存在，例如，可以采用以下方法. 如果存在着方程(7.2)的两个特解 $z_1(\vartheta)$ 及 $z_2(\vartheta)$，对某个 ϑ_0，它们满足：

$$z_1(\vartheta_0+2\pi)\geqslant z_1(\vartheta_0),\quad z_2(\vartheta_0+2\pi)\leqslant z_2(\vartheta_0),$$

而且如果在这两个解对应的积分曲线之间没有奇点，则按解对初始条件的连续相关性，我们可以断定，在 $z_1(\vartheta)$ 及 $z_2(\vartheta)$ 之间，存在着周期解，此解满足

$$z(\vartheta_0+2\pi)=z(\vartheta_0),$$

因而有

$$z(\vartheta+2\pi)\equiv z(\vartheta)$$[2]

(当然在一般情况中，不能肯定，此周期解是唯一的).

寻求围绕柱的极限环，决定其数目及稳定性，可以采用建立柱的某母线 $\vartheta=\vartheta_0$ 对其自身的点变换的方法来进行. 如果通过母线 $\vartheta=\vartheta_0$ 上的线段 (L) 的某些点之相轨线是围绕柱体的（图 320），那么这些点在同一线段上必有后继点，且我们可以对我们采用的点变换[3]建立后继函数

$$z'=f(z).$$

这一点变换的不动点 z^*，即方程

$$z=f(z)$$

决定的点，是围绕柱的闭轨线(极限环)和柱之母线 $\vartheta=\vartheta_0$ 的交点. 由克尼格斯定理，如果

$$|f'(z^*)|<1,$$

---

1) 我们假定 ϑ 及 z 是时间 t 的连续函数；那么当相点绕柱面一周时，角坐标 θ 将改变 -2π（增加或减少随转向而不同）；因而相柱上的每一点，可给予的不是一个角坐标值，而是一可数集合的值，这些数彼此相差 -2π. 这样，要求 ϑ 与时间 t 的关系具有连续性时，我们不得不放弃相柱的点与其坐标间对应的单值性.

显然，运动方程组(7.2)之右端的函数：$\Phi(\vartheta,z)$ 及 $F(\vartheta,z)$，必定应该是角 ϑ 的周期函数，周期为 2π.

2) 当然，对系统 (7.1) 我们要假设关于微分方程解的存在性及唯一性的柯西定理条件是满足的.

3) 和相平面情况一样，对分段线性系统，计算后继函数是最简单的. 这种系统的例子将在第八章 §10 中列举.

极限环将是稳定的，而如果

$$|f'(z^*)| > 1,$$

极限环将是不稳定的. 如果知道了对应于绕柱之极限环的解本身: $\vartheta = \vartheta(t)$, $z = z(t)$, 则此极限环的稳定性可以通过计算其特征指数

$$h = \frac{1}{T}\int_0^T \{\Phi'_\vartheta[\vartheta(t), z(t)] + F'_z[\vartheta(t), z(t)]\} dt$$

来决定，这里 T 是周期解的周期[1]. 就是说，当 $h < 0$ 时极限环是稳定的，而当 $h > 0$ 时是不稳定的(此论断的证明和第五章 §8 所作的证明完全一样).

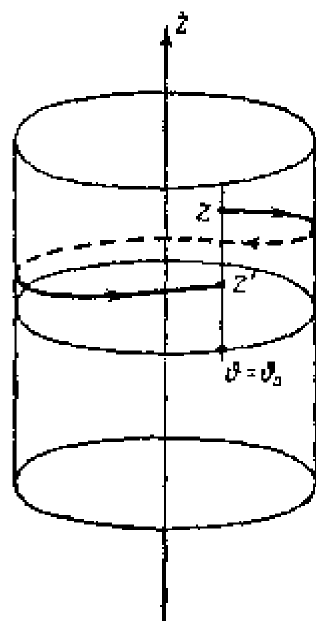


图 320

在研究具有相柱面之动力学系统的相图时，本狄克生判据和杜拉克判据常常是有用的. 不难看出，如果在某一介于二条绕相柱的闭轨线之间的区域里，本狄克生判据或杜拉克判据成立，那么在这个区域中，不存在不围绕相柱的闭相轨线，亦不存在多于一条的绕相柱的闭相轨线.

§2. 受到常力矩的摆

对于一系列的机电系统，例如同步电动机，同其他机器并连于电网上而工作的交流发电机，等等，最好采用柱形相空间. 在一定的简化假设下，所有这些系统都可以归结为同一个数学问题的研究，所以我们只研究这种系统中的一个，那就是，在常转动力矩作用下具有"线性阻尼"的摆. 如果以 M_0 记这个常力矩，我们便得到摆的运动方程

---

1) 函数 $z(t)$ 是周期的，即 $z(t+T)\equiv z(t)$，而由于连续性，对函数 $\vartheta(t)$ 有 $\vartheta(t+T)\equiv\vartheta(t)\pm 2\pi$.

$$I\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+b\frac{d\vartheta}{dt}+mga\sin\vartheta=M_0,$$

其中 I 为摆的惯性矩，b 为当角速度等于 1 时摆受到的阻力矩。引入新的独立变量 $\tau=\sqrt{\frac{mga}{I}}\,t$，可将方程化为形状：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2}+\alpha\frac{d\vartheta}{d\tau}+\sin\vartheta-\beta=0,\\ &\text{其中}\quad \alpha=\frac{b}{\sqrt{Imga}}>0\ \text{及}\ \beta=\frac{M_0}{Mga}>0.\end{aligned}\right\}\qquad(7.3)$$

在进行研究这个方程以前，我们将指出，在哪些情况中，关于同步马达以及关于并联发电机的运行问题，可以归结为这种方程。

在同步马达的情况中，ϑ 表示定子磁场方向与转子磁场方向间的夹角。此时 M_0 为负荷加给马达的力矩（我们假定负荷是不变的）。因为从负荷来的力矩将使转子转动减速，这里和摆的情况一样，将力矩写在方程右端并给以负号，这时，如果转子磁场落后于定子磁场，我们应取 ϑ 为正。除去负荷力矩以外，转子上还作用有阻力和电阻尼产生的阻力矩。这种力矩假定是和角速度成正比的。因为这些力将阻碍运动，所以在方程右端以项 $-b\frac{d\vartheta}{dt}$ 来表示它们，且 $b>0$。但除了负荷力矩和阻力矩以外，转子上还作用着转子磁场和定子磁场的相互作用产生的力矩。这种力矩的方向恰好是使角度 $|\vartheta|$ 减小的方向（使落后的转子加速）。因而，我们可以记这一力矩为 $-f(\vartheta)$，且 f 和 ϑ 有相同的符号，当 ϑ 等于零时，f 亦等于零。我们现在可以令所有力矩的和等于惯性矩与角加速度的乘积；得到[1]：

---

1) 应指出，对于静止坐标系而言，转子运动方程为：

$$I\frac{d^2\psi}{dt^2}=f(\omega t-\psi)-b\frac{d\psi}{dt}-M_0,$$

其中 ω 为定子磁场轴的角速度，而 ψ 为转子的转角。令 $\vartheta=\omega t-\psi$，便得正文中的方程。

$$I\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=M_0-b\frac{d\vartheta}{dt}-f(\vartheta).$$

至于表征转子及定子磁场相互作用的函数 $f(\vartheta)$ 的形状，则在一定的简化假设下，这个相互作用可表为正弦关系式．以 $\sin\vartheta$ 代替 $f(\vartheta)$，我们得到的方程，和对摆得到的方程(7.3)，完全类似．

在发电机和其他机器对公共电网并联运行的情况中，ϑ 应该表示所研究之发电机的转子相对于其他机器(一般来说，有更大的功率)转子的超前角度，而 M_0 表示带动发电机之发动机方面来的常力矩（在这种选择的情况下，M_0 将再次使 ϑ 增加）．阻尼力矩和以前一样为 $-b\frac{d\vartheta}{dt}$．此外，在发电机在公共电网中运行的情况中，当有角偏离 ϑ 时，就产生了平行运行着的其他发电机加给所研究之发电机的机电力矩[1]．这个力矩作为角 ϑ 的函数，将使 $|\vartheta|$ 减小．因而，它应该等于 $f(\vartheta)$，并与 ϑ 有相同的符号；在一定的简化假设下，也可将它取作为 $\sin\vartheta$．

为了研究方程(7.3)，引入新变量 $z=\frac{d\vartheta}{d\tau}$．我们得到两个一阶方程的方程组：

$$\frac{dz}{d\tau}=-\alpha z-\sin\vartheta+\beta;\ \frac{d\vartheta}{d\tau}=z. \tag{7.4}$$

消去 τ，得到一阶微分方程：

$$z\frac{dz}{d\vartheta}=-\alpha z-\sin\vartheta+\beta. \tag{7.5}$$

从特殊情况 $\alpha=0$（保守系统)开始，研究方程 (7.5)．在此情况中，方程具有形状：

$$z\frac{dz}{d\vartheta}=\beta-\sin\vartheta. \tag{7.6}$$

经过变数分离和积分，我们得到解：

---

1) 严格地说，我们应该研究发电机间的相互作用，而不单是所有其他发电机加给所研究之发电机的作用．

$$\frac{1}{2}z^2 = \cos\vartheta + \beta\vartheta + C_1 \text{ 或}$$

$$z = \pm\sqrt{2(\cos\vartheta + \beta\vartheta) + C}. \tag{7.7}$$

将积分曲线(7.7)映射到相柱的展开面上，我们来研究其性状．首先，根据(7.6)，奇点为点$(\vartheta, 0)$，其中ϑ决定于方程

$$f(\vartheta, \beta) \equiv \beta - \sin\vartheta = 0. \tag{7.8}$$

显然，当$\beta < 1$时，有两个平衡位置：$\vartheta = \vartheta_1$及$\vartheta = \vartheta_2 = \pi - \vartheta_1$，其中$\vartheta_1 = \arcsin\beta$ $\left(0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$；当$\beta = 1$时，这两个平衡位置会合$\left(\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}\right)$，而且$\beta > 1$时没有平衡位置．图 321 上给出了相应的分枝图．$f(\vartheta, \beta) > 0$的区域加了影线；稳定平衡位置(中心)对应于带有黑点之粗线上的点，在这些点上$\vartheta = \vartheta_1$，而不稳定的平衡位置(鞍点$\vartheta = \vartheta_2$)对应于带有小圈的细线上的点．值$\beta = 1$显然是分枝值．

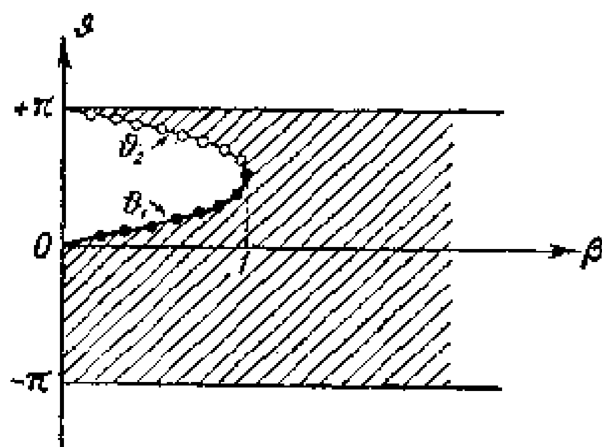


图 321

为了作出积分曲线，利用第二章 §3 所指出的方法．在辅助平面ϑ, y上作曲线

$$y = 2(\cos\vartheta + \beta\vartheta), \tag{7.9}$$

并在其下方，放置相柱的展开面，不难对给定的β值在此展开面上作出积分曲线族(7.7)． 在平面ϑ, z上画积分曲线时可用以下步骤进行，给定不同的C值，对一定的ϑ值求出$C + y$的平方根，然后在横坐标为ϑ处沿z轴方向从ϑ轴向上及向下各以这个值标出一点，这就是积分曲线上的点．对于给定的C值，每一满足$y + C > 0$的y值，在ϑ, z面上将对应有两个点，而对于$y + C < 0$的y值，得不到任何的点，因为这时z的值是虚的．

对不同的β值，得到的结果将是不同的．

情况 $\beta=0$，即没有附加常力矩之摆的运动情况，我们在第二章 §4 已研究过了．我们在那里已见到，除去两个奇点(中心及鞍点)和分界线以外，所有相轨线都是闭的，且对应于周期运动，同时分界线内部的是围绕中心但不围绕柱体的闭轨线，而外部的则是围绕柱体的闭轨线．我们已经讲过，后者对应于新型的周期运动．

当 $\beta \neq 0$ 时，随着 $\beta<1$ 还是 $\beta>1$，我们得到不同的图象．在辅助平面上，我们应当作出曲线

$$y=2\cos\vartheta+2\beta\vartheta.$$

当 $\beta<1$ 时，这条曲线在 $\vartheta=\vartheta_1=\arcsin\beta\left(0\leqslant\vartheta_1\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 上有一极大值，在 $\vartheta=\vartheta_2=\pi-\vartheta_1$ 上有一极小值(我们可以只在 $-\pi<\vartheta<+\pi$ 上作曲线(7.9))．当 $\beta=1$ 时，曲线 $y=2(\cos\vartheta+\beta\vartheta)$ 既没有极大值，亦没有极小值，只在 $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ 上有一切向水平的拐点．当 $\beta>0$ 时，曲线 $y=2(\cos\vartheta+\beta\vartheta)$ 是单调增的，既没有极值，亦没有拐点．

在 $\beta<1$ 的情况中(图 322)，我们又得到一个中心型奇点，一个鞍点型奇点，以及分界线．在柱面上得到的图象如图 323 所

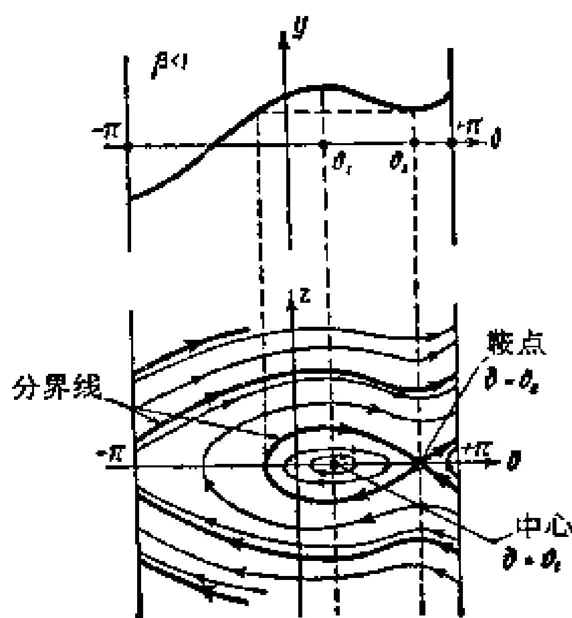


图 322

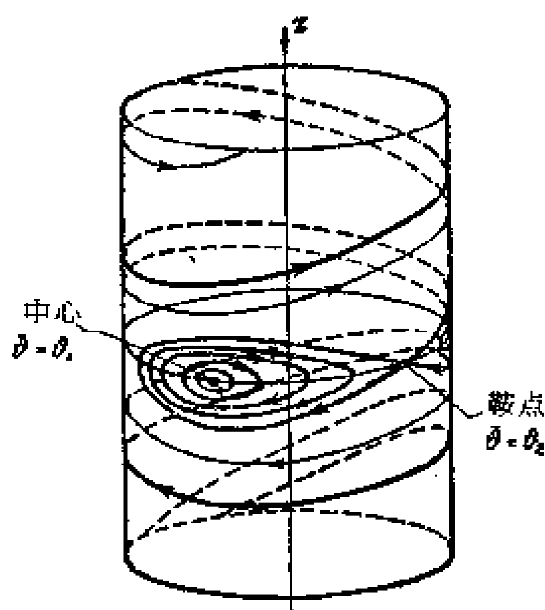


图 323

示. 分界线内的曲线是闭的，且对应于周期运动. 在分界线外部的曲线在相柱面上非闭，因为当 ϑ 增加 2π 时，z 得到不同的值，并且每转一周都要增加(就其绝对值而言). 因而，在这一情况中，第二类周期运动是不可能的. 对 $\beta=1$ (图 324)的情况，我们得到一个高次奇点. 此时柱面上根本没有闭曲线 (图 325). 当 $\beta>1$ 时(图 326)根本没有奇点，在相柱面上亦没有闭曲线(图 327). 所以，当 $\beta\geqslant1$ 时，第一类周期运动以及第二类周期运动都不可能.

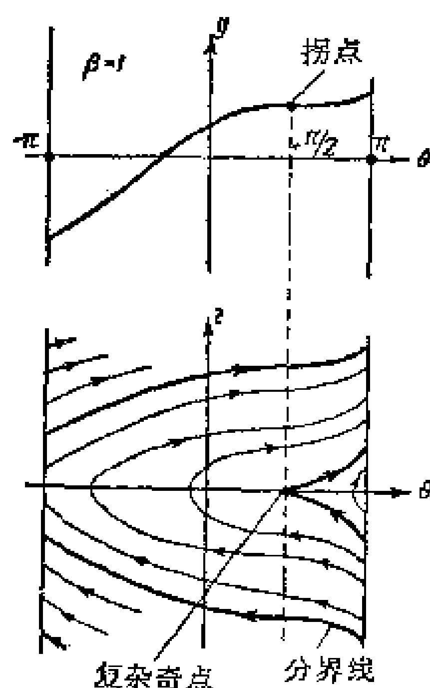


图 324

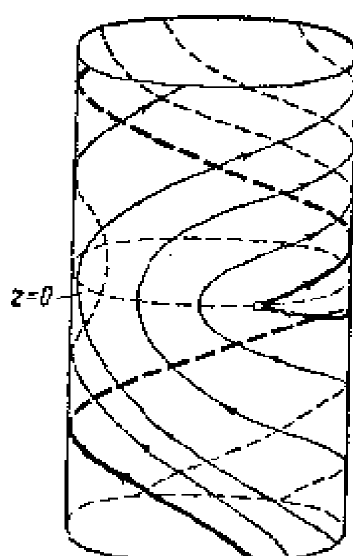


图 325

得到之结果的物理意义是非常清楚的. 如果常力矩不太大的话，它使下平衡位置产生的偏移小于 $\frac{\pi}{2}$(亦即，常力矩小于重力矩的最大值)，那么当初偏离(及初速度)充分小时，可能出现绕偏移之平衡状态的运动. 此时，沿着和外力矩相反的方向运动时，摆作的功，正好等于它沿着力矩方向运动时所得到的功. 如果初偏离很大，由于常外力矩的作用，摆经过上平衡位置后，将继续沿外力矩的方向运动，同时每经一转，摆的速度都有增加. 如果 $\beta>1$，则外力矩超过最大重力矩. 在这一情况中，振动根本是不可能的，而

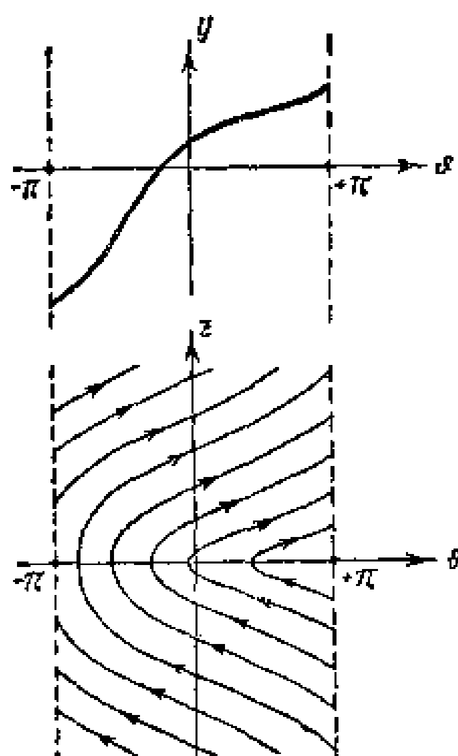


图 326

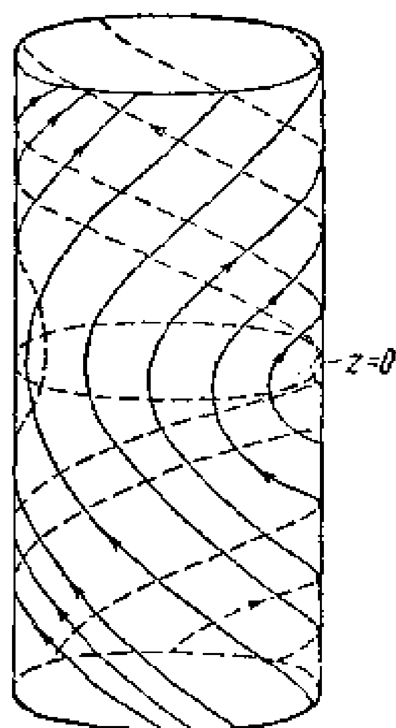


图 327

且由于对任意 ϑ 均有 $\frac{dz}{d\tau}=\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2}>0$，对任意的初始条件，摆最终地将沿常力矩的方向转动，其速度亦将单调地增大.

§3. 受到常力矩的摆.非保守情况[198]

进一步研究 $\alpha>0$ 的非保守系统(7.4). 在这种情况中，柱面上的积分曲线之微分方程

$$z\frac{dz}{d\vartheta}=-\alpha z-\sin\vartheta+\beta \text{ 或 } \frac{dz}{d\vartheta}=\frac{-\alpha z-\sin\vartheta+\beta}{z}$$

已经不能直接进行积分了. 因而我们应该应用定性积分方法.

首先，等倾线 $\frac{dz}{d\vartheta}=0$ 是一条偏移了的正弦曲线. 其方程为

$$z=\frac{\beta-\sin\vartheta}{\alpha}.$$

只有当 $\beta<1$ 时它才和 ϑ 轴相交(图 238). 当 $\beta>1$ 时这一等

倾线不与 ϑ 轴相交(图 239). 在正弦曲线和 ϑ 轴之间,即在图 328 及 329 上的影线区域里, $\frac{dz}{d\vartheta}>0$. 在整个其他区域里, $\frac{dz}{d\vartheta}<0$.

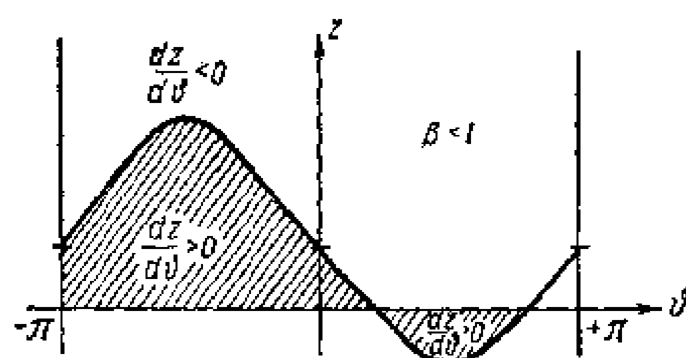


图 328

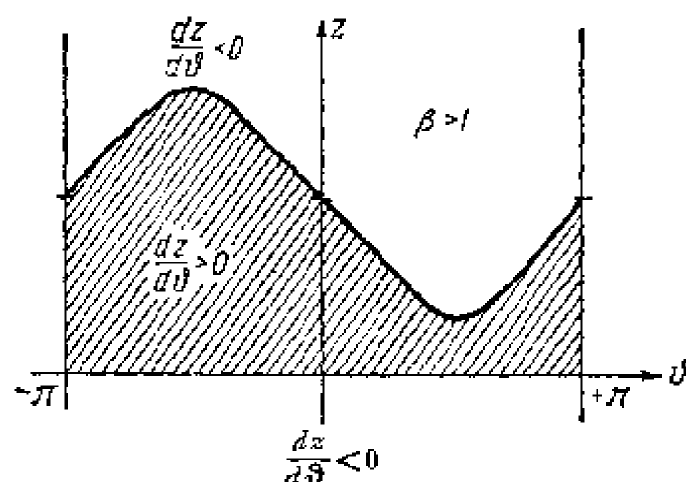


图 329

和前面一样,奇点坐标决定于方程:

$$\beta-\sin\vartheta=0,\quad z=0.$$

因而,当 $\beta>1$ 时,没有奇点. 当 $\beta<1$ 时,有二个奇点(二个平衡状态): $\vartheta=\vartheta_1$, $z=0$ 及 $\vartheta=\vartheta_2=\pi-\vartheta_1$, $z=0$, 其中与前面一样 $\vartheta_1=\arcsin\beta\left(0\leqslant\vartheta_1<\frac{\pi}{2}\right)$.

现在阐明这些平衡状态的性质. 为此, 令方程 (7.4) 中的 $\vartheta=\vartheta_i+\xi(i=1,2)$, 并将 $\sin\vartheta$ 展开成 ξ 的幂级数. 仅保留 ξ 的一次项, 便得到描述系统在平衡位置$(\vartheta_i,0)$近旁中之性状的

线性化方程组:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dz}{d\tau}&=-\alpha z-\xi\cos\vartheta_i,\\ \frac{d\xi}{d\tau}&=z,\end{aligned}\right\}\tag{7.10}$$

其特征方程为

$$\lambda^2+\alpha\lambda+\cos\vartheta_i=0.\tag{7.11}$$

因为 $\cos\vartheta_1>0$，而 $\cos\vartheta_2=-\cos\vartheta_1<0$，所以当 $\alpha^2<4\cos\vartheta_1$ 时,平衡状态$(\vartheta_1, 0)$是稳定的焦点,当 $\alpha^2>4\cos\vartheta_1$ 时是稳定的结点,而平衡状态$(\vartheta_2, 0)$永远是鞍点. 当 $\alpha=0$ 时，第一个平衡状态转化为中心.

然后，将方程组(7.4)之右端记作 F 及 $\Phi(F=-\alpha z-\sin\vartheta+\beta, \Phi=z)$. 于是在整个相柱上

$$\Phi'_\vartheta+F'_z=-\alpha<0.\tag{7.12}$$

所以根据本狄克生判据，对于相柱上的轨线而言(参看本章§1)，动力学系统没有不围绕相柱的闭轨线，而围绕相柱的闭轨线最多也只能有一条. 这个极限环,如果存在的话,必定是稳定的，因为按(7.12)其特征指数 $h=-\alpha<0$，而且整个地位于相柱的上半部(整个地位于 $z>0$ 的区域里).

首先很明显，系统(7.4)不可能有围绕柱体的、与线 $z=0$ 相交的闭轨线. 事实上，假设有和线 $z=0$ 相交的闭轨线存在（交点至少有两个；图330),我们将得到结论,它不可能围绕相柱,因为在通过 $z=0$ 之轴后,$\frac{d\vartheta}{d\tau}$ 应该改变符号$\left(\text{提醒注意，}\frac{d\vartheta}{d\tau}=z\right)$，因而,存在一开区间 $\vartheta'<\vartheta<\vartheta''$，所研究的闭轨线不通过这一区间. 所以,围绕相柱的闭轨线只可能是：或者整个位于 $z<0$ 的区域里,或者 $z>0$ 的区域里.

将方程(7.5)写作:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(z^2)=-\alpha z-\sin\vartheta+\beta,$$

然后沿围绕相柱的闭轨线 $z=z_0(\vartheta)$（假定这样的轨线是存在的)从 ϑ_0 到 $\vartheta_0+2\pi$ 积分这个方程,得到:

$$-\alpha\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+2\pi} z_0(\vartheta)d\vartheta + 2\pi\beta = 0,$$

因为 $z_0(\vartheta_0 + 2\pi) = z_0(\vartheta_0)$. 对于围绕相柱的、而且整个位于 $z<0$ 区域里的极限环来说，由于 $\beta>0$，这一等式是不可能满足的. 于是，如果围绕柝柱的极限环存在，那么它必然整个地位于 $z>0$ 的区域里.

图 330

现在研究这种极限环的存在问题. 同时我们将分别研究 $\beta>1$ 及 $\beta<1$ 的情况. 从第一情况开始.

I. $\beta>1$.

为了确信周期运动 $z(\vartheta)$ 的存在，正象已经指出过的，只要能找出两个特解 $z_1(\vartheta)$ 和 $z_2(\vartheta)$，并使它们对某一 ϑ 满足条件：

$$z_1(\vartheta + 2\pi) \leqslant z_1(\vartheta), \quad \text{(A)}$$

$$z_2(\vartheta + 2\pi) \geqslant z_2(\vartheta), \quad \text{(B)}$$

就可以了. 第一个这种特解立刻可以找到. 事实上，对某一 ϑ_0，满足 $z_1(\vartheta_0) > \dfrac{1+\beta}{\alpha}$ 的任一解 $z_1(\vartheta)$，将是我们待求的解，因为在正弦曲线 $z = \dfrac{\beta - \sin\vartheta}{\alpha}$ 的上部，总有 $\dfrac{dz}{d\vartheta} < 0$（图 331），因而 $z_1(\vartheta_0) \leqslant z_1(\vartheta_0 - 2\pi)$，条件(A)得到满足.

为了寻求满足条件(B)的第二个解，研究通过坐标为 $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$，

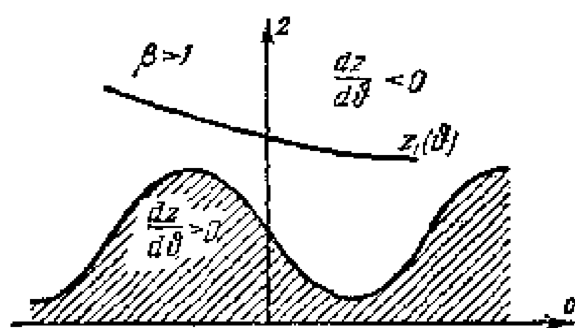


图 331

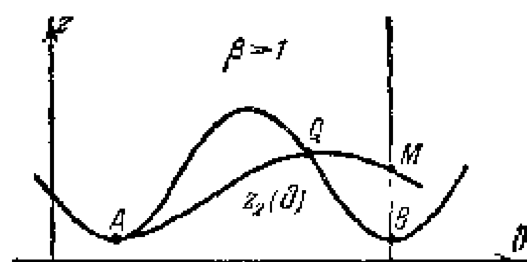


图 332

$z=\frac{\beta-1}{\alpha}$ 之点 A 的积分曲线(A 即正弦曲线 $z=\frac{\beta-\sin\vartheta}{\alpha}$ 取极小的点). 观察积分曲线由 A 起向右的走向. 因为在正弦曲线与 ϑ 轴之间 $\frac{dz}{d\vartheta}>0$,那么曲线应该随 ϑ 的增加向上走,并于某点 Q 和正弦曲线相交. 由于正弦曲线是水平等倾线 $\frac{dz}{d\vartheta}=0$,在 Q 点上积分曲线有水平切线. 其后积分曲线下降,并交直线 $\vartheta=\frac{5\pi}{2}$ 于 M 点,M 点不会位于点 B 的下方(因为正弦曲线是等倾线 $\frac{dz}{d\vartheta}=0$,所以积分曲线和它相交时应有水平切线; 不难看出, 这只有在 B 点上或 B 点右方才可能). 因而,我们研究的积分曲线所对应的解满足

$$z_2\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right)\geqslant z_2\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

亦就是说,满足条件(B).

因为在此情况中($\beta>1$),没有奇点, 那么由于连续性,在两个解 z_1 及 z_2 之间, 应该存在有满足 $z_0(\vartheta+2\pi)=z_0(\vartheta)$ 的周期解. 我们已证明了, 这个周期解是唯一的亦是稳定的. 它所对应的极限环围绕相柱,如图333所示.

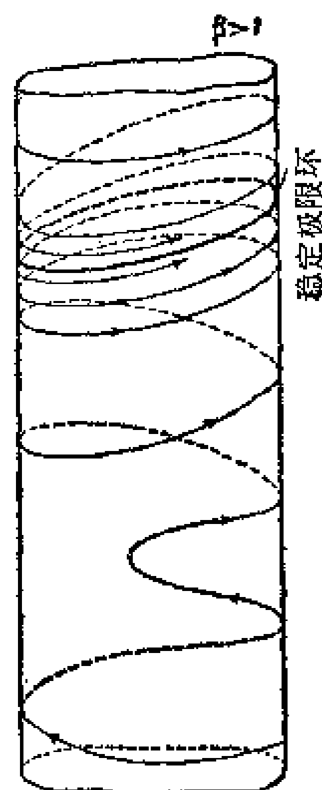


图 333

II. $0<\beta<1$.

当 $0<\beta<1$ 时,为了阐释围绕相柱之极限环的存在条件, 定性地建立通过鞍点的相柱母线 $\vartheta=\vartheta_0$ 的上半直线对其自身的点变换; 在相柱的展开面上,这个变换就是半直线 $Z:\vartheta=\vartheta_2-2\pi$, $z\geqslant 0$ 对半直线 $Z':\vartheta=\vartheta_2$, $z\geqslant 0$ 的点变换. 以 s 及 s' 记这一母线的点和其后继点的纵坐标,如果后继点存在的话(即 $s, s'>0$ 时). 变换的不动点 s^*, 如果存在的话, 将是围绕相柱之极限环与母线 $\vartheta=\vartheta_0$ 的交点. 前已指出,这个极限环只可能存在于 $z>0$

的区域里．因而，这一极限环存在的必要充分条件是：我们所研究的半直线 $\vartheta=\vartheta_2$，$z>0$ 对其自身的、由系统(7.4)之轨线所实现的点变换，具有不动点 $s^*>0$。

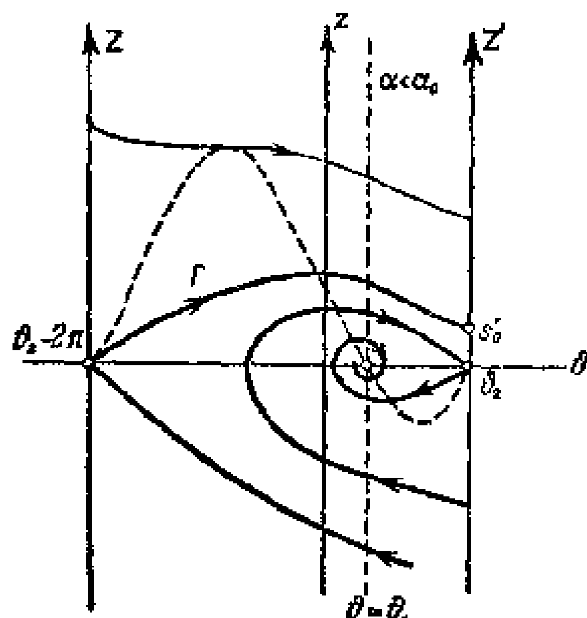


图 334

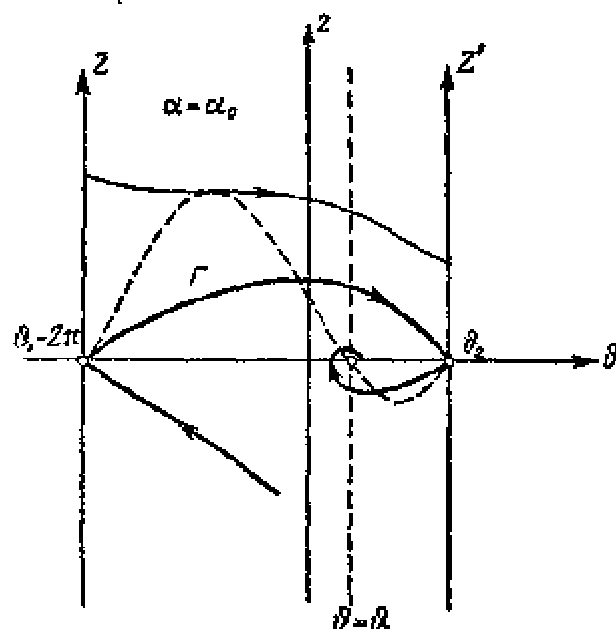


图 335

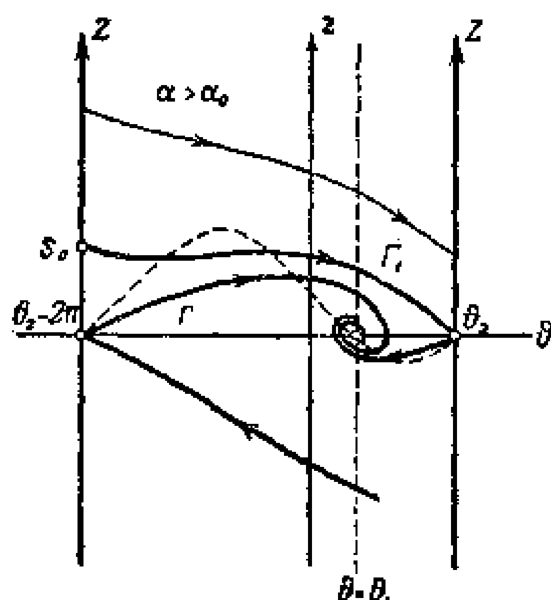


图 336

首先，和上一情况一样，我们立刻可以证实，存在着轨线 $z=z_1(\vartheta)$，它围绕相柱且满足条件 $z_1(\vartheta_2-2\pi)>z_1(\vartheta_2)$（这种曲线，特别地，可以是满足 $z(\vartheta_2)>\dfrac{1+\beta}{\alpha}$ 的那些曲线）．对它们来说，$s'<s$，亦即，当 s 充分大时，我们关心的后继函数的图（对任意的 α），总是位于分角线 $s'=s$ 的下面（图 337）．

现在研究以正値角系数从鞍点出发的分界线 Γ（三种可能情况表示于图 334—336 上）．在保守情况中 $\alpha=0$，分界线完全位于上半柱面上（参看图 322 及

323)．所以当 α 甚小时，当系统接近于保守系统时，图 334 上所示出的相图必定是成立的：分界线位于相柱面的上半部，且和半直线 Z' 相交于某点 $s=s_0'>0$[1]．因为按(7.5)随着 α 的增加，$\frac{dz}{d\vartheta}$ 单调地减少(当 $\alpha\to+\infty$ 时，趋于负无穷大)，那么当参数 α 增加时，分界线 Γ (在区域 $z>0$ 的范围内)单调地下降，随之 s_0' 逐渐减少，且在某分枝值 $\alpha=\alpha_0$ 上变成零(α_0 是 β 的某一函数；当 $\alpha=\alpha_0$ 时，显然分界线又回到鞍点；参看图 335)．因而，对所有的 $\alpha>\alpha_0$，分界线 Γ 的走向如图 334 所示，其起点 $s=0$ 有后继点 $s_0'>0$．此外，由于在分界线 Γ 上面没有方程 (7.5) 的奇点，所有和半直线 Z 相交的轨线都将围绕相柱，且相应地，这一半直线的所有 $s>0$ 的点，亦将有后继点 $s'(s'>s_0'>0)$；换句话说，当 $\alpha<\alpha_0$ 时，对所有 $s\geqslant 0$，后继函数

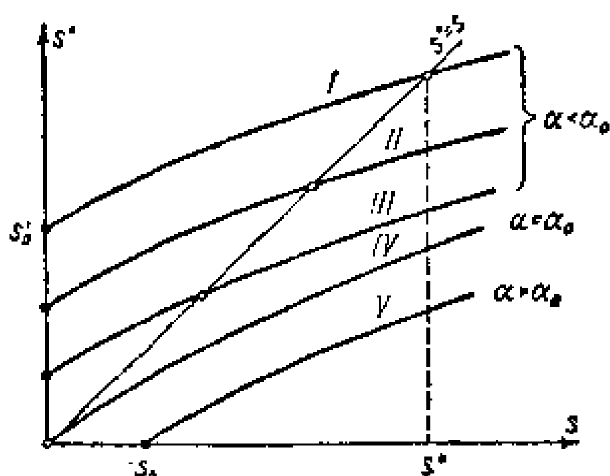


图 337

$s'=f(s)$ 存在(有定义)，而且 $f(0)=s_0'>0$．由于它的连续性[2]，当 $\alpha<\alpha_0$ 时，后继函数曲线必然要与分角线 $s=s'$ 相交(参看图 337 上的曲线 I，II 及 III，它们分别表示参数 ($\alpha<\alpha_0$) 取三个顺序增长的值的后继函数的图)．这个交点就是所研究之点变换的不动点 s^*，它对应于围绕相柱的极限环(极限环是唯一的，因为正象我们已证明的，围绕相柱的极限环不能多于一个)．很明显，当 $\alpha\to\alpha_0$ 时，不动点的坐标 $s^*\to+0$．

从同一些理由(参数 α 增加时 $\frac{dz}{d\vartheta}$ 减少)可以看到，当 $\alpha>\alpha_0$ 时，分界线 Γ 不再与相柱的母线 $\vartheta=\vartheta_2$ 相交，且点 $s=0$ 没有后

1) 方程 7.5 的解连续地依赖于参数 α (附录 I 中有相应的一般定理)．

2) 后继函数的连续性，可由关于微分方程之解与初始条件连续相关的定理推出(参看附录 I)．

继点(图 336)．但这时另一个在鞍点邻域有负导数 $\left(\frac{dz}{d\vartheta}<0\right)$ 的分界线 Γ_1，必定走到(沿负 τ 的方向运动)母线 $\vartheta=\vartheta_2-2\pi$ (图 336 上的半直线 Z)上的某点 $s_0>0$，因为它不可能是由稳定平衡状态 $(\vartheta_1, 0)$ 出发的．所以点 $s=s_0>0$ 将有后继点 $s'=0$，而后继函数曲线(当 $s>s_0>0$ 时连续)将通过位于分角线 $s=s_0'$ 下面的点$(s_0, 0)$(参看图 337 上的曲线 V)，并且，或者不与分角线相交(这时没有不动点，亦没有极限环)，或者有偶数个交点(不动点)．后者是不可能的，因为点变换 $s'=f(s)$ 不可能有多于一个的不动点，这是由于系统(7.4)的围绕相柱的极限环不能多于一个的缘故．

于是，当 $0<\beta<1$ 时，我们得到两个不同情况：$\alpha<\alpha_0$ 及 $\alpha>\alpha_0$．

当 $\alpha<\alpha_0$ 时，存在着唯一的周期运动——唯一的围绕相柱的极限环(图 338)．随着 α 的增加(但 $\alpha<\alpha_0$)，这个极限环不断下降(因为 s^* 减小)且当 $\alpha=\alpha_0$ 时与围绕相柱的分界线环(当 $\alpha=\alpha_0$

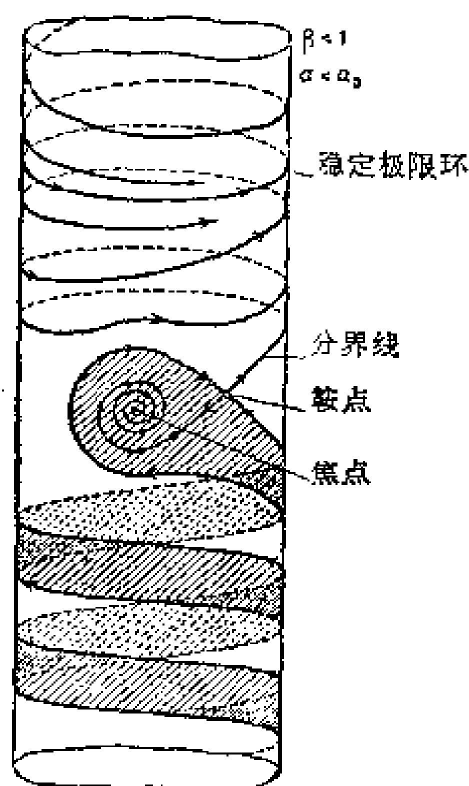


图 338

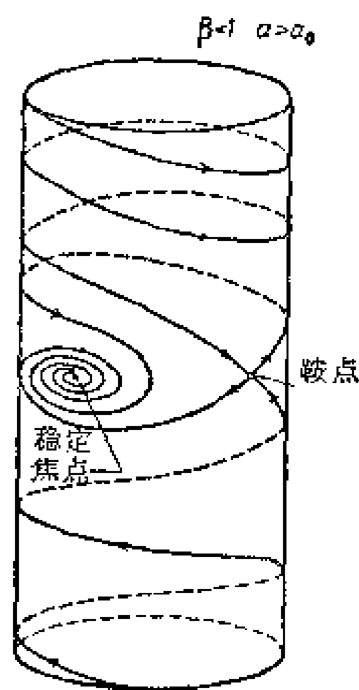


图 339

时)会合.

当 $\alpha > \alpha_0$ 时,任何周期运动都不存在(图 339).

我们所找到的两个第二类的周期运动,亦即围绕相柱的(当 α 任意, $\beta > 1$ 时有一个,当 $\alpha < \alpha_0$, $\beta < 1$ 时有另一个), 都是稳定的,因为所有相邻的运动都向这二个周期运动趋近. 但是,于第一情况中 ($\beta > 1$), 在任意初始条件下都能建立起周期运动,而在第二情况中, 却存在着一个初值区域, 系统从这个区中的点出发后,将趋向于静止状态(稳定焦点或稳定结点). 这个区域即图 338 上的影线区.

所得结果的物理意义是完全明显的. 如果系统中有正比于速度的阻尼,且作用着常值转动力矩,那么显然, 克服阻力所需的功随速度的变大而增长, 但这时外力矩作的功却保持不变. 所以当 $\beta > 1$ 时,亦就是说,如果常外力矩是那么大, 以致它大于最大的重力矩的值时,那么,对任意的初始条件, 这个力矩将使摆的振动不断加强, 直到建立起克服阻尼的功与外力矩的功之间的平衡为止. 反之,如果 $\beta < 1$,亦即,如果外力矩不大,而最大的重力矩大于这个力矩时,那么,外力矩本身将不能使摆"转圈". 这时, 只有在一定的初始条件下摆才能开始"转圈". 但是只有在每一圈中消耗于阻尼的能量,最后变得等于常力矩之外力所作的功的条件下,运动才能成为周期运动. 此外,因为必须有相应的初始条件,即相当大的初速度, 则对给定的 α, 阻尼消耗的功不可能任意地小(只有当摆可以运动得任意慢时,这才是可能的). 这意味着, 为了使每一圈上的能量损耗不超过一定的数值 (等于外力矩每圈上所作的功),必须使 α 充分地小,小于某一个临界值 α_0.

于是,我们的所有结果都得到了清晰的解释. 当然,对于同步马达情况,以及机器并联工作的情况,这种解释将是比较复杂的.

§4. 关于滑翔飞行的茹考夫斯基问题

研究关于滑翔机(发动机关车时的飞机, 鸟)在某一铅垂平面

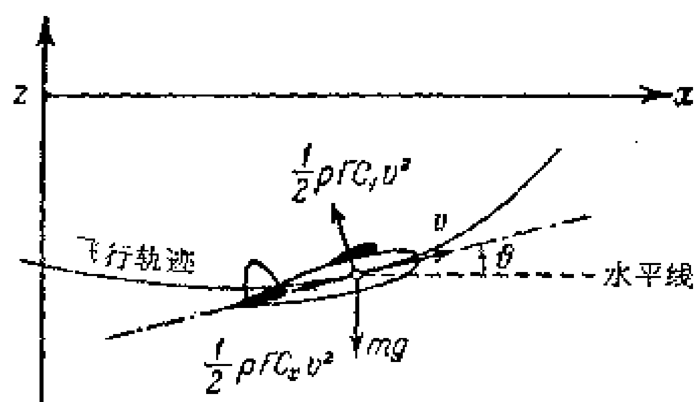


图 340

内进行滑翔飞行之茹考夫斯基问题[64]，作为本章的结束(图 340). 记：ϑ——轨迹的倾角，v——滑翔机重心的速度，m——滑翔机质量，F——机翼面积，g——重力加速度，ρ——空气密度，C_x 及 C_y——滑翔机阻力及升力的气动力系数. 那么滑翔机重心的运动方程，对加速度的切向及向心分量写出时，具有形状：

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= -mg\sin\vartheta - \frac{1}{2}\rho F C_x v^2, \\ mv\frac{d\vartheta}{dt} &= -mg\cos\vartheta + \frac{1}{2}\rho F C_y v^2. \end{aligned}\right\} \qquad (7.13)$$

假定滑翔机(对重心的)惯性矩很小，而尾翼产生的稳定力矩却很大，使得可以忽略滑翔机冲角的改变(滑翔机纵轴与其轨迹间的夹角的改变)，并假定冲角是常量；那么方程(7.13)中的 C_x 及 C_y 亦将是常量. 作变量变换

$$v = v_0 y,$$

其中 $v_0 = \sqrt{2mg/\rho F C_y}$ 为当滑翔机重量与升力所平衡时的水平飞行速度，以及

$$t = \frac{v_0}{g} t_{新},$$

我们可将方程(7.13)化为如下的无量纲形式：

$$\left.\begin{aligned} \dot{y} &= -\sin\vartheta - ay^2 = F(\vartheta, y), \\ \dot{\vartheta} &= \frac{-\cos\vartheta + y^2}{y} = \Phi(\vartheta, y), \end{aligned}\right\} \qquad (7.14)$$

其中字母上的点表示对新的无量纲时间的微分，且

$$a = C_x/C_y$$

(亦即,等于滑翔机阻力与升力的比值).

由于状态$(\vartheta + 2\pi, y)$和状态(ϑ, y)是物理上全同的状态(方程(7.14)右端是ϑ的周期函数,周期为2π),我们应该取圆柱面为相面(沿母线表示和速度v成比例的量y,沿准线表示ϑ). 不考虑滑翔机"尾部向前"飞行的情况,我们仅研究相柱面上半部($y \geqslant 0$)里的相轨线. 显然,相柱面上的积分曲线的方程可写为:

$$\frac{dy}{d\vartheta} = \frac{y(\sin\vartheta + ay^2)}{\cos\vartheta - y^2}. \tag{7.15}$$

应指出,这个方程有积分曲线 $y = 0$, 它是系统(7.14)的一条奇相轨线,对应于滑翔机在$\vartheta = -\frac{\pi}{2}$位置上的瞬时翻倒*,因为这时只有$v$(或$y$)等于零(根据(7.14), 如果$-\frac{3\pi}{2} < \vartheta < -\frac{\pi}{2}$, $\dot{\vartheta} = +\infty$,如果$-\frac{\pi}{2} < \vartheta < +\frac{\pi}{2}$, $\dot{\vartheta} = -\infty$**).

这种奇相轨线的出现,完全失速时($v = 0$)的滑翔机的这种物理上不可能的瞬时翻倒的出现, 是我们所作的关于滑翔机的冲角不变之假设所引起的. 当滑翔机速度甚小时, 这个假设必定是不成立的,因为飞行速度甚小时, 尾翼的稳定力矩也是很小的(尾翼在大飞行速度时,才能保证冲角几乎不变).

I. 和上一问题一样,先研究保守情况 $a = 0$ (没有阻力). 这

---

* "对应于滑翔机在 $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$ 位置上的瞬时翻倒"应为 "对应于滑翔机由 $\vartheta = +\frac{\pi}{2}$ 到 $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$ 的(或 $\vartheta = +\frac{\pi}{2}$ 位置上的)瞬时翻倒". 这对应于图 342 上从 $+\frac{\pi}{2}$ 到 $-\frac{\pi}{2}$ ($y = 0$)的跳跃,或图 343 上x轴上的尖点——译者注.

** 在这种情况里,不仅有瞬时翻倒——速度瞬时地等于零,ϑ由$+\frac{\pi}{2}$ 瞬时地经过零变到$-\frac{\pi}{2}$,而且还有瞬时斛斗——速度瞬时地等于零,ϑ由$+\frac{\pi}{2}$ 瞬时地经过π变到$\frac{3}{2}\pi\left(\text{即} -\frac{\pi}{2}\right)$, 这对应于图 342 上的从$+\frac{\pi}{2} \to +\pi(-\pi) \to -\frac{\pi}{2}$的跳跃,这时 $\dot{\vartheta} = +\infty$. 前者是波浪形飞行的极限状态, 后者是斛斗飞行的极限状态——译者注.

一情况茹考夫斯基曾进行过详细的研究[64,171]. 此时，积分曲线方

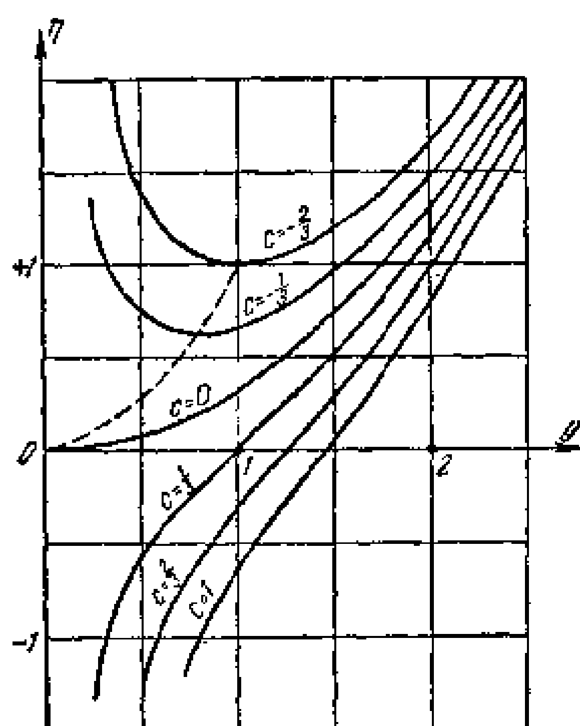


图 341

程(7.15)具有积分:

$$\frac{y^3}{3}-y\cos\vartheta=C\,(\text{常数}),\tag{7.16}$$

和三个奇点: 1) $\vartheta=0,\ y=+1$; 2) $\vartheta=+\frac{\pi}{2},\ y=0$; 3) $\vartheta=-\frac{\pi}{2},\ y=0$. 只有前一个才是 $a=0$ 时的方程组:

$$\dot{y}=-\sin\vartheta,\quad \dot{\vartheta}=\frac{-\cos\vartheta+y^2}{y}\tag{7.14a}$$

的平衡状态，它对应于滑翔机的等速($v=v_0$)直线*飞行状态. 其余两个奇点位于奇积分曲线 $y=0$ 上,正象前已指出的，它们对应于 $v=0$ 时的瞬时翻倒,而不是系统(7.14a)的平衡状态，因为在这些点上 $\dot{\vartheta}\neq 0$.

为了作出积分曲线，可以利用以下情况,那就是,从积分曲线

* "直线"原书为"水平"，因为滑翔机的定态飞行是与水平成一倾角的直线下滑飞行——译者注.

的方程(方程(7.16))可解出 ϑ:

$$\vartheta = \pm \arccos \eta, \tag{7.16a}$$

其中

$$\eta = \frac{y^3}{3} - \frac{C}{y} \quad (|\eta| \leqslant 1).$$

图 341 上表示出了对 $y > 0^*$ 的辅助曲线族 $\eta = \eta(y, C)$[1],而在图 342 和 343 上分别作出了相柱展开面和相柱本身上的相轨线. $C = -\frac{2}{3}$ 对应于中心型奇点 $\vartheta = 0, y = +1$——系统(4.14a)的平衡状态. 其他相轨线是闭的: 当 $-\frac{2}{3} < C < 0$, 是包围中心但不围绕相柱的闭相轨线,而当 $C>0$ 时, 是围绕相柱的闭相轨线[2]. 第一种闭相轨线对应于沿"波浪形"轨线的滑翔机的飞行, 而第二类对应于滑翔机翻"觔斗"的飞行. 图 344 上给出了滑翔机的飞行轨迹[3].

---

* 原书为 $y<0$——译者注.

1) 当 $C>0$ 时,曲线 $\eta = \eta(y, C)$ 是单调的,当 $C<0$ 时, 有位于抛物线 $y^2 = \eta$ 上的极小,因为不难看出,

$$\frac{d\eta}{dy} = \frac{2}{3}y + \frac{C}{y^2} = \frac{1}{2}(y^2 - \eta);$$

当 $C< -\frac{2}{3}$ 时,这些曲线全都位于直线 $\eta = +1$ 的上方.

2) 这二类闭相轨线是由 $C=0$ 的积分曲线分隔开来的,后者是由圆 $y=0$ 和鞍点分界线(分界线的方程为: $\vartheta = \pm \arccos \frac{y^2}{3}$)组成的.

3) 滑翔机在平面 x, z 上的这些对称飞行轨迹(假设没有空气阻力),最早在茹考夫斯基的著作里得到了研究(后来被称之为刨花型轨迹), 其方程亦可以用以下方法求得. 首先可看出, $v \sin\vartheta = \frac{dz}{dt}$, 对于 $C_x = 0$ 的情况,从方程(7.13)我们得到:

$$\frac{1}{2} d(v^2) = -g dz, \quad \frac{1}{2} v^2 = -gz \quad 或 \quad y^2 = -\frac{2gz}{v_0^2} \tag{α}$$

(我们取积分常数为零,亦即,对于给定的初始条件, $v=0$ 时的高度作为计算 z 的起点—— z 轴的原点的高度). 然后,显然有:

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}\vartheta \quad 或 \quad dx = \frac{dz}{\operatorname{tg}\vartheta} = \frac{dz}{R(z, C)}, \tag{β}$$

其中 $R(z, C)$ 是 z 的函数, 它是由关系式(7.16a)和(α)将 $\operatorname{tg}\vartheta$ 解为 z 的函数而得到的. 以任一种近似方法将(β)积分之(右方的积分不能用初等函数表示出来),我们便到 z 依赖于 x 的关系式,其图形如图 344 所示.

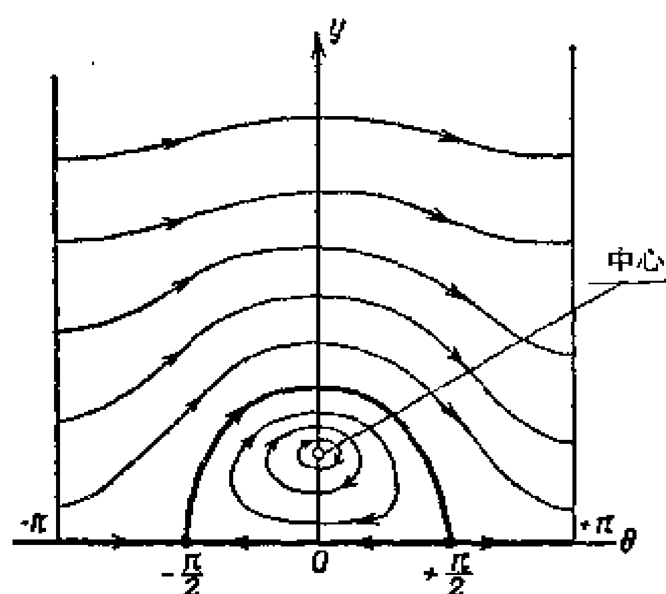


图 342

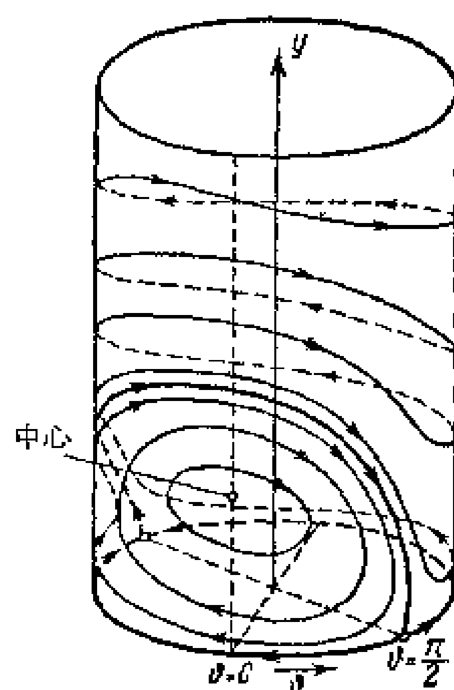


图 343

II. 进一步定性地研究考虑空气阻力时滑翔机的飞行（C_x 或相应的 $a > 0$）[166]. 和以前一样，方程组(7.14)有一个平衡状态；其坐标显然是：

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_0 &= -\operatorname{arc\,tg} a \left(-\frac{\pi}{2} < \vartheta_0 < 0\right), \\ y_0 &= \frac{1}{\sqrt[4]{1+a^2}} \ (0 < y_0 < 1). \end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

方程组(7.14)的这一平衡状态,对应于滑翔机以等速 $v < v_0$, 沿下降直线的直线飞行. 将方程组(7.14)在平衡状态(ϑ_0, y_0)邻域里线性化,不难证实，平稳状态总是稳定的,且当 a 不大时($a < \sqrt{8}$)是焦点.

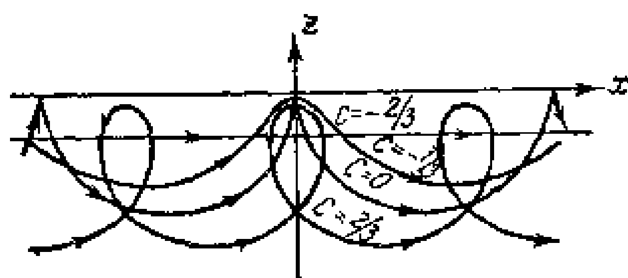


图 344

为了证明没有闭积分曲线(除去圆 $y = 0$ 以外),应用杜拉克判据. 将乘子 $B(\vartheta, y)$ 取作 y,对方程(7.14)得:

$$\frac{\partial}{\partial y}[yF]+\frac{\partial}{\partial \vartheta}[y\Phi]=-3ay^2\leqslant 0, \qquad (7.18)$$

同时只有在圆 $y=0$ 上,等号才成立．因而,在所研究的情况中,不围绕相柱的闭积分曲线（或由相轨线组成的闭迴路）是不存在的,而且围绕相柱的闭积分曲线亦不能多于一条．因为圆 $y=0$ 就是这样的围绕相柱的闭积分曲线(和保守情况一样,它对应于滑翔机当 $v=0$ 时的瞬时翻倒),可以断言，方程组(7.14)当 $a>0$ 时在上半相柱面上,**没有闭相轨线**,不管是围绕相柱的，还是不围绕的．换句话说，我们所研究的系统(当有空气阻力时)没有任何周期的振动运动．

积分曲线方程(7.15)，和 $a=0$ 的情况一样，除了平衡状态 (ϑ_0, y_0) 以外,还有两个鞍点型奇点：$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$及$\left(+\frac{\pi}{2},0\right)$，它们都不是方程组(7.14)的平衡状态．但是和情况 $a=0$ 不同，由鞍点$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 出发进入相柱上半部的分界线,已经不能再进入鞍点$\left(+\frac{\pi}{2},0\right)$了[1]．最后应指出,所有圆 $y=$ 常数 $\geqslant\frac{1}{\sqrt{a}}$,都是无切环,在其上有 $\dot{y}\leqslant 0$．所以,所有相轨线都从相柱上半部远处进入圆 $y=0$ 和圆 $y=\frac{1}{\sqrt{a}}$ 所围成的区域，其中还包含有平衡状态 (ϑ_0, y_0)．注意到闭积分曲线（除圆 $y=0$ 之外）是不存在的，我们可得结论，**所有相轨线都将渐近地趋近于稳定的平衡状态** (ϑ_0, y_0)（特别地、鞍点$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 的分界线亦向这一点趋近)．

由以上所说，已足以建立起方程组(7.14)当 $a>0$ 时的相柱之相轨线划分的定性图象．图 345 上给出了这一划分．

---

1) 如果这个分界线进入鞍点$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，那么在相柱面上就有了两个由积分曲线组成的闭回路［由鞍点的分界线和同一圆 $y=0$ 组成的，以及圆 $y=0$ 本身的闭回路(后半句原书没有——译者注)]，且它不围绕相柱，这是不可能的，因为杜拉克判据的条件是成立的．

这样，有空气阻力时，滑翔机有唯一的稳定平衡状态——沿与水平成倾角 ϑ_0 之下降直线的等速($v = v_0 y_0$)飞行. 对任意的初始条件，均将建立起这种飞行状态. 如果滑翔机的初速度甚大（在相柱面上，对应于那些位于绕相柱很多圈的相轨线上的点），那么，滑翔机先翻几个"斛斗"（其数目决定于初始条件），然后沿"波浪形"的轨线趋近于直线飞行轨迹. 滑翔机飞行的这样的轨迹（其重心在铅垂平面 x, z 内的运动轨迹）如图 346 所示[1].

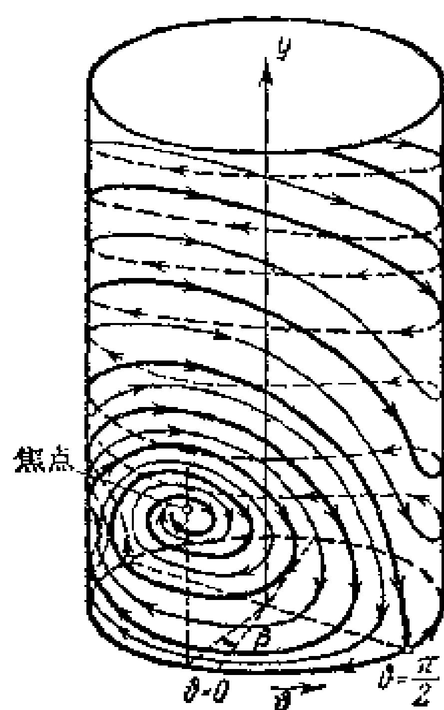


图 345

对有柱形相面之动力学系统的简短研究，我们到此结束[2]. 除了平面及柱面之外，在某些情况中，还需要采用其他类型的相面，例如环面或多叶平面等. 相面为环面的系统不属本书的研究范围，而若干具有多叶相平面的系统，将在下一章中进行研究.

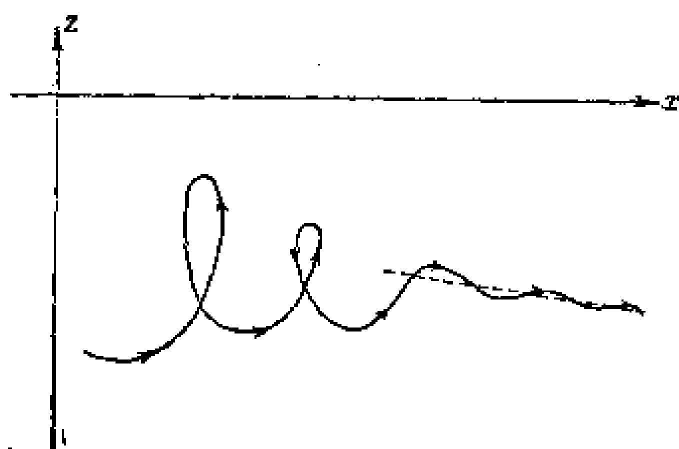


图 346

1) 在 x, z 平面上滑翔机飞行轨迹的方程，和保守情况 $a = 0$ 不同，它已经不可能经过积分求出了，因为在所研究的耗散情况里 $a > 0$，积分(7.16)和能量守恒定律(α)都不成立(487 页的注中导出的).

2) 在下一章(§ 10)中，还将研究具有相柱面之动力学系统的另一例子（蒸汽机的最简单的模型).

第八章　点变换法和分段线性系统[1]

§1. 引　言

现在我们转入对非线性动力学系统的定量研究，而且，和以前一样，只限于二阶(单自由度的)自治系统．正如前面已经指出过的，在理论发展的现阶段，这种定量研究(分析方法)实际上只能较满意地应用于三类系统，而这三类系统都是极有实际意义的．其中一类为似保守系统，包括最有实用价值的似谐振子系统；第二类为不连续振动系统．这两类系统将分别在第九章及第十章中加以阐述．第三类包括所有可以用点变换法进行定量研究的系统[2]．最易于采用这种方法的是所谓分段线性系统，这类系统的相空间被划分成若干区域，在每一区域内运动的动力学方程都是线性的．对此类分段线性系统的定量研究构成本章的内容．

在上册第三章§4—6里曾经利用点变换法对有关分段线性系统之自振的某些问题进行过研究．在这些问题中，极限环的寻求以及其稳定性的研究归结为：建立半直线对其自身的点变换(推导出相应的后继函数)，找出所得到的点变换的不动点，并研究其稳定性，并且在所有这些问题中，我们都找到了(或有可能找到)显式的后继函数．

但在绝大多数问题中，找出显式的后继函数相当困难，而找出参数形式的后继函数则比较容易．例如，某一动力学系统，其相平面 x, y 被直线 $x=x_1$ 及 $x=x_2$ 划分为(I)，(II)，(III)三个区域

---

1) 本章为热列佐夫所写．

2) 点变换的基本概念(后继函数、点变换的不动点及其稳定性等)曾在第五章§7中讲述过．在那里还曾提出关于不动点稳定性的克尼格斯定理．

(图 347)，在每个区域内，所研究之系统的运动方程都是线性的．将相点由区域 (I) 转入 (II)，由 (II) 转入 (III)，由(III)转入(II)以及由(II)再转入(I)时依次通过的半直线分别以 S, S_1, S_2, S_3 表示．这些半直线上各点之纵坐标以 s, s_1, s_2, s_3 表示．所研究之动力学系统的相轨线在"线性区域"(I)，(II)，(III)内构成半直线 S 向 S_1, S_1 向 S_2, S_2 向 S_3 及 S_3 向 S 的点变换，而且半直线上各点彼此单值连续地相对应；这些点变换分别以 Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 表示．将相应区域内系统的线性微分方程积分以后，我们就能够对于每一半直线向半直线的点变换找出参数形式的对应函数[1]

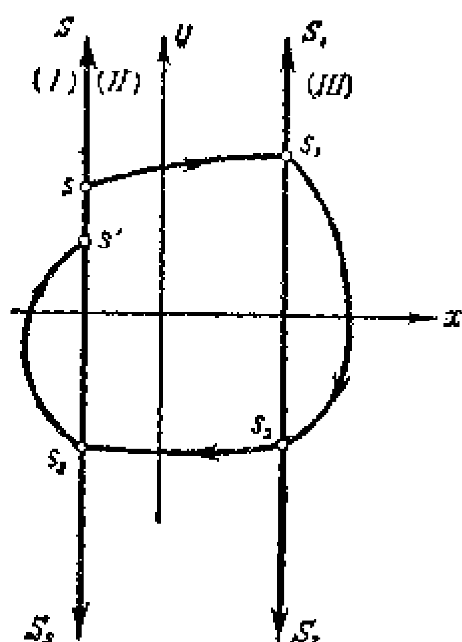


图 347

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{变换 } \Pi_1:\ s_1 = \varphi_1(\tau_1),\ s = \psi_1(\tau_1);\\
&\text{变换 } \Pi_2:\ s_2 = \varphi_2(\tau_2);\ s_1 = \psi_2(\tau_2);\\
&\text{变换 } \Pi_3:\ s_3 = \varphi_3(\tau_3),\ s_2 = \psi_3(\tau_3);\\
&\text{变换 } \Pi_4:\ s' = \varphi_4(\tau_4),\ s_3 = \psi_4(\tau_4);
\end{aligned}\right\} \tag{8.1}
$$

其中 τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 表示相点穿越相应区域所需时间[2]．

---

1) 一线对另一线进行点变换时所列出之后继函数，通常称为对应函数．

2) 由于在区域(II)内系统的运动微分方程为线性方程，因此，$t=0$ 时由半直线 S 上坐标为 s 的点出发在此区域内移动的相轨线，其方程必与 s 呈线性关系，即：

$$x = sf_1(t) + f_2(t),$$
$$y = sf_3(t) + f_4(t).$$

设相点沿此相轨线移动，经过 $t=\tau_1$ 到达半直线 S_1 上坐标为 s_1 的点；显然，此时必有：

$$x_2 = sf_1(\tau_1) + f_2(\tau_1)$$
$$s_1 = sf_3(\tau_1) + f_4(\tau_1)$$

(x_2 为 S_1 上各点的横坐标)．从得出的关系式解出 s 及 s_1，我们将得到变换 Π_1 的对应函数：

$$s = \frac{x_2 - f_2(\tau_1)}{f_1(\tau_1)} \equiv \psi_1(\tau_1);\ s_1 = \psi_1(\tau_1)\cdot f_3(\tau_1) + f_4(\tau_1) \equiv \varphi_1(\tau_1)$$

以同样方法也可以求出其余的点变换 Π_2, Π_3, Π_4 之对应函数．

如果从半直线 S 上某一线段出发的相轨线依次通过三个区域[区域(II), (III), (II) 及 (I); 参看图 347]*之后重新返回此线段，则半直线 S 的这一线段对于它自身的点变换 Π [具有后继函数 $s' = f(s)$]就可以看做是依次采用变换 Π_1, Π_2, Π_3 及 Π_4 的结果，或者说，变换 Π 是变换 Π_1, Π_2, Π_3 及 Π_4 的乘积，即：

$$\Pi = \Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_3 \cdot \Pi_4.$$

很明显，寻求通过所有三个区域(即通过区域 (I), (II), (III)) 的极限环就归结为寻求"全"点变换 Π 的不动点，也就是求解如下方程组(通常是超越方程)的问题：

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(\tau_1) = \psi_2(\tau_2), \quad \varphi_3(\tau_3) = \psi_4(\tau_4), \\ \varphi_2(\tau_2) = \psi_3(\tau_3), \quad \varphi_4(\tau_4) = \psi_1(\tau_1). \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

应用克尼格斯定理，并注意到在不动点有

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{\varphi_1'(\bar{\tau}_1)}{\psi_2'(\bar{\tau}_2)} \cdot \frac{\varphi_3'(\bar{\tau}_3)}{\psi_3'(\bar{\tau}_3)} \cdot \frac{\varphi_4'(\bar{\tau}_4)}{\psi_4'(\bar{\tau}_4)}$$

[其中 $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$, $\bar{\tau}_3$, $\bar{\tau}_4$ 表示不动点的 τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 值，即方程组 (8.2) 的解][1]这一关系式，就不难确定不动点以及对应的极限环的稳定性。

用这种方法原则上可以求出任何二阶分段线性动力学系统的点变换，并对该动力学系统进行定量研究。但在研究和求解用以确定不动点的方程组，以及讨论求得的不动点的稳定性时，所遇到的实际困难，必然会随着运动方程的线性区域数目(即"全"点变换乘积中表示点变换的乘子的数目)的增多而迅速增加。因此，为了避免叙述上的复杂化，在本章中，我们只限于研究自振系统中一些比较简单的问题。其"全"点变换中所包括的直线对直线的点变换不超过两个，并且都是以参数形式表示出的。在这些问题中，对应于极限环的不动点将可从两个超越方程所构成的方程组中求得；

---

* 原书中为：(I),(II),(III) 及(II)——译者注。

1) 一般来说，在我们所研究的这一动力学系统内，可能有只通过两个区域[例如区域(I)及(II)]的极限环。后者显然可以用建立点变换 $\Pi' = \Pi_5 \cdot \Pi_4$ 的方法求得，其中 Π_5——为半直线(s)向(s_3)的点变换，完成这一变换的相轨线全部位于区域(II)内。

对后者进行研究时应用拉梅尔图形是很方便的(参看第三章).

§2. 电子管振荡器

1. 振动方程. 作为第一个例子，我们研究栅极或屏极电路含有振荡回路的电子管振荡器中所发生的自振(图 348). 如果将屏极反应、栅流及管内电容忽略不计，则和我们在第一章 §6 里见到的一样，此种电子管振荡器之振动方程可写成如下形式：

$$LC\frac{d^2u}{dt'^2}+[RC-MS(u)]\frac{du}{dt'}+u=0^{1)}. \tag{8.3}$$

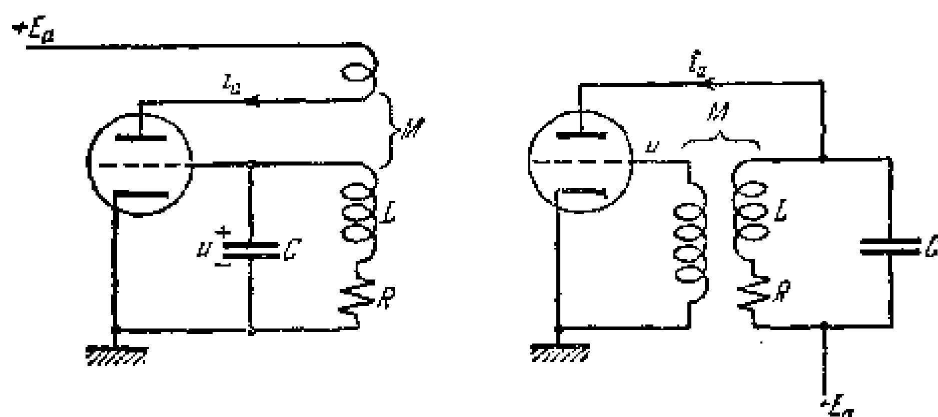


图 348

在本节内，我们将电子管的特性 $i_a=i_a(u)$，进行如图 349 所示的分段线性近似化，即：

$$i_a=\begin{cases}0 & u\leqslant-u_0\text{ 时},\\ S(u-u_0) & u>-u_0\text{ 时},\end{cases} \tag{8.4}$$

其中 S 为特性曲线上升段的互导，u_0 为电子管截止电压的绝对值($u_0>0$). 引入无量纲变量：$x=\dfrac{u}{u_0}$，$t=\omega_0t'$，其中$\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ 为振荡回路的"汤姆逊"频率. 引入这些变量，并采用电子管特性曲线的分段线性近似(8.4)以后，方程(8.3)可写成如下形式：

---

1) 此处时间用 t' 表示，这是因为在以后的叙述中将用 t 来表示无量纲时间.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{当 } x < -1 \text{ 时} & \ddot{x} + 2h_1\dot{x} + x = 0, \\ \text{当 } x > -1 \text{ 时} & \ddot{x} - 2h_2\dot{x} + x = 0,\end{array}\right\} \tag{8.5}$$

其中

$$h_1 = \frac{\omega_0}{2} RC, \quad h_2 = \frac{\omega_0}{2}[MS - RC].$$

这样一来，对电子管特性曲线采用此种分段线性近似后，就使电子管振荡器的相平面 $x, y(y = \dot{x})$ 被直线 $x = -1$ 划分成两个区域(I)及(II)(图 350). 在每一区域内相轨线都由相应的线性微分方程(8.5)决定[1]. 显然，我们必须认为相轨线是处处连续的曲线，包括线性区域的边界，即直线 $x = -1$ 在内.

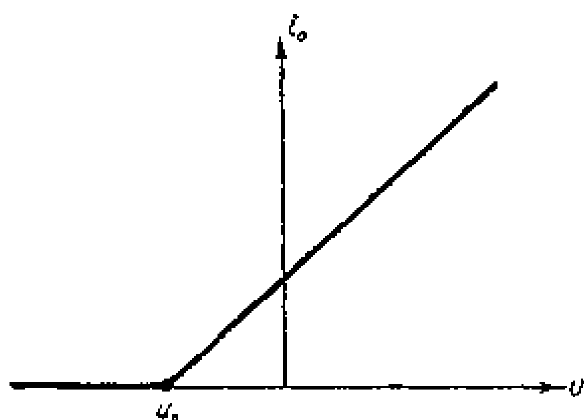


图 349

唯一的平衡状态 $x = 0$, $y = 0$ 在区域(II)内. 当 $h_2 < 0$ (即 $MS < RC$)时，此平衡状态稳定，而当 $h_2 > 0$ (即 $MS > RC$) 时，是不稳定的. 下面我们只研究后一种情形——“自激”振荡器情况[2]. 由于平衡状态 $x = 0$, $y = 0$, 当 $0 < h_2 < 1$ 时为不稳定焦点，$h_2 > 1$ 时为不稳定结点，而在任何情况下，都不可能成为鞍点，故而，能定性地确定相平面相轨线划分的性质的奇轨线，只可能是我们已经遇到过的平衡状态和极限环（如果后者存在的话）. 因此，我们的主要任务就在于找出极限环，并研究其稳定性.

由于在每个区域 (I),(II) 内相轨线之方程——振荡器的振动

---

1) 很明显，在建立电子管振荡器的数学模型时，我们对电子管特性曲线所做的分段线性近似以及关于没有栅流和屏极反应的假设，当电压 u 取足够大的正值时，就不可能反映出实际电子管和电子管振荡器的性能，因为在这种情况下，电子管内必有栅流和屏极反应. 因此，我们现在所采用的电子管振荡器的数学模型所表现出来的一些性质(例如，当 $h_2 > 1$ 时存在趋向无穷远的相轨线)并不反映实际电子管振荡器的性能.

2) 若 $h_2 < 0$, 即 $MS < RS$, 则不难看出：所有相轨线都将渐近地($t \to \infty$ 时)趋向原点，即稳定平衡状态，因而振荡器中将不发生自振.

方程(8.5)——都是线性的，因此在相平面上就不可能存在整个位于一个区域内[区域(I)或区域(II)]的极限环． 极限环如果存在，它就必然要通过两个区域，并包围平衡状态．从而它就必然与这两区域的边界(即直线 $x=-1$)相交．

将此直线分为两个半直线：半直线 $S: x=-1, y=-s(s>0)$，和半直线 $S': x=-1,\ y=s'(s'>0)$． 这些半直线显然都是无切半直线：由区域(II)移向区域(I)(t 增加时)的相轨线与半直线 S 相交；由区域(I)移向区域(II)的相轨线则与 S' 相交．

我们来观察由半直线 S 上某一点 s 出发的相轨线．此轨线通过区域(I)且与半直线 S' 相交于 s' 点，然后，如果 $h_2<1$，即在区域(II)内的轨线为螺线的情况下，必然重新回到 S 上的某一点 S_1(图 350)． 从而当 $0<h_2<1$ 时半直线上的 s 及 s_1 点彼此单值连续地相对应，相轨线就实现了半直线 S 对其自身的点变换．这一变换的不动点显然就是极限环与半直线 S 的交点．

如果 $h_2>1$，则如前所述，平衡状态 $x=0, y=0$ 必为不稳定结点；在区域(II)内将有两条趋向无穷远的直线相轨线(图 351)，因此，由半直线的 s' 点出发的轨线，必然走向无穷远，而不可能再返

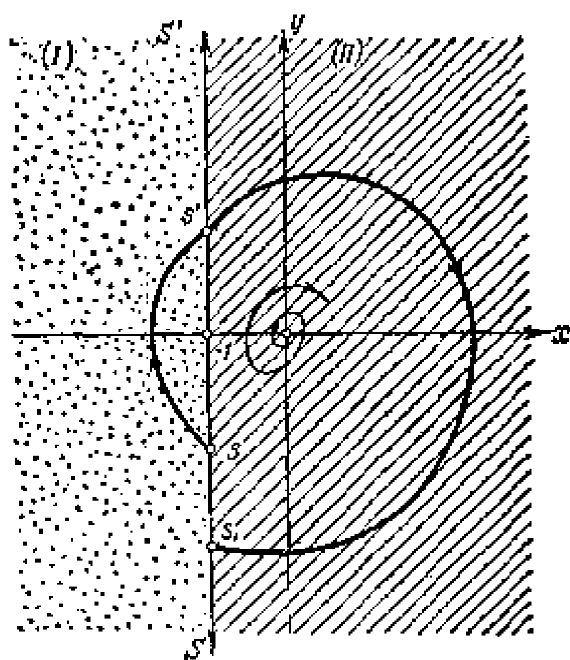


图 350

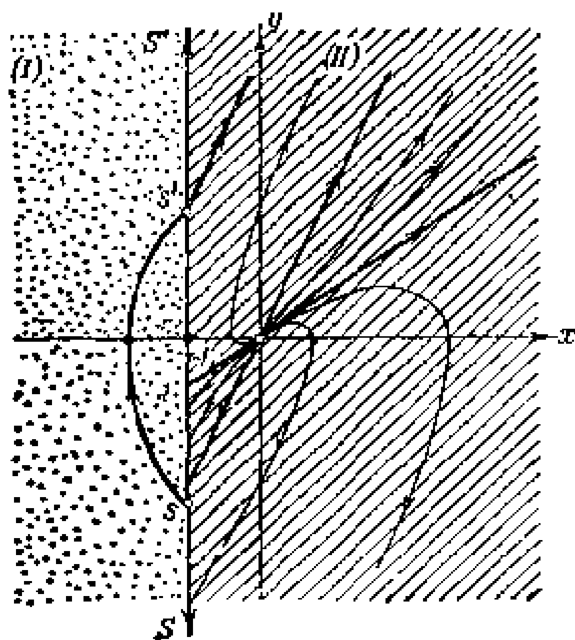


图 351

回到半直线 S 上．很明显，在这种情况下，相平面 x, y 上不可能有任何极限环存在，所有相轨线都将走向无穷远，也就是说，必然会超出我们采用的数学模型所能适用的区域（在这一区域内所采用的数学模型能够反映实际电子管振荡器性能）．

2. 点变换． 这样，我们研究 $0 < h_2 < 1$ 的情况．半直线 S 对它自身的点变换（我们将以 Π 表示）显然可以看成是两个点变换的乘积：其一为半直线 S 上的 s 点对半直线 S' 上 s' 点的变换 Π_1［由区域（I）内的轨线所实现的］，其二为 s' 点向半直线 S 上 s_1 点的变换 Π_2［后者由区域（II）内的轨线所实现］．下面我们来寻求这些变换的解析表达式．

在区域(I)($x < -1$)内，相轨线由微分方程组(8.5)的第一个方程决定．我们已经知道[1)]，它的解（对于 $t = 0$ 时通过 $x = x_0$ 及 $y = y_0$ 点的轨线来说）可写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{-h_1 t}\left\{x_0 \cos\omega_1 t + \frac{y_0 + h_1 x_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right\}, \\ y = \dot{x} &= e^{-h_1 t}\left\{y_0 \cos\omega_1 t - \frac{x_0 + h_1 y_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

其中

$$\omega_1 = +\sqrt{1 - h_1^2}.$$

因此，$t = 0$ 时由半直线 S 上 s 点出发的相轨线($x_0 = -1$，$y_0 = -s$，其中 $s > 0$)，其方程将有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} x &= -e^{-h_1 t}\left[\cos\omega_1 t + \frac{S + h_1}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right], \\ y_0 = \dot{x} &= e^{-h_1 t}\left[-s\cos\omega_1 t + \frac{1 + h_1 s}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

若相点沿相轨线(8.7)运动，且当 $t_1 = \frac{\tau_1}{\omega_1}$ 瞬时到达半直线 S' 的 s' 点（$x = -1$，$y = s' > 0$）（图 350）．则有：

$$-1 = -e^{-\frac{h_1\tau_1}{\omega_1}}\left[\cos\tau_1 + \frac{s + h_1}{\omega_1}\sin\tau_1\right],$$

---

1) 可参看第一章 §4．

$$s' = e^{-\frac{h_1\tau_1}{\omega_1}}\left[-s\cos\tau_1 + \frac{1+sh_1}{\omega_1}\sin\tau_1\right].$$

由上面的方程中解出 s 及 s'，我们将得到以参数形式表出之变换 Π_1 的对应函数，即：

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{e^{\gamma_1\tau_1} - \cos\tau_1 - \gamma_1\sin\tau_1}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\sin\tau_1} \\ s' &= \frac{e^{-\gamma_1\tau_1} - \cos\tau_1 + \gamma_1\sin\tau_1}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\cdot\sin\tau_1} \end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

其中

$$\gamma_1 = \frac{h_1}{\omega_1} = \frac{h_1}{\sqrt{1-h_1^2}}$$

（当 h_1 由 0 变到 $+1$ 时，γ_1 由 0 单调地趋向 $+\infty$）. 可以看出，s' 的表达式可从 s 的表达式通过以 $-\gamma_1$ 代替 γ_1 得出． 将 (8.8) 微分后，得：

$$\frac{ds}{d\tau_1} = \frac{1 - e^{\gamma_1\tau_1}(\cos\tau_1 - \gamma_1\sin\tau_1)}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\cdot\sin^2\tau_1}$$

和

$$\frac{ds'}{d\tau_1} = \frac{1 - e^{-\gamma_1\tau_1}(\cos\tau_1 + \gamma_1\sin\tau_1)}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\cdot\sin^2\tau_1}.$$

引入辅助函数

$$\varphi(\tau, \gamma) = 1 - e^{\gamma\tau}(\cos\tau - \gamma\sin\tau), \tag{8.9}$$

其图象（对固定的 $\gamma > 0$ 而言）定性地表示在图 352 上．从这一函数的性质中我们指出如下三点：

1) $\varphi(-\tau, -\gamma) \equiv \varphi(\tau, \gamma)$;

2) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau} = (1+\gamma^2)e^{\gamma\tau}\sin\tau$;

3) 在 $\gamma > 0$ 的情况下，当 $\tau = \tau^0(\gamma)$ 时，$\varphi(\tau, \gamma)$ 等于零（而且 $\pi < \tau^0 < 2\pi$），当 $\tau < \tau^0$ 时，大于零．

此时

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{e^{\gamma_1\tau_1}\varphi(\tau_1, -\gamma_1)}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\cdot\sin\tau_1}, \quad \frac{ds}{d\tau_1} = \frac{\varphi(\tau_1, \gamma_1)}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\cdot\sin^2\tau_1}; \\ s' &= \frac{e^{-\gamma_1\tau_1}\varphi(\tau_1, \gamma_1)}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\cdot\sin\tau_1}, \quad \frac{ds'}{dt} = \frac{\varphi(\tau_1, -\gamma_1)}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\cdot\sin^2\tau_1}. \end{aligned}\right\} \quad (8.8a)$$

由表达式(8.8a)及函数 $\varphi(\tau, \gamma)$ 的性质可以看出，为了获得 s 在 $0 < s < +\infty$ 区间的一切值，变换参数 τ_1 必须在 $0 < \tau_1 < \pi$ 区间内变化，同时 τ_1 由 0 增至 π 时，s 及 s' 单调地由 0 增至 $+\infty$（$\tau_1 \to +0$ 时；$s, s' \to 0$；$\tau_1 \to \pi - 0$ 时，$s, s' \to +\infty$；当 $0 < \tau_1 < \pi$ 时，$s, s', \dfrac{ds}{d\tau_1}, \dfrac{ds'}{d\tau_1}$ 均取正值而且连续）[1].

为了画出变换 Π_1 的对应函数，即联系 s 及 s' 的函数．只需指出如下几点：

1）当 $0 < \tau < \pi$ 时

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{\varphi(\tau_1, \gamma_1)}{\varphi(\tau_1, -\gamma_1)} > 0,$$

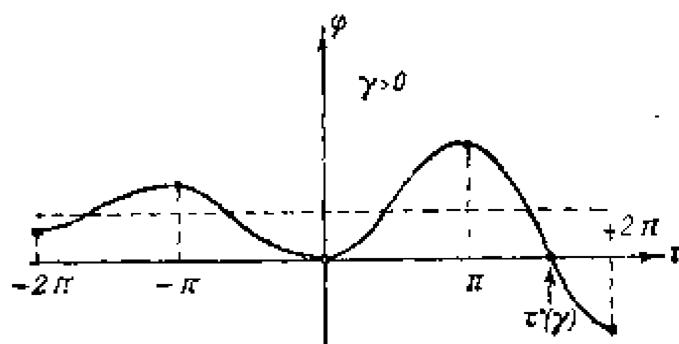


图 352

并由 1（$\tau_1 \to +0$ 时）单调地增至 $e^{\gamma_1\pi}$（$\tau_1 \to \pi - 0$ 时），因为，当 $0 < \tau < \pi$ 时，有：

1）变换参数 τ_1 为相点在区域(I)内所走那一段距离所需的无量纲时间——折算穿越时间．因此，从对应于已知 s 值的所有可能的 τ_1 值[根据(8.8)的第一个关系式]中，我们必须取最小值．这样一来，τ_1 的变化区间必须是[根据(8.8)式]对应于 $0<s<+\infty$ 的最小正值区间．这样的区间恰好是 $0<\tau_1<\pi$．

当 $\tau_1 \to 0$ 时，s 及 s' 的极限值可以由(8.8)中求得，例如应用罗彼得法则．

$$\frac{d^2s}{ds'^2} = \frac{\partial}{\partial\tau_1}\left\{\frac{\varphi(\tau_1, \gamma_1)}{\varphi(\tau_1, -\gamma_1)}\right\}\frac{1}{\frac{ds'}{d\tau_1}}$$

$$= \frac{2(1+\gamma_1^2)^{\frac{3}{2}}\sin^3\tau_1}{[\varphi(\tau_1, -\gamma_1)]^3}[\operatorname{sh}\gamma_1\tau_1 - \gamma_1\sin\tau_1] > 0; \qquad (8.10)$$

2）当 $\tau \to \pi - 0$ 时，对应函数(8.8)具有直线渐近线

$$s = e^{\gamma_1\pi}s' + a, \qquad (8.11)$$

其中

$$a = \lim_{\tau\to\pi-0}[s - e^{\gamma_1\pi}s'] = -\frac{2\gamma_1(1+e^{\gamma_1\pi})}{\sqrt{1+\gamma^2}} < 0;$$

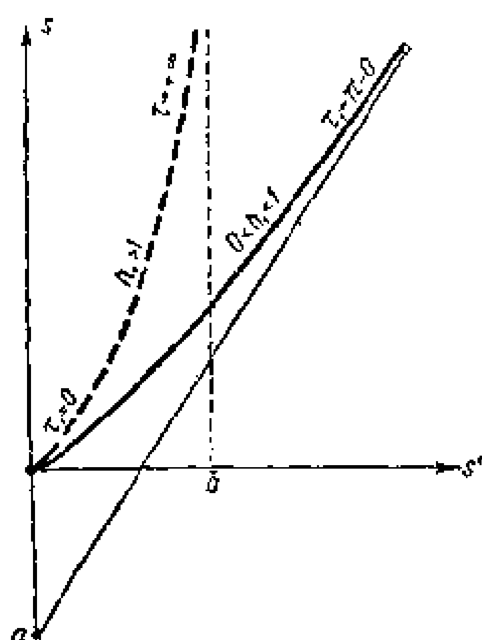


图 353

3）由于 $\frac{d^2s}{ds'^2} > 0$ 以及 $a < 0$，曲线(8.8)位于渐近线(8.11)的上方. 对应函数(8.8)的图象表示在图 353 上(实线为所研究的 $0 < h_1 < 1$ 情况).

当 $h_1 > 1$ 时，方程(8.5)在区域(I)内的解可利用(8.7)，将其中的三角函数代之以相应的双曲函数，ω_1 代之以 $\omega_1 = \sqrt{h_1^2 - 1}$ 求得；不难看出，在这种情况下，变换 Π_1 的对应函数可用同样的方法由(8.8)中求得. 这样一来，当 $h_1 > 1$ 时，有：

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{e^{\bar{\gamma}_1\tau_1} - \operatorname{ch}\tau_1 - \bar{\gamma}_1\operatorname{sh}\tau_1}{\sqrt{\bar{\gamma}_1^2 - 1}\operatorname{sh}\tau_1}, \\ s' &= \frac{e^{-\bar{\gamma}_1\tau_1} - \operatorname{ch}\tau_1 + \bar{\gamma}_1\cdot\operatorname{sh}\tau_1}{\sqrt{\bar{\gamma}_1^2 - 1}\operatorname{sh}\tau_1}, \end{aligned}\right\} \qquad (8.12)$$

其中

$$\bar{\gamma}_1 = \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 - 1}}$$

(当 h_1 由 1 变化到 $+\infty$ 时，$\bar{\gamma}_1$ 由 $+\infty$ 单调地减小到 1). 这里同

样不难确信，当 τ_1 由 0 变化到 $+\infty$ 时，s 由 0 单调增至 $+\infty$，而 s' 则由 0 增至

$$\bar{a}=\lim_{\tau_1\to+\infty}s'=\sqrt{\frac{\bar{\gamma}_1-1}{\bar{\gamma}_1+1}},$$

此时对应函数(8.11)之图象如图 353 中虚线所示.

下面我们着手研究点变换 Π_2——由区域(II)中的相轨线所实现的、半直线 S' 各点对半直线 S 各点 s 的变换，且只限于考虑 $0<h_2<1$ 的情况[1]. 令相点在 $t=-\frac{\tau_2}{\omega_2}<0$ 瞬时由半直线 S' 上的 s' 点出发，沿区域(II)之相应相轨线移动，于 $t=0$ 瞬时到达半直线 S 上之 s_1 点(图 350). 由于方程(8.5)在区域(II)的解，显然可以借助于区域(I)的解，将 h_1 代之以 $-h_2$，ω_1 代之以 $\omega_2=+\sqrt{1-h_2^2}$ 求得，故而将(8.7)中之 h_1 以 $-h_2$，ω_1 以 ω_2，s 以 s_1，τ_1 以 $-\tau_2$ 代替之后，即可求出我们所要研究的相轨线方程(在时间间隔 $-\frac{\tau_2}{\omega_2}\leqslant t\leqslant 0$ 内成立，且当 $t=0$ 时，有 $x=-1$，$y=-s_1<0$). 采用同样的代换可由(8.8)找出变换 Π_2 的对应函数——通过参数 τ_2 联系 s'，s_1 二量的函数 [在区域 (II) 内的折算穿越时间 τ_2 当然大于零]. 这样一来，变换 Π_2 的对应函数将具有如下形式:

$$\left.\begin{aligned}s_1&=-\frac{e^{\gamma_2\tau_2}-\cos\tau_2-\gamma_2\sin\tau_2}{\sqrt{1+\gamma_2^2}\cdot\sin\tau_2},\\ s'&=-\frac{e^{-\gamma_2\tau_2}-\cos\tau_2+\gamma_2\sin\tau_2}{\sqrt{1+\gamma_2^2}\cdot\sin\tau_2},\end{aligned}\right\}\tag{8.13}$$

其中

$$\gamma_2=\frac{h_2}{\omega_2}=\frac{h_2}{\sqrt{1-h_2^2}}.$$

很明显，

$$\left.\begin{aligned}&s_1=-\frac{e^{-\gamma_2\tau_2}\varphi(\tau_2,-\gamma_2)}{\sqrt{1+\gamma_2^2}\cdot\sin\tau_2},\quad s'=-\frac{e^{\gamma_2\tau_2}\varphi(\tau_2,\gamma_2)}{\sqrt{1+\gamma_2^2}\cdot\sin\tau_2}\\ &\text{以及}\\ &\frac{ds_1}{ds'}=\frac{\varphi(\tau_2,\gamma_2)}{\varphi(\tau_2,-\gamma_2)}.\end{aligned}\right\}\tag{8.13a}$$

---

1) 前面已经指出，当 $h_2>1$ 时，Π_2 不存在，所有相轨线均走向无穷远.

变换参数 τ_2 必须在这样的最小正值区间内变化，以保证 s 可获得 $0 < s' < +\infty$ 中的一切数值. 由函数 $\varphi(\tau, \gamma)$的性质(图 352)和关系式(8.13a)可以看出，这一区间为 $\pi < \tau_2 < \tau_2^0$，其中 τ_2^0 为 $s'=0$ 或 $\varphi(\tau_2, \gamma_2) = 0$ 的最小正根（显然，$\pi < \tau_2^0 < 2\pi$）. 不难证实对应函数(8.13)有下列性质：1) τ_2 由 τ_2^0 降至 π 时，s' 由 0 单调增至$+\infty$，而 s_1 则由某一数值 s_1^0 同样增至$+\infty$；2) $\frac{d^2 s_1}{ds'^2}>0$ [在(8.10)中作代换：s 以 s_1，γ_1 以 $-\gamma_2$，τ_1 以 $-\tau_2$，并考虑到 $\pi < \tau_2 < \tau_2^0 < 2\pi$，就可以证明这一点]；因此当 s' 增加时，$\frac{ds_1}{ds'}$将由 0（当 $s'=0$ 即 $\tau_2 = \tau_2^0$ 时）单调地增至 $e^{\gamma_2\pi}$（当 $s' \to \infty$，即 $\tau_2 \to \pi - 0$ 时）；3)当 $\tau_2 \to \pi + 0$ 时，曲线(8.13)*有一渐近直线

$$s_1 = e^{\gamma_2\pi}s' + \frac{2\gamma_2(1 + e^{\gamma_2\pi})}{\sqrt{1 + \gamma_2^2}}. \tag{8.14}$$

点变换 Π_2 的对应函数(8.13)具有如图 354 所示之形状.

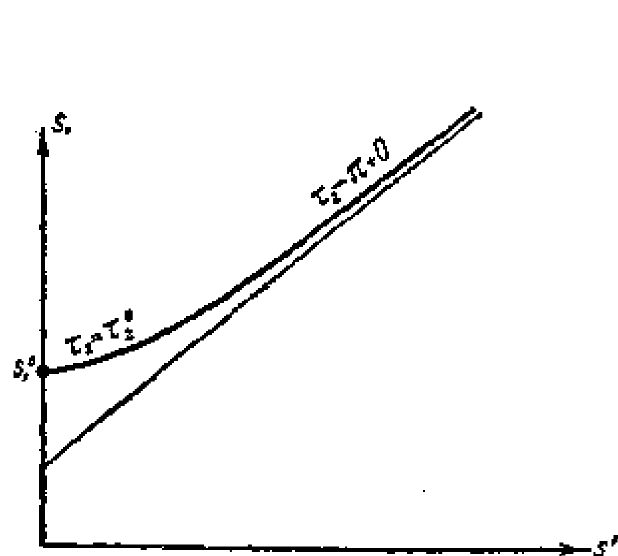


图 354

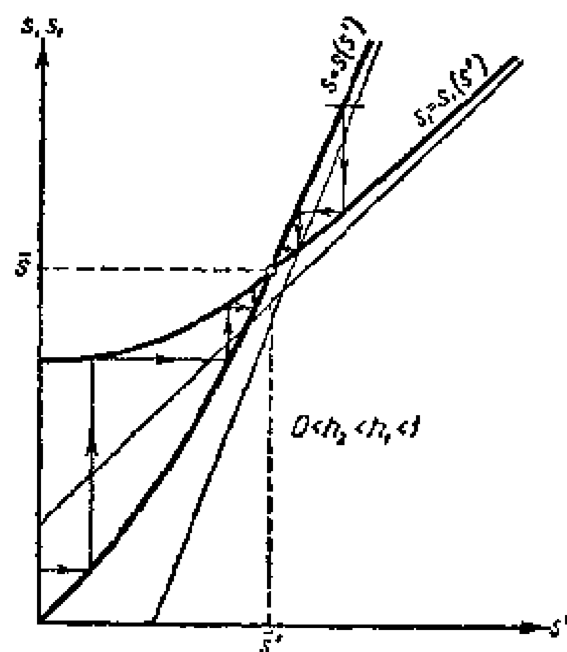


图 355

3. 不动点及其稳定性. 为了找出半直线 S 对其自身的变换

---

* 原书为(8.15)——译者注.

Π的不动点，我们在一个图中(拉梅尔图)画出变换 Π_1 及 Π_2 的对应函数的图象——曲线 (8.8) 及 (8.13) (图355, 356, 357). 当 $0 < h_2 < h_1 < 1$ 时(图 355)曲线 $s = s(s')$ 及 $s_1 = s_1(s')$ 具有奇数个交点,因为这些曲线都是连续的,并且 $s' = 0$ 时, $s_1 > s$, 但 $s' \to +\infty$ 时, $s_1 < s$ [由于 $\gamma_2 < \gamma_1$,故而(8.14)之渐近线较(8.11)之渐近线平一些]. 不难指出,在所研究的此情况中,曲线 $s=s(s')$ 与 $s_1 = s_1(s')$ 的交点只有一个,因此,变换 Π 的不动点以及相平面上的**极限环也只有一个**.

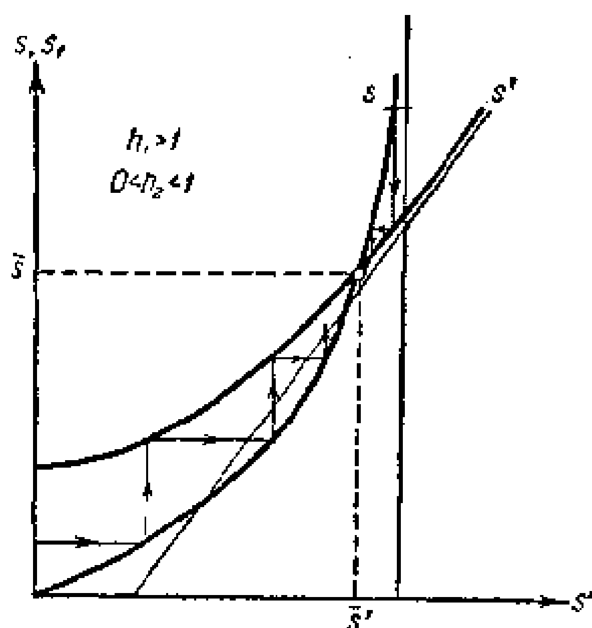


图 356

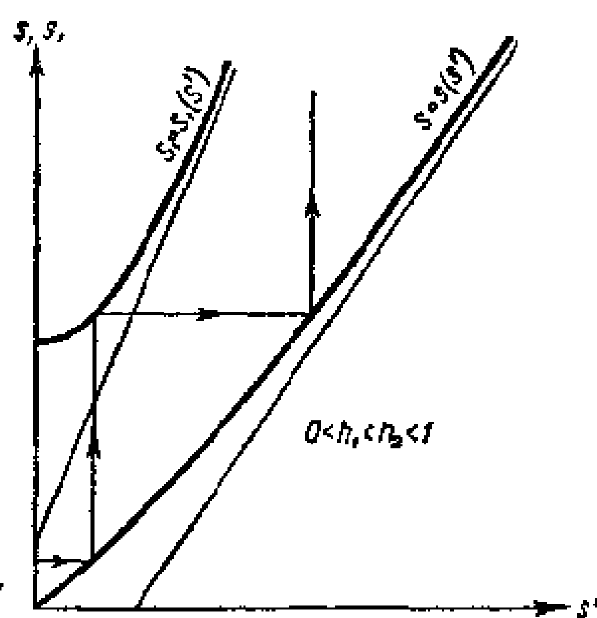


图 357

确实如此. 根据(8.8a)及(8.13a), 对于变换 Π 的不动点(与它有关的各个量我们将在其上方加上横线来表示)我们有:

$$\left.\begin{aligned}\frac{e^{\gamma_1\bar{\tau}_1}}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\sin\bar{\tau}_1}\varphi(\bar{\tau}_1, -\gamma_1) &= -\frac{e^{-\gamma_2\bar{\tau}_2}}{\sqrt{1+\gamma_2^2}\sin\bar{\tau}_2}\varphi(\bar{\tau}_2, -\gamma_2),\\ \frac{e^{-\gamma_1\bar{\tau}_1}}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\sin\bar{\tau}_1}\varphi(\bar{\tau}_1, \gamma_1) &= -\frac{e^{\gamma_2\bar{\tau}_2}}{\sqrt{1+\gamma_2^2}\cdot\sin\bar{\tau}_2}\varphi(\bar{\tau}_2, \gamma_2)\end{aligned}\right\}\quad(8.15)$$

以及

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right) = \left(\frac{ds_1}{ds'}\right) \div \left(\frac{ds}{ds'}\right) = \frac{\varphi(\bar{\tau}_2, \gamma_2)\varphi(\bar{\tau}_1, -\gamma_1)}{\varphi(\bar{\tau}_2, -\gamma_2)\varphi(\bar{\tau}_1, \gamma_1)},$$

或根据(8.15)

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)=e^{2(\gamma_2\bar{\tau}_2-\gamma_1\bar{\tau}_1)}>0. \tag{8.16}$$

假定曲线 $s=s(s')$ 及 $s_1=s_1(s')$ 有若干个交点. 则对于第一个交点($\bar{s}'$ 最小), 由于 s' 取小值时有 $s_1>s$, 必然有如下不等式,即:

$$\left(\frac{ds_1}{ds'}\right)_1<\left(\frac{ds}{ds'}\right)_1 \text{或} \left(\frac{ds_1}{ds}\right)_1<1,$$

对于第二个交点必有:

$$\left(\frac{ds_1}{ds'}\right)_2>\left(\frac{ds}{ds'}\right)_2 \text{或} \left(\frac{ds_1}{ds}\right)_2>1.$$

后者是不可能的, 因为 s' 越大, 与其相对应的 $\bar{\tau}_1$ 必越大, $\bar{\tau}_2$ 必越小, 因此如果第二个交点存在, 则根据(8.16)就必然满足不等式 $\left(\frac{ds_1}{ds}\right)_2<\left(\frac{ds_1}{ds}\right)_1<1$. 这就说明, 曲线 $s=s(s')$ 及 $s_1=s_1(s')$ 只有一个交点——点变换只有一个不动点. 而且,对于此交点有:

$$0<\left(\frac{ds_1}{ds}\right)<1.$$

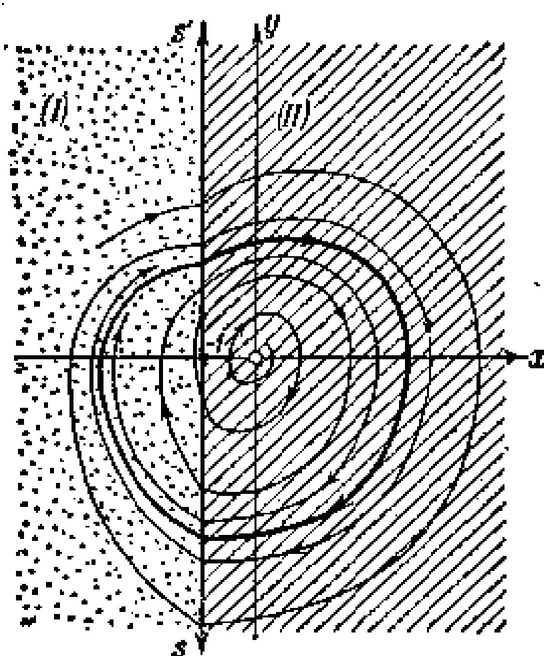


图 358

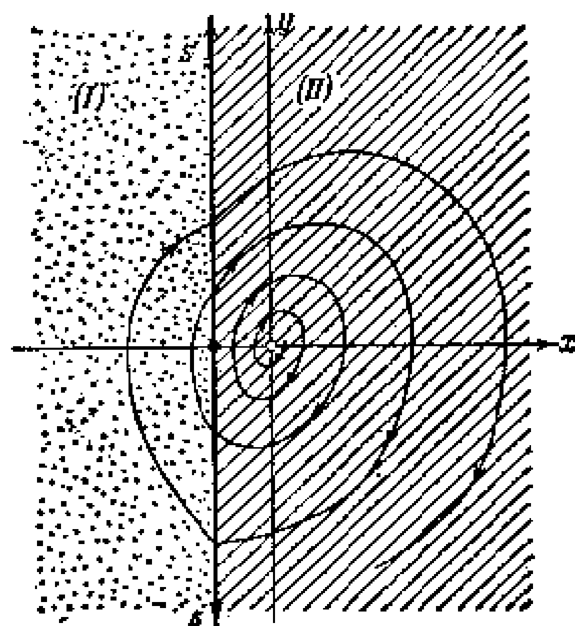


图 359

因此，当 $0 < h_2 < h_1 < 1$ 时，相平面上有唯一的极限环，而且是稳定的. 所有相轨线当 $t \to \infty$ 时渐近地向这一极限环趋近（图 358）.

对于 $0 < h_2 < 1$，$h_1 > 1$ 的情况，也不难导出同样的结果（图 356）：在这种情况下，也存在唯一的稳定极限环，所有相轨线（当 $t \to +\infty$ 时）都向它趋近.

如果 $0 < h_1 < h_2 < 1$，则曲线 $s = s(s')$ 及 $s_1 = s_1(s')$ 不相交（图 357）. 的确，若假定在这种情况下有交点存在（必然会是偶数个），则对于第一个交点（s' 最小）必须有下不等式成立：

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)_1 = \left(\frac{ds_1}{ds'}\right)_1 \div \left(\frac{ds}{ds'}\right)_1 < 1,$$

而根据(8.16)这是不可能的，因为这里有 $\bar{\tau}_2 > \pi > \bar{\tau}_1$ 以及在 $h_2 > h_1$ 时有 $\gamma_2 > \gamma_1$. 由此得出结论：当 $0 < h_1 < h_2 < 1$时，半直线 S 对自身的点变换 Π 没有不动点，因此在相平面上不存在任何极限环，而且不难看出：所有相轨线都走向相平面的无限远区域（图 359）.

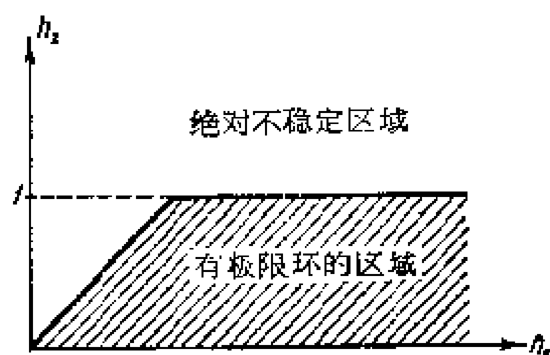


图 360

根据所采用的假定，电子管振荡器具有两个主要参数 h_1 及 h_2，从而我们可以研究将这两个参数的平面划分成反映所研究系统之不同定性性质的区域的问题. 图 360 给出了将参数 h_1 及 h_2 平面的第一象限划分成有极限环（唯一而且是稳定的）区域和"绝对不稳定"*区域的结果. 与后一区域中各点相对应的参数值使所有相轨线都走向无限远. 很明显，在这种情况下（$0 < h_1 < h_2 < 1$ 或 $h_2 > 1$），这里所发展的理论不能正确地反映电子管振荡器的性能，因为这一理论是在忽略屏极反应及栅流的条件下建立起来的，而这些量在振幅很大时，却

* "绝对不稳定"即按李亚普诺夫全局不稳定——译者注.

有着很大的作用.

4. 极限环. 我们讲过：当满足条件

$$0 < h_2 < h_1 \text{ 及 } h_2 < 1$$

时，相平面上存在唯一的极限环，所有其他相轨线当 $t \to +\infty$ 时，渐近地向它趋近，这相当于在任意初始条件下自振状态的建立过程[1]. 当 $0 < h_2 < h_1 < 1$ 时，点变换 Π 的不动点，因而也就是极限环，单值地(唯一地)决定于方程组(8.15)：

$$\left.\begin{aligned} \frac{e^{\gamma_1\bar{\tau}_1} - \cos\bar{\tau}_1 - \gamma_1\sin\bar{\tau}_1}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\cdot\sin\bar{\tau}_1} &= -\frac{e^{\gamma_2\bar{\tau}_2} - \cos\bar{\tau}_2 - \gamma_2\sin\bar{\tau}_2}{\sqrt{1+\gamma_2^2}\cdot\sin\bar{\tau}_2}, \\ \frac{e^{-\gamma_1\bar{\tau}_1} - \cos\bar{\tau}_1 + \gamma_1\sin\bar{\tau}_1}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\cdot\sin\bar{\tau}_1} &= -\frac{e^{-\gamma_2\bar{\tau}_2} - \cos\bar{\tau}_2 + \gamma_2\sin\bar{\tau}_2}{\sqrt{1+\gamma_2^2}\cdot\sin\bar{\tau}_2}, \end{aligned}\right\} \qquad (8.15\text{a})$$

而且

$$0 < \bar{\tau}_1 < \pi < \bar{\tau}_2 < \tau_2^0 < 2\pi.$$

如果这两个超越方程组成的方程组已经解出（这恰好是所研究问题中最主要的计算困难所在），那么计算自振状态的各要素就无特别的困难了. 例如，自振的周期将等于(采用无量纲时间单位)：

$$\tau = \frac{\bar{\tau}_1}{\omega_1} + \frac{\bar{\tau}_2}{\omega_2}, \qquad (8.17)$$

以及(采用普通时间单位)，

$$T = \sqrt{LC}\left(\frac{\bar{\tau}_1}{\omega_1} + \frac{\bar{\tau}_2}{\omega_2}\right). \qquad (8.17\text{a})$$

求解方程组(8.15a)可采用数值计算方法，关于它的阐述已超出本书的范围. 因此我们只限于研究自振周期和振幅的近似解法，而且由实际应用的观点出发，只考虑参数 h_1 及 h_2 充分小(即振荡器振荡回路品质高，反馈弱)这种最有意义的情况.

将 $\bar{\tau}_1$ 及 $\bar{\tau}_2$ 在 $h_1, h_2 \to 0$ 时的极限值以 a 及 b 表示. 为了寻求这些极限值，将方程(8.15a)改变成如下形式[2]：

---

1) 因此所研究的振荡器，在所取的假定的基础上，处于所谓的"软自激状态".

2) 将(8.15a)的二式相加及相减，便得到方程(8.15b).

$$\left.\begin{aligned} \frac{\operatorname{ch}\gamma_1\bar{\tau}_1 - \cos\bar{\tau}_1}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\sin\bar{\tau}_1} &= -\frac{\operatorname{ch}\gamma_2\bar{\tau}_2 - \cos\bar{\tau}_2}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\sin\bar{\tau}_2}, \\ \frac{\operatorname{sh}\gamma_1\bar{\tau}_1 - \gamma_1\sin\bar{\tau}_1}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\sin\bar{\tau}_1} &= -\frac{\operatorname{sh}\gamma_2\bar{\tau}_2 - \gamma_2\sin\bar{\tau}_2}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\sin\bar{\tau}_2}, \end{aligned}\right\} \tag{8.15b}$$

并代入当 $h_1, h_2 \ll 1$ 时才成立的近似关系式:

$$\gamma_1 = h_1, \quad \gamma_2 = h_2,$$
$$\operatorname{ch}\gamma_1\bar{\tau}_1 = 1, \quad \operatorname{ch}\gamma_2\bar{\tau}_2 = 1,$$
$$\operatorname{sh}\gamma_1\bar{\tau}_1 = h_1 a, \quad \operatorname{sh}\gamma_2\bar{\tau}_2 = h_2 b^{1)}.$$

此时方程(8.15b)将给出:

$$\frac{1-\cos a}{\sin a} = -\frac{1-\cos b}{\sin b},$$
$$h_1\frac{a-\sin a}{\sin a} = -h_2\frac{b-\sin b}{\sin b},$$

由此可得: $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = -\operatorname{tg}\frac{b}{2}$,即 $a+b=2\pi$, 以及

$$a - \sin a = 2\pi\frac{h_2}{h_1+h_2} = 2\pi\frac{MS-RC}{MS}. \tag{8.18}$$

不难证实, 当 $h_2 < h_1$ 时 (即$\frac{h_2}{h_1+h_2} < \frac{1}{2}$ 时)方程(8.18)具有唯

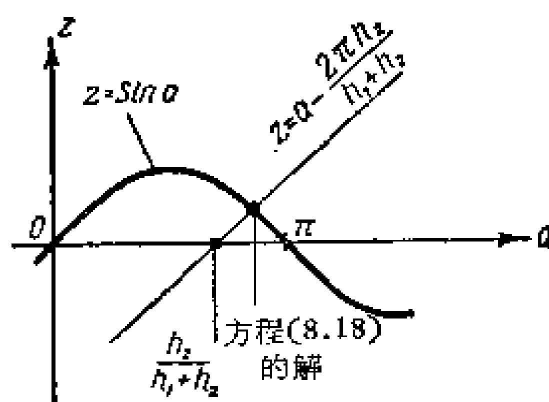


图 361

1) 不难验证, $\omega_1 = 1 + O(\gamma_1^2)$, $\omega_2 = 1 + O(\gamma_2^2)$, $h_1 = \gamma_1 + O(\gamma_1^3)$, $h_2 = \gamma_2 + O(\gamma_1^2)$, $\operatorname{ch}\gamma_1\bar{\tau}_1 = 1 + O(\gamma_1^2)$, $\operatorname{ch}\gamma_2\bar{\tau}_2 = 1 + O(\gamma_2^2)$, $\operatorname{sh}\gamma_1\bar{\tau}_1 = \gamma_1 a + O(\gamma_1^2)$, $\operatorname{sh}\gamma_2\bar{\tau}_2 = \gamma_2 b + O(\gamma_2^2)$.

一解 $0<a<\pi$（这一方程的图解表示在图 361 上）. 由于 $h_1, h_2 \ll 1$ 时有 $\omega_1 = 1, \omega_2 \approx 1$, 自振周期显然等于 $\tau = a + b = 2\pi$, 也就是与振荡器振荡回路的固有振动周期相等[1]. 由于 h_1 及 h_2 取小值时，极限环接近圆，故而对于自振振幅将有（图 362）:

$$A = \frac{1}{\cos\frac{a}{2}}. \tag{8.19}$$

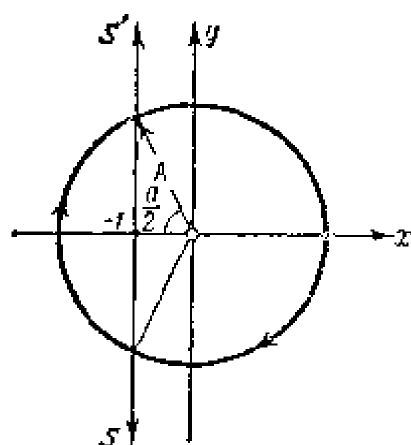


图 362

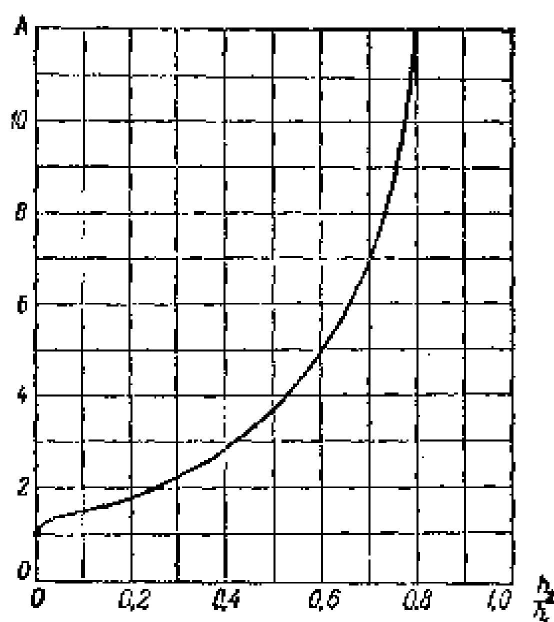


图 363

自振振幅 A 与振荡器参数的关系，显然是由关系式(8.18)和(8.19)以参数形式表示出的. 在图 363 上我们给出了振幅 A 与 $\frac{h_2}{h_1}$ 的关系曲线. 当 $\frac{h_2}{h_1} \to 1$ 时，$a \to 0$，因而 $A \to \infty$.

---

1) 设 $r_2 = \beta r_1$, 其中 $\beta = \frac{r_2}{r_1} < 1$, 然后，就可以用 r_1 的幂级数形式寻求(8.15b)的解，如:

$$\tau_1 = a + a_1 r_1 + a_2 r_1^2 + \cdots, \quad \tau_2 = b + b_1 r_1 + b_2 r_1^2 + \cdots.$$

将所有与 r_1 有关的各量分解成 r_1 的幂级数，并代入方程(8.15b)，我们将得到一系列确定系数 $a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots$ 的方程. 不难看出，系数 a 和 b 可由上面列出的方程中求得，且 $a_1 = 0$, $b_1 = 0$. 于是，自振周期就等于:

$$\tau = 2\pi + O(r_1^2),$$

即与 2π（振荡器振荡回路的固有振动周期）相差为 r_1^2（或 h_1^2）阶的小量.

§3. 电子管振荡器(对称情况)

1. 振动方程及相平面. 现在我们来研究电子管振荡器（图348)，设电子管的特性曲线有饱和，并且是对称的(对应于平衡状态的电子管之工作点，位于特性曲线上升段的中点). 这就是说，我们将电子管的特性曲线用如下分段线性函数来逼近，即：

$$i_a = \begin{cases} 0 & \text{当} \quad u < -u_0 \text{ 时}, \\ S(u + u_0) & \text{当} \quad |u| < u_0 \text{ 时}, \\ 2Su_0 & \text{当} \quad u > u_0 \text{ 时}, \end{cases} \tag{8.20}$$

此函数的图象表示在图 364 上.

同前一节一样，我们将忽略电子管的屏极反应、栅流和寄生电容(包括管内电容在内). 利用函数变换

$$x = \frac{u}{u_0}$$

和

$$t = \omega_0 t' \left(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right),$$

并考虑此时有：

$$S(u) = \begin{cases} S & \text{当} \quad |x| < 1 \text{ 时}, \\ 0 & \text{当} \quad |x| > 1 \text{ 时}, \end{cases}$$

将电子管振荡器方程(方程(8.3))简化成如下形式：

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + 2h_1\dot{x} + x = 0 \quad \text{当} \quad |x| < 1 \text{ 时}, \\ \ddot{x} - 2h_2\dot{x} + x = 0 \quad \text{当} \quad |x| > 1 \text{ 时}, \end{aligned}\right\} \tag{8.21}$$

其中，和前面一样，

$$h_1 = \frac{\omega_0}{2} RC, \quad h_2 = \frac{\omega_0}{2} [MS - RC].$$

这样一来，采用电子管的分段线性特性曲线(8.20)以后，电子管振荡器的相平面 x, y (其中 $y = \dot{x}$) 就被直线 $x = -1$ 和 $x = +1$ 划分成三个“线性区域”：(I) $x < -1$, (II) $|x| < 1$ 和 (III) $x > +1$. 每个区域上各自的线性方程(8.21)成立（图 365). 在这里，

从明显的物理前提出发(前面曾不止一次引用过)，我们将要求相平面上相轨线到处都是连续的，包括“线性区域”的边界(即直线 $x=-1$ 和 $x=+1$)[1] 在内．同时还应指出：方程 (8.21) 对于 x, y 以 $-x, -y$ 的代换来说是不变的，因此区域(I)和(III)内的相轨线彼此相对原点对称．区域(II)内上半部和下半部的相轨线也具有同样的对称性．

动力学系统 (8.21) 具有唯一的平衡状态——原点 (0, 0)，或为结点，或为焦点；$h_2 < 0$ (即 $MS < RC$)时稳定，$h_1 > 0$ (即 $MS < RC$)时不稳定．下面我们主要研究后一种情况——自激振荡器情况，即假定 $h_1 > 0$ 和 $h_2 > 0$[2]．

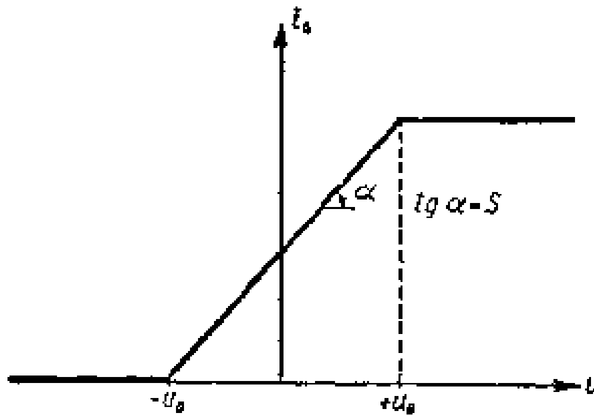


图 364

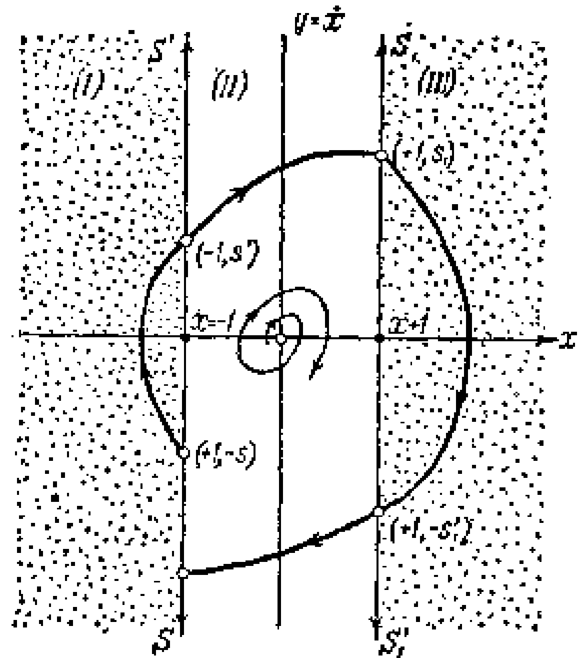


图 365

2. 点变换． 在所研究之系统的相平面上，布满着线性方程(8.21)所决定之相轨线的线段；这些轨线的线段的端点在直线 $x=-1$ 和 $x=+1$ 上彼此“缝接”，构成整相轨线．研究此种“缝接”相平面的轨线划分的结构，可以归结为研究半直线 $x=-1$,

---

1) 在图 365 上所示的相轨线均由螺线组成，当然这只有在 $|h_1|<1$，$|h_2|<1$ 时才成立．

2) 如果 $h_1>0$ 而 $h_2<0$，即 $MS<RC>0$，则可以证明，所有相轨线都渐近地 $(t\to+\infty)$ 趋向稳定平衡状态(0, 0)；因此电子管振荡器中将不发生振动(对于任何初始条件都是如此)．

$y < 0$（半直线 S）对它自身的点变换，这一变换是借助于相点沿相应的相轨线线段的运动实现的.

确实如此，在我们所研究的 $h_1 > 0$，$h_2 > 0$ 的情况内，不难看出，无限远区域是不稳定的. 而且唯一的平衡状态(0,0)也不稳定（$0 < h_2 < 1$ 时为不稳定焦点，$h_2 > 1$ 时为不稳定结点）. 因此，在相平面上最低限度会有一个稳定极限环（参看第六章 § 2 第 4 小节的定理 V 和下注）. 很明显，极限环必然包围原点——唯一的平衡状态（参看第五章 § 8），而另一方面又不可能全部位于区域(II)内（即 $|x| < 1$），因为在这一区域内方程是线性的. 此外，由于所研究之系统不可能有非对称的极限环[1]，极限环必然是对称的（关于原点）. 因此，必然它通过所有三个区域，并与我们所选的"无切"半直线——半直线 S 相交. 这样一来，如果建立起半直线 S 对它自身的点变换（这一变换是借助于相点在穿过所有三个"线性区域"的相轨线上的运动所实现的），就能够求出所有的极限环（从而就可以知道相平面 x, y 的相轨线划分的结构[2]），并找出它的不动点.

此点变换（以 Π 表示之）显然可以看成是四个变换 Π_1，Π_2，Π_3，Π_4——半直线 S 向 S'，S' 向 S_1，S_1 向 S_1' 以及 S_1' 向 S 的点变换——的乘积. 这些变换是分别由区域(I)，(II)，(III)及(II)内的相轨线所实现的（参看图 365）. 但由于相轨线彼此关于原点的对称性，必有：

$$\Pi_3 \equiv \Pi_1 \text{ 和 } \Pi_4 \equiv \Pi_2,$$

因此，如果引入半直线 S 向半直线 S_1 的变换

$$\Pi' = \Pi_1 \cdot \Pi_2, \text{ 则 } \Pi = (\Pi')^2,$$

（换句话说，"全"变换可通过连续两次应用变换 Π' 获得，因为由区

---

1) 假定系统(8.21)，具有非对称极限环 Γ_1（它必定包围平衡状态）. 此时，由于相轨线彼此对称（关于原点），系统(8.21)就必然另有一个与 Γ_1 相对称，因此也就必然和它相交的极限环 Γ_2. 这是不可能的. 因此，所研究之系统只能有对称极限环.

2) 在所研究的问题中，能够确定相平面之相轨线划分的定性结构的奇轨线，只有平衡状态（结点或焦点）及极限环.

域(III)和(II)的相轨线所实现的那个 S_1 向 S 的变换 $\Pi_3\cdot\Pi_4$ 与 Π' 恒等)。

因此，为了达到研究相平面上相轨线划分这一目的，我们可以只限于研究比较简单的变换 Π'. 这一变换的不动点显然就是对称极限环（系统不具有别的不对称极限环）与半直线 S 和 S' 的交点。

下面我们着手计算变换 Π' 的对应函数. 变换 Π_1 显然与前一节中的变换 Π_1 恒等[参看(8.8)和(8.12)]. 这样一来，当 $0<h_1<1$ 时，变换 Π_1 的对应函数将有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{e^{\gamma_1\tau_1}-\cos\tau_1-\gamma_1\sin\tau_1}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\sin\tau_1}, \\ s' &= \frac{e^{-\gamma_1\tau_1}-\cos\tau_1+\gamma_1\sin\tau_1}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\sin\tau_1}, \end{aligned}\right\} \qquad (8.22)$$

其中，和以前一样，τ_1 为变换参数[相点在区域(I)中的折算穿越时间，且 $0<\tau_1<\pi$]而

$$\gamma_1=\frac{h_1}{\omega_1}=\frac{h_1}{\sqrt{1-h_1^2}}.$$

对应函数(8.22)的图象曾表示在图 353 上[1)].

对于在 $t=0$ 瞬时由半直线 (S') 上的 s' 点出发 ($x=-1$, $y=s'>0$)并通过区域(II)的相轨线，在 $0<h_2<1$ 的情况下，根据(8.21)(参看上册第一章 § 4). 我们有：

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{h_2t}\left[-\cos\omega_2t+\frac{s'+h_2}{\omega_2}\sin\omega_2t\right], \\ \dot{x}=y &= e^{h_2t}\left[s'\cos\omega_2t+\frac{1+s'h_2}{\omega_2}\sin\omega_2t\right], \end{aligned}\right\} \qquad (8.23)$$

其中

$$\omega_2=\sqrt{1-h_2^2}.$$

在初始瞬时位于半直线 S' 上的相点，经过时间 t_2 到达半直线 S_1 上

1) 若 $h_1>1$，则对应函数可在 (8.22) 中将三角函数代之以相应的双曲函数求得. 这一情况中的对应函数的图象，以虚线表示在图 353 上。

——正是这一转移称为变换 Π_2. 在方程(8.23)中，当 $t_2 = \frac{\tau_2}{\omega_2} > 0$ 时，$x = +1$，$y = s_1 > 0$，并由得到的表示式中解出 s' 和 s_1，就可得出这一变换的参数表达式：

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \frac{e^{\gamma_2\tau_2} + \cos\tau_2 + \gamma_2 \sin\tau_2}{\sqrt{1+\gamma_2^2}\sin\tau_2}, \\ s' &= \frac{e^{-\gamma_2\tau_2} + \cos\tau_2 - \gamma_2 \sin\tau_2}{\sqrt{1+\gamma_2^2}\sin\tau_2}, \end{aligned}\right\} \tag{8.24}$$

其中

$$\gamma_2 = \frac{h_2}{\omega_2} = \frac{h_2}{\sqrt{1-h_2^2}}{}^{1)}.$$

为了研究曲线(8.24)，只需指出如下几点：

1）$\tau_2 \to +0$ 时，s' 和 $s_1 \to +\infty$.

2）在某一 $\tau_2 = \tau_2'(0 < \tau_2' < \pi)$ 时，$s' = 0$，这一数值由方程 $s'(\tau_2') = 0$ 或 $1 + e^{\gamma_2\tau_2}(\cos\tau_2 - \sin\tau_2) = 0$ 确定. 而且不难看出，$s_1(\tau_2') > 0$.

3）将(8.24)微分之，有：

$$\frac{ds_1}{d\tau_1} = -\frac{1 + e^{\gamma_2\tau_2}(\cos\tau_2 - \gamma_2\sin\tau_2)}{\sqrt{1+\gamma_2^2}\sin^2\tau_2},$$

$$\frac{ds'}{d\tau_1} = -\frac{1 + e^{-\gamma_2\tau_2}(\cos\tau_2 + \gamma_2\sin\tau_2)}{\sqrt{1+\gamma_2^2}\sin^2\tau_2}$$

及

$$\frac{ds_1}{ds'} = \frac{1 + e^{\gamma_2\tau_2}(\cos\tau_2 - \gamma_2\sin\tau_2)}{1 + e^{-\gamma_2\tau_2}(\cos\tau_2 + \gamma_2\sin\tau_2)}.$$

由于 $0 < \tau_2 < \tau_2'$ 时，$1 + e^{\gamma_2\tau_2}(\cos\tau_2 - \gamma_2\sin\tau_2) > 0$ 和 $1 + e^{-\gamma_2\tau_2}(\cos\tau_2 + \gamma_2\sin\tau_2) > 0$，因此在此 τ_2 的变化时间间隔内，$\frac{ds'}{d\tau_2}$ 及 $\frac{ds_1}{d\tau_2} < 0$*，而 $\frac{ds_1}{ds} > 0$，这就是说，当 τ_2 由 0 增至 τ_2' 时，s' 由 $+\infty$

1）若 $h_2 > 1$，则 Π_2 的对应函数可从在方程(8.24)中将三角函数以相应的双曲函数，γ_2 以 $\bar{\gamma}_2 = \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2-1}}$，$\sqrt{1+\gamma_2^2}$ 以 $\sqrt{\bar{\gamma}_2^2-1}$ 代换后求得.

* 原书为">0"——译者注.

单调地下降到 0，而 s_1 则由 $+\infty$ 降到 $s_1(\tau_2')>0$. 因此，τ_2 之最小正值的区间（经过这一区间，我们可以使半直线 S' 的所有点都过渡到半直线 S_1 上），将是 $0<\tau_2<\tau_2'$.

4）由于对于任意 $0<\tau_2<\tau_2'$，均有

$$\frac{d^2s_1}{ds'^2}=\frac{2(1+\gamma_2^2)^{3/2}\sin^3\tau_2(\operatorname{sh}\gamma_2\tau_2-\gamma_2\sin\tau_2)}{[1+e^{-\gamma_2\tau_2}(\cos\tau_2+\gamma_2\sin\tau_2)]^3}>0,$$

故而当 s' 由 0 增到 $+\infty$ 时（当 τ_2 由 τ_2' 降到 0 时），$\frac{ds_1}{ds}$ 由 0（当 $s'=0$）单调地增加到 $+1$（当 $s'\to+\infty$）. 曲线(8.24)有一渐近线 $s_1=s'+\frac{4\gamma_2}{\sqrt{1+\gamma_2^2}}$，而且由于 $\frac{d^2s_1}{ds'^2}>0$ 此曲线必位于渐近线之上方. 利用上面指出的这些性质，就足以画出对应函数(8.24)的图象来. 后者表示在图 366 上[1].

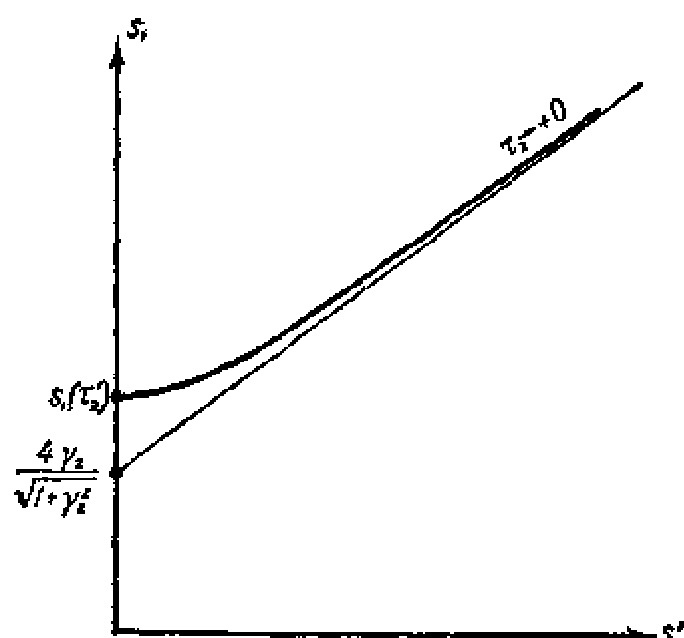


图 366

3. 不动点和极限环. 将曲线(8.22)和(8.24)画在一个平面上，即拉梅尔图上（图 367）. 其交点显然就是变换 $\Pi'=\Pi_1\cdot\Pi_2$,

1）当 $h_2>1$ 时，变换 Π_2 的对应函数的图象，定性地来说具有同样的形状，即：s' 由 0 增到 $+\infty$ 时，s_1 从某一正值单调地增至 $+\infty$，而导数 $\frac{ds_1}{ds}$ 则由 0 增至 $+1$.

即半直线 S 对半直线 S_1 的变换（在 $0 < h_1 < 1$ 和 $0 < h_2 < 1$ 时）的不动点. 这些不动点以解析的形式可由下列方程组确定.

$$\left.\begin{aligned}\frac{e^{\gamma_1\tau_1} - \cos\tau_1 - \gamma_1\sin\tau_1}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\sin\tau_1} &= \frac{e^{\gamma_2\tau_2} + \cos\tau_2 + \gamma_2\sin\tau_2}{\sqrt{1+\gamma_2^2}\sin\tau_2},\\ \frac{e^{-\gamma_1\tau_1} - \cos\tau_1 + \gamma_1\sin\tau_1}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\sin\tau_1} &= \frac{e^{-\gamma_2\tau_2} + \cos\tau_2 - \gamma_2\sin\tau_2}{\sqrt{1+\gamma_2^2}\sin\tau_2},\end{aligned}\right\} \quad (8.25)$$

这一关系式可由(8.22)和(8.24)求得，方法是在其中代入 s'，并令 $s_1 = s$.

现在我们证明，曲线(8.22)和(8.24)只能有唯一的交点. 事实上：最少能有一个交点这一论断可由曲线的连续性以及下列不等式：

$s' = 0$ 时 $s_1 - s > 0$

s' 足够大时[1] $s_1 - s < 0$

中导出. 其次，如果我们假定有若干交点存在，那么对于第一个交点（s' 最小）来说必有：$\frac{ds_1}{ds'} < \frac{ds}{ds'}$，对于其次一个交点必有 $\frac{ds_1}{ds'} > \frac{ds}{ds'}$. 后者是不可能的，因为我们有：$0 < \frac{ds_1}{ds'} < 1$ 和 $\frac{ds}{ds'} > 1$（s' 取任何值都是如此）. 因此，曲线(8.22)和(8.24)只能有一个交点——即当 $0 < h_1 < 1$ 和 $0 < h_2 < 1$ 时，变换 Π 只能有一个不动点，同时它还是稳定的，因为在这一点上，$0 < \frac{ds_1}{ds} < 1$.

当 $0 < h_1 < 1$，但 $h_2 > 1$ 时，也是如此，因为 $h_2 > 1$ 时曲线 $s_1 = s_1(s')$ 的形状与 $0 < h_2 < 1$ 时相同.

当 $h_1 > 1$，h_2 取任何大于零的值时，拉梅尔图表示在图 368 上. 从图中可以看出，当 h_1 和 h_2 取这种数值时，变换 Π' 也只有一个唯一的稳定不动点.

因此，系统参数 $h_1 > 0$ 和 $h_2 > 0$ 取任何数值时，相平面上

---

1) 后一不等式之所以成立，是由于曲线 (8.22) 和 (8.24) 的渐近线的斜率分别为 $e^{\gamma_1\pi}$ 和 1，这就是说，曲线(8.22)的渐近线比(8.24)的渐近线陡一些（有关变换 Π_1 的对应函数的性质参看前一节）.

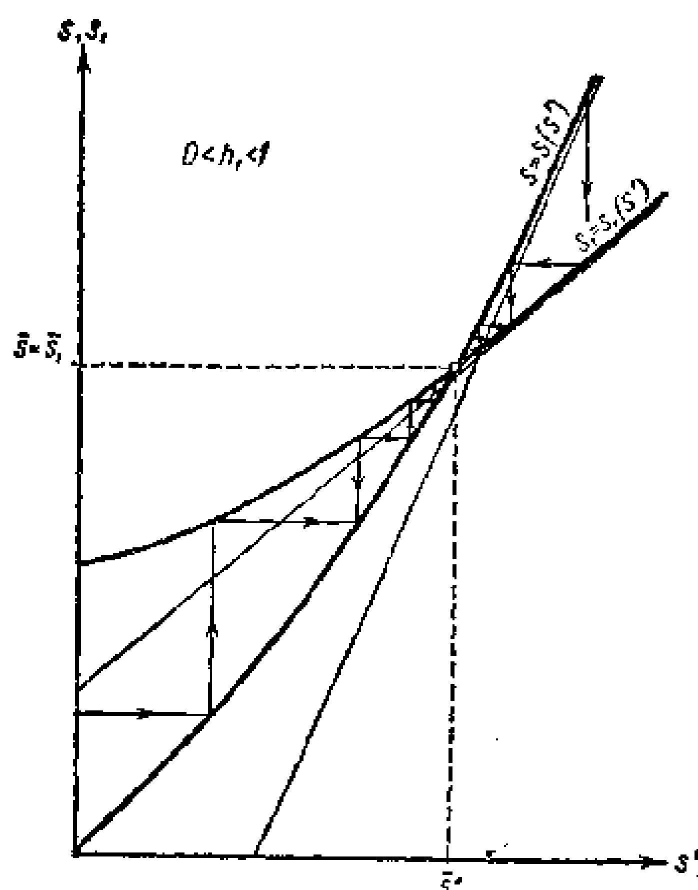


图 367

都只存在一个稳定极限环，所有相轨线都向它趋近（$t\to+\infty$ 时）．换句话说，采用本节关于电子管特性曲线以及工作点的选择所作的假设以后，振荡器具有软激状态：对于任意初始条件都必然建立起唯一的自振状态．

自振周期显然等于：

$$\tau = 2\left[\frac{\bar{\tau}_1}{\omega_1}+\frac{\bar{\tau}_2}{\omega_2}\right]$$

（采用无量纲单位），其中 $\bar{\tau}_1$ 和 $\bar{\tau}_2$ 为对应于点变换 Π_1 和 Π_2 之不动点的参数值[1]．

我们不准备对确定不动点的超越方程组（$0<h_1<1$ 和 $0<h_2<1$ 时为方程组(8.25)）进行数值计算，因为这超出了本书的范

1）当 $0<h_1<1$，$0<h_2<1$ 时，$\bar{\tau}_1$ 和 $\bar{\tau}_2$ 由方程组（8.25）单值地确定．在其他情况下，应将(8.25)中的三角函数代之以相应的双曲函数，然后用得出之方程组确定．

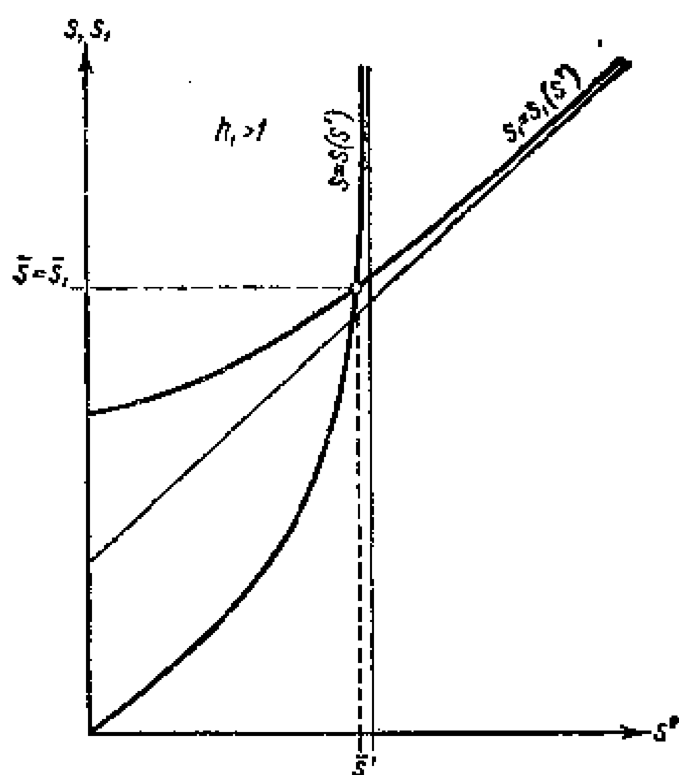


图 368

围．在这里只讨论以下三种情况：

1）$h_1 \to 0$：此时 $\bar{\tau}_1 \to \pi$, $\bar{\tau}_2 \to 0$，与此同时，不动点，因此也就是极限环，必走向无限远．

2）$h_2 \to 0$：此时 $\bar{\tau}_1 \to 0$, $\bar{\tau}_2 \to \pi$；不动点的纵坐标 $\bar{s} \to 0$，极限环变成圆 $x^2 + y^2 = 1$．

3）$h_1, h_2 \ll 1(h_1, h_2 \to 0)$：在这种情况下（计算从略，因为和上节完全相同）$\bar{\tau}_1$ 将由下列方程确定：

$$\bar{\tau}_1 - \sin\bar{\tau}_1 = \frac{\pi h_2}{h_1 + h_2} = \pi\frac{MS - RC}{MS},$$

$\bar{\tau}_2 = \pi - \bar{\tau}_1$，极限环接近圆，其半径为：

$$A = \frac{1}{\cos\frac{\bar{\tau}_1}{2}},$$

而自振则接近于周期为 2π（采用无量纲单位）的谐振动．

§4. 具有偏移⌋特性的电子管振荡器

前两节我们研究了软激电子管振荡器的例子．现在我们用下面这种电子管振荡器作为例子，来研究自振的硬激状态．在这种振荡器中，屏极电路中含有振荡回路，而且电子管具有偏移⌋型特性．这就是说，我们用⌋特性来逼近电子管的特性(与上册第三章§4相同)，即令：

$$i_a = \begin{cases} I_s & \text{当 } u_g > 0 \text{ 时}, \\ 0 & \text{当 } u_g < 0 \text{ 时}, \end{cases}$$

但在这里我们将假定，电路处于平衡状态时，电子管用一定的负偏压 E_g 闭塞(图 369)．

图 369

1. 振动方程．相平面． 对这里所研究的振荡器，其电路的振动方程，我们知道[参看(3.15)]，可写成如下形式(采用通常的简化假设，参看上册第三章§4)：

$$LC\frac{d^2i}{dt^2} + RC\frac{di}{dt} + i = \begin{cases} I_s & u_g > 0 \text{ 时}, \\ 0 & u_g < 0 \text{ 时}, \end{cases}$$

其中

$$u_g = -E_g - M\frac{di}{dt}.$$

下面我们将假设 $M < 0$，因为可以证明，只有在这种情况下振荡器中才能发生自振．

作变量变换：

$$x = \frac{i}{I_s},\quad t_{新} = \omega_0 t^{1)}.$$

---

1) 以后我们将用上方加点来表示对无量纲时间的导数，而无量纲时间本身则用 t 表示．

其中 $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$，将振荡器的振动方程变成如下形式：

$$\ddot{x}+2h\dot{x}+x=\begin{cases}1 & \dot{x}>b \text{ 时},\\ 0 & \dot{x}<b \text{ 时},\end{cases} \tag{8.26}$$

其中 $2h=\omega_0RC$——振荡回路的衰减系数，而

$$b=\frac{E_g}{\omega_0 M|I_s|}. \tag{8.26a}$$

相平面 $x, y(y=\dot{x})$ 被水平直线 $y=b$ 分成两个线性区域：(I)，其中 $y>b$，以及(II)，其中 $y<b$（图 370）. 每个区域内适

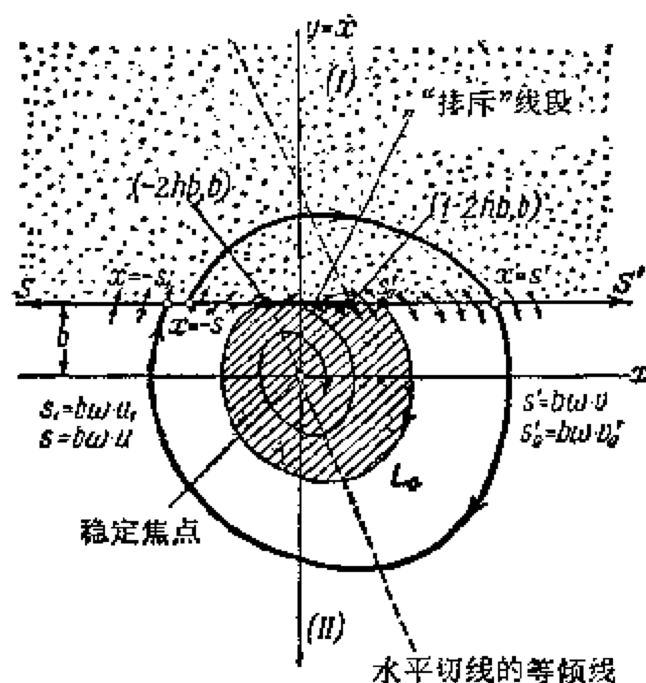


图 370

用各自的线性方程. 在直线 $y=b$ 上，区域(I)和(II)的相轨线彼此衔接（按连续性定律）[1]. 在此直线上分出半直线 $S: y=b, x=-s$，其中 $s>2hb-1$，和半直线 S': $y=b$, $x=s'>-2hb$. 由其中第一条半直线 S 开始（$y=b+0$ 时），相轨线进入区域(I)（t 增加时），由第二条开始（$y=b-0$ 时），进入区域(II). 由两条半直

1) 相轨线必定处处连续，在直线 $y=b$ 上也是如此. 这一论断的根据曾在上册第三章 §4 中阐述过.

线的公共线段（$y=b$, $-2hb<x<1-2hb$）出发的，相轨线既可进入区域(I)($y=b+0$ 时)又可进入区域(II)($y=b-0$ 时)．这一线段以后我们将称之为“排斥线段”[1]．

所研究的动力学系统(8.26)只有一个(而且是稳定的)平衡状态——原点(0,0)，$h<1$ 时为焦点，$h>1$ 为结点．不难看出，在后一种情况下，系统不可能有极限环[2]，因此，所有相轨线都将趋向（$t\to+\infty$ 时）稳定结点，这就是说，振荡器内将不发生任何自振．因此，以后我们只限于研究 $0<h<1$ 的情况．

2. 点变换． 极限环如果存在，它必然包围原点(唯一的平衡状态)，而另一方面又不可能全部位于区域(I)(或区域(II))内．因而它们必然与直线 $y=b$ 相交，从而也就和分出的半直线 S 相交．所以，为了找出方程(8.26)的极限环，我们只需研究半直线 S 对于它自身的点变换就够了，这一变换由方程的相轨线（后继函数为 $s_1=f(s)$)(参看图 370)来实现．此变换以 Π 表示之．相点由半直线 S 上的$(-s,\ b)$点出发，沿区域(I)内的相应轨线进入半直线 S' 上的$(s',\ b)$点，这一变换以 Π_1 表示，而由$(s',\ b)$点出发，沿区域(II)内的轨线返回半直线 S 上(点$(-s_1,\ b)$；图 370)这一变换以 Π_2 表示．此时，显然“全”变换

$$\Pi=\Pi_1\cdot\Pi_2.$$

不难得出变换 Π_1 和 Π_2 的对应函数的参数表达式．为此我们来研究 $t=0$ 时由半直线 S 某点$(-s,\ b)$出发进入区域(I)的轨线．根据(8.26)其方程将为：

---

1) 为了解释这一名词，我们指出，区域(II)内水平切线 $\left(\frac{dy}{dx}=0\right)$ 的等倾线为直线 $y=-2hx$，区域(I)内为直线 $y=1-2hx$．等倾线的左方 $\dot{y}>0$，右方 $\dot{y}<0$．我们还要指出，在“排斥线段”的各个点上，以至于整个 $y=b$ 直线上，相点的运动不可能由方程(8.26)确定，而必须采用某种方法补充确定．对于直线 $y=b$ 上排斥线段以外的各点来说，这种补充确定很简单：相点离开直线 $y=b$，在 $x<-2hb$ 时，沿着进入区域(I)或 $x>1-2hb$ 时沿着进入(II)的相轨线运动．在排斥线段的各点上补充确定相点的运动不这样明显，准备以后再来解决．

2) 当 $h>1$ 时，在区域(II)内有两条来自无穷远并通过结点的积分曲线．极限环，如果存在，必与这些直线相交，而这是不可能的．

$$x = 1 + e^{-ht}\left[-(1+s)\cos\omega t + \frac{b - h(1+s)}{\omega}\sin\omega t\right],$$

$$y = e^{-ht}\left[b\cos\omega t + \frac{1+s-hb}{\omega}\sin\omega t\right],$$

其中

$$\omega = \sqrt{1-h^2}.$$

相点沿此轨线运动(经过某一时间间隔 t_1)必落到半直线(S')上的(s', b)点上[1]. 对于后者显然我们有:

$$s' = 1 + e^{-ht_1}\left[-(1+s)\cos\omega t_1 + \frac{b - h(1+s)}{\omega}\sin\omega t_1\right],$$

$$b = e^{-ht_1}\left[b\cos\omega t_1 + \frac{1+s-hb}{\omega}\sin\omega t_1\right].$$

从这些关系式解出 s 和 s', 我们就得出变换 Π_1 的对应函数:

$$s = b\omega\frac{e^{\gamma\tau_1} - \cos\tau_1 + \gamma\sin\tau_1}{\sin\tau_1} - 1,$$

$$s' = b\omega\frac{e^{-\gamma\tau_1} - \cos\tau_1 - \gamma\sin\tau_1}{\sin\tau_1} + 1,$$

其中

$$\gamma = \frac{h}{\omega} = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$$

和 $\tau_1 = \omega t_1$——相点在区域(I)内的折算穿越时间. 如果引入

$$u = \frac{s}{b\omega} \quad 和 \quad v = \frac{s'}{b\omega},$$

则变换 Π_1 的对应函数将可写成更简单的形式:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{e^{\gamma\tau_1} - \cos\tau_1 + \gamma\sin\tau_1}{\sin\tau_1} - a, \\ v &= \frac{e^{-\gamma\tau_1} - \cos\tau_1 - \gamma\sin\tau_1}{\sin\tau_1} + a, \end{aligned}\right\} \tag{8.27}$$

其中

$$a = \frac{1}{b\omega} = \frac{\omega_0|M|I_s}{E_g\sqrt{1-h^2}}.$$

---

1) 很明显, $s'>1-2hb$. 因为在区域(I)内, 当 $x<1-2hb$ 时, 相轨线将离开直线 $y=b$.

用类似的方法可以求出变换 Π_2，即半直线(S')的点 $(b\omega v, b)$ 向半直线(S)的点$(-b\omega u_1, b)$的变换的对应函数：

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= -\frac{e^{-\gamma\tau_2} - \cos\tau_2 - \gamma\sin\tau_2}{\sin\tau_2}, \\ v &= -\frac{e^{\gamma\tau_2} - \cos\tau_2 + \gamma\sin\tau_2}{\sin\tau_2}, \end{aligned}\right\} \qquad (8.28)$$

其中 $\tau_2 = \omega t_2$——相点沿轨线运动穿越区域(II)所需之折算时间.

研究对应函数(8.27)与研究对应函数(8.8)（参看 § 2）的方法完全相似. 不难看出，变换 Π_1 的参数在 $0 < \tau_1 < \pi$ 区间内变化，而且 τ_1 由 0 增至 π 时，u 由 $u_0 = 2\gamma - a$ 单调地增至 $+\infty$，而 v 则由 $v_0 = a - 2\gamma$ 同样增至 $+\infty$（曲线(8.27)的初始点，当参数 a 取各个不同值时，显然必在直线 $u + v = 0$ 上）. 其次，当 $0 < \tau_1 < \pi$ 时，有：

$$\frac{du}{dv} = \frac{1 - e^{\gamma\tau_1}(\cos\tau_1 - \gamma\sin\tau_1)}{1 - e^{-\gamma\tau_1}(\cos\tau_1 + \gamma\sin\tau_1)} > 0$$

和

$$\frac{d^2u}{dv^2} = \frac{2(1 + \gamma^2)\sin^3\tau_1(\mathrm{sh}\,\gamma\tau_1 - \gamma\sin\tau_1)}{[1 - e^{-\gamma\tau_1}(\cos\tau_1 + \gamma\sin\tau_1)]^3} > 0,$$

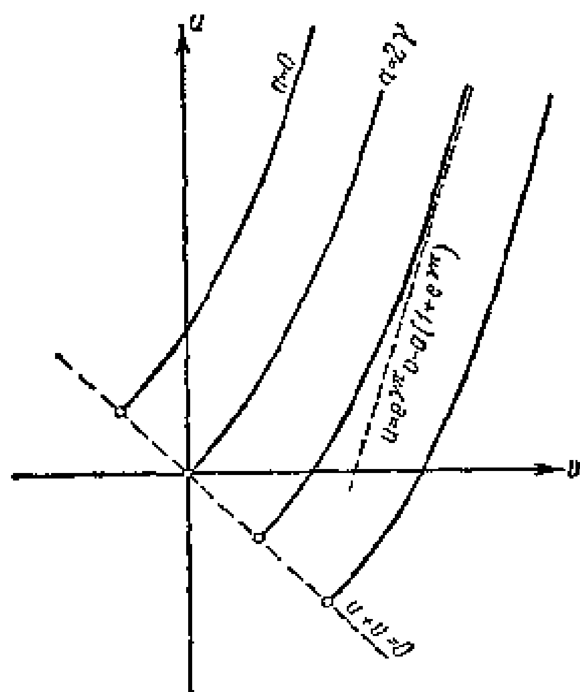


图 371

即 τ_1 由 0 增至 π 时，$\frac{du}{dv}$ 由 $\left(\frac{du}{dv}\right)_{\tau_1=0} = 1$ 单调地增至 $\left(\frac{du}{dv}\right)_{\tau_1=\pi} = e^{\gamma\pi} > 1$. 最后，曲线(8.27)有一渐近线（$\tau_1 \to \pi$ 时）$u = e^{\gamma\pi}v - a(1 + e^{\gamma\pi})$. 在图 371 上所表示的是 γ 取固定值而参数 $a \geqslant 0$ 取不同值时 (8.27) 的曲线族（为了得出 $a > 0$ 时的曲线 (8.27) 可将 $a = 0$ 时的曲线向右下方偏移一距离 a 即可）.

在着手研究对应函数(8.28)时，首先应当指出：相点在区域(II)里沿轨线(螺线)运动时（这相当于半直线 s' 的半直线 S 的变换 Π_2)，围绕稳定焦点(0, 0)的转动大于半周而小于一周(即相点的矢量半径 r 旋转的角度大于 π 小于 2π，而且相应的相轨线之尺寸越大，s' 和 s_1 越大，这个角度也就越小)．因此（参看上册第一章§4)，变换 Π_2 的参数 τ_2 显然必位于 $\pi<\tau_2<2\pi$ 的区间内，而且 τ_2 减小相当于 v 和 u_1 的单调增加($\tau_2\to\pi+0$ 时，v 和 $u_1\to+\infty$)．但并不是半直线 S' 的所有点都能借助于区域(II)的相轨线转换成半直线 S 的点．如果在区域(II)内通过($-2hb$, b)点引出一相轨线 L_0，那么它必然划出这样一个区域(在图 370 上画斜线的区域)，使得相轨线一旦落入这一区域内，就不能再返回 $y=b$ 线，而绕向稳定焦点．以 s_0' 表示相轨线 L_0 与半直线 S' 交点的纵坐标（图 370)，此时，S' 半直线上满足 $-2hb<x<s_0'$ 的各点，显然不能借助于区域(II)的轨线转换为半直线 S 的点．点 $s'=s_0'$（或 $v=v^0=\frac{s_0'}{b\omega}$) 的折算穿越时间 τ_2^0 以如下方程确定：

$$-s_1(\tau_2^0)=-2hb \text{ 或 } u_1(\tau_2^0)=2\gamma,$$

或者

$$1-e^{\gamma\tau_2^0}(\cos\tau_2^0-\gamma\sin\tau_2^0)=0.$$

显然，必有 $\pi<\tau_2^0<2\pi$（此方程之图解表示在图 372 上)．

这样一来，使变换参数 τ_2 在从 τ_2^0 到 π 的区间里变化，我们就

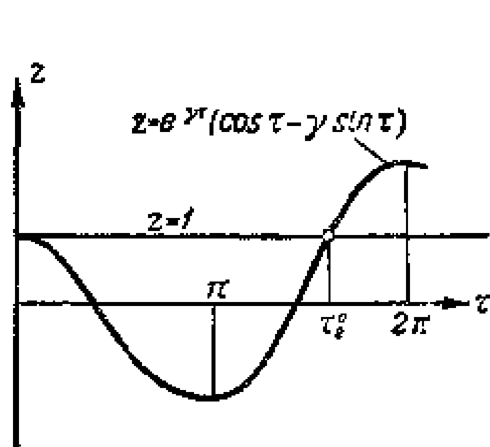


图 372

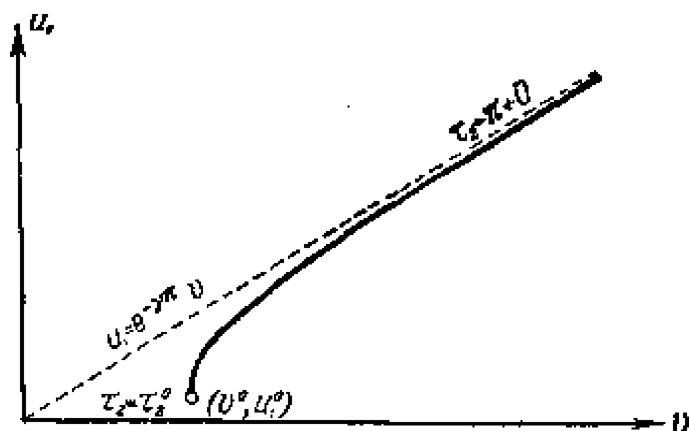


图 373

得到半直线 S' 的全部点集合，这些点借助于变换 Π_2 与半直线 S 的各点相联系着．而当 τ_2 由 τ_2^0 减小到 π 时，u_1 由 $u_1^0 = 2\gamma$ 单调地增至 $+\infty$，v 由 $v^0 = v(\tau_2^0) = -2\frac{\operatorname{sh}\gamma\tau_2^0}{\sin\tau_2^0}$ 也增加到 $+\infty$，

$$\frac{du_1}{dv} = \frac{1 - e^{-\gamma\tau_2}(\cos\tau_2 + \gamma\sin\tau_2)}{1 - e^{\gamma\tau_2}(\cos\tau_2 - \gamma\sin\tau_2)} > 0$$

并由 $+\infty$（$\tau_2 = \tau_2^0$ 时）单调地下降到 $e^{-\gamma\tau_2}$（$\tau \to \pi$ 时），因为在 $\pi < \tau_2 < \tau_2^0$ 区间上有：

$$\frac{d^2u_1^2}{dv^2} = \frac{2(1+\gamma^2)\sin^3\tau_2(\operatorname{sh}\gamma\tau_2 - \gamma\sin\tau_2)}{[1 - e^{\gamma\tau_2}(\cos\tau_2 - \gamma\sin\tau_2)]^3} < 0.$$

当 $\tau_2 \to \pi$ 时，曲线(8.28)有一渐近线 $u_1 = e^{-\gamma\pi}v$．变换 Π_2 之对应函数(8.28)的图象，表示在图 373 上．

3. 不动点和极限环． 为了找出变换 $\Pi = \Pi_1 \cdot \Pi_2$ 的不动点(因而也就是极限环)，并研究其稳定性，我们在同一个平面上画出对应函数(8.27)和(8.28)的图象（一个轴表示 v，另一轴表示 u 和 u_1)，并研究 γ 取固定值，$\alpha \geqslant 0$ 取不同值时的拉梅尔图(图 374)．

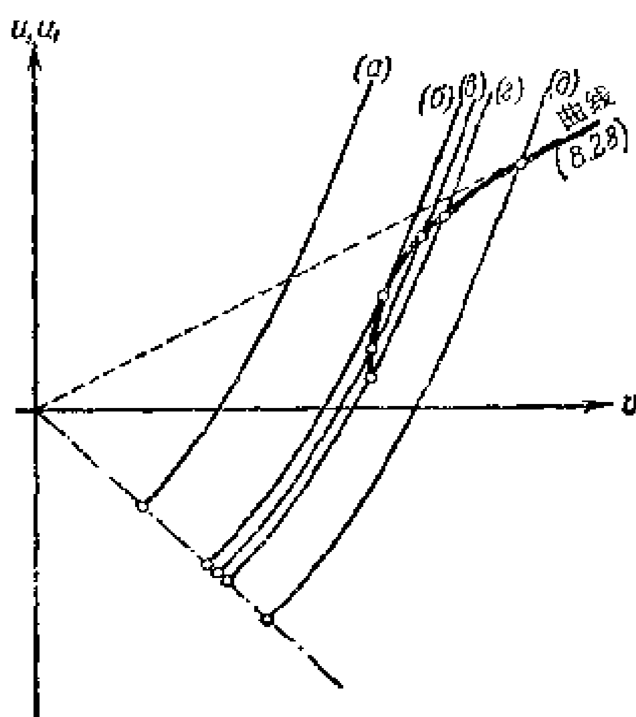


图 374

当 $a \leqslant 2\gamma$ 时，曲线(8.27)显然不与曲线(8.28)相交[1]. 其次，曲线(8.28)与参数 a 无关，而曲线(8.27)则随 a 的增加向右移动，且可移到任意远处. 因此 a 增加时，就可以依次得到如图 374 所示的 (а), (б), (в), (г) 及 (д) 等情况.

曲线(8.27)和(8.28)的交点(其坐标以 $\bar{u}, \bar{v}$ 表示，与其相对应的 τ_1, τ_2 值以 $\bar{\tau}_1$ 及 $\bar{\tau}_2$ 表示)，显然将确定出变换 Π 的不动点，从而也就确定出被研究之系统在其相平面上的极限环[2]. 不动点可用解析方法从下列方程组中求得：

$$\left.\begin{aligned} \frac{e^{\gamma\tau_1} - \cos\tau_1}{\sin\tau_1} - a &= \frac{\cos\tau_2 - e^{-\gamma\tau_2}}{\sin\tau_2}, \\ \frac{e^{-\gamma\tau_1} - \cos\tau_1}{\sin\tau_1} + a &= \frac{\cos\tau_2 - e^{\gamma\tau_2}}{\sin\tau_2} \end{aligned}\right\} \tag{8.29}$$

$$(0 < \bar{\tau}_1 < \pi, \ \pi < \bar{\tau}_2 < \tau_2^0 < 2\pi),$$

在对应函数的参数表达式(8.27)和(8.28)中，令 $v = \bar{v}$, $u_1 = u$，就可以得出上列方程组.

如果有两个不动点(参看图 374 中的情况(в))，则对于第一个不动点(具有较小的 $\bar{u} = \bar{u}^{(1)}$, $\bar{v} = \bar{v}_1$, $\bar{\tau}_1$, 以及较大的 $\bar{\tau}_2$)有

$$\left(\frac{du_1}{du}\right)_{v=\bar{v}_1} = \left(\frac{du_1}{dv}\right)_{v=\bar{v}_1} \div \left(\frac{du}{dv}\right)_{v=\bar{v}_1} > 1$$

而对于第二个不动点有

$$0 < \left(\frac{du_1}{du}\right)_{v=\bar{v}_2} = \left(\frac{du_1}{dv}\right)_{v=\bar{v}_2} \div \left(\frac{du}{dv}\right)_{v=\bar{v}_2} < 1,$$

这就是说，第一个是不稳定的，第二个是稳定的. 如果变换 Π 只有一个不动点(图 374 上的情况(в))，那么它将永远是稳定的，因为

---

1) 当 $a \leqslant 2\gamma$ 时，曲线(8.27)位于分角线 $u = v$ 的上方，而曲线(8.28)则永远位于自己的渐近线 $u_1 = e^{-\gamma\pi}v$ 的下方，因此亦必然在分角线 $u = v$ 的下方.

2) 不难看出，曲线(8.27)和(8.28)的交点不可能多于两个. 的确，假若这两曲线的交点多于两个，则第二和第三个交点(沿 $\bar{v}$ 增加方向算起)必满足如下的不等式：

$$\left(\frac{du_1}{dv}\right)_{v=\bar{v}_2} < \left(\frac{du}{dv}\right)_{v=\bar{v}_2} \text{ 和 } \left(\frac{du_1}{dv}\right)_{v=\bar{v}_3} > \left(\frac{du}{dv}\right)_{v=\bar{v}_3},$$

而这是不可能的，因为 v 增加时 $\frac{du_1}{dv}$ 减小，$\frac{du}{dv}$ 增大.

它满足稳定条件：

$$0<\left(\frac{du_1}{du}\right)_{v=\bar{v}}<1.$$

具有偏移厂特性曲线的电子管振荡器，对应于拉梅尔图的(а)，(б)，(в)，(г)，(д)诸情况（图 374），相平面上之相轨线划分可能有的类型，表示在图 375—379 上．图 380 上表示出了振荡器参数平面 γ 及 a，此平面被划分为上述振荡器状态的存在区．如果振荡器中有不很强的反馈，而且这一反馈的存在，使得点(γ, a)在参数平面上位于不画斜线的区域内（此区域对应于拉梅尔图中的情况(а)），则相轨线就必然趋向稳定的平衡状态(0, 0)，因此，对于任意初始条件都将建立起这一平衡状态（图 375）．在某一临界反

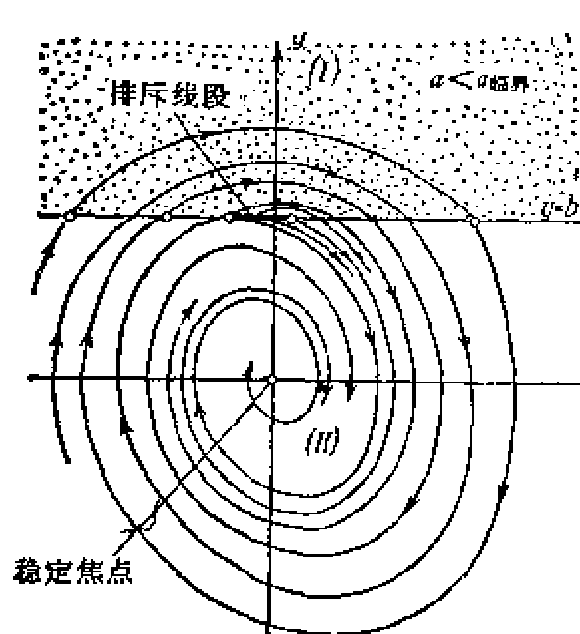


图 375

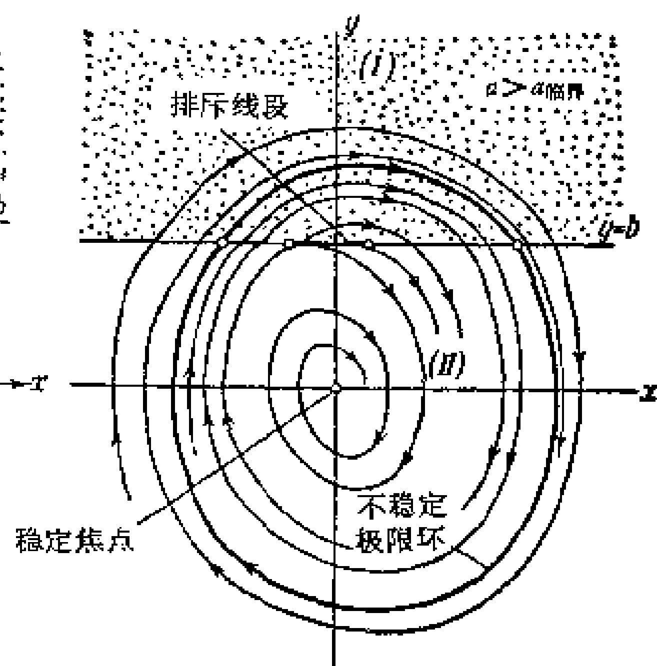


图 376

馈时（$a=a_{临界}=f\gamma$)），相平面上将出现半稳定极限环（图 376），这相当于图 374 上的情况(б)中，即拉梅尔图上之曲线有切点的情况．这一极限环，当反馈获得任意小的加强（参数 a 有任意小的增量）时，都将分成两个极限环，其一为稳定的，另一个是不稳定的（图 377）．参数 a 继续增加时，不稳定极限环的尺寸减小，而在 a 达到第二个分枝值（$a=a^{(2)}_{临界}=f_1(\gamma)$）时，这相当于图 380 中的曲线

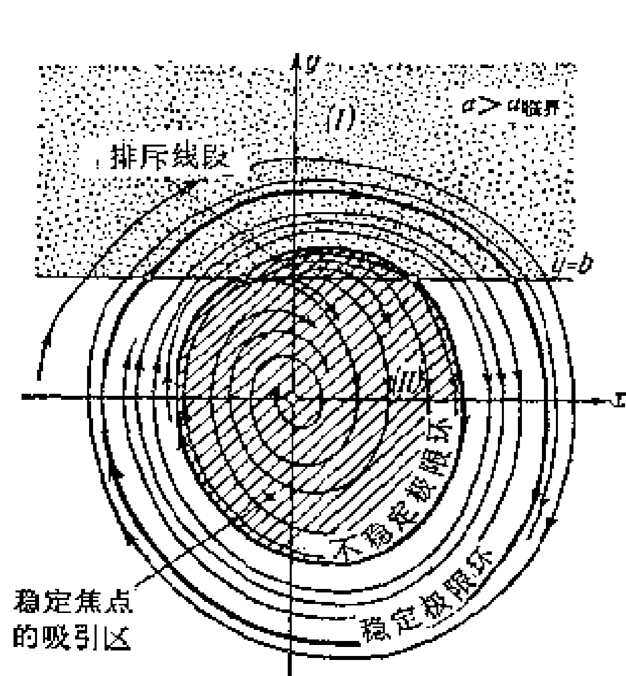


图 377

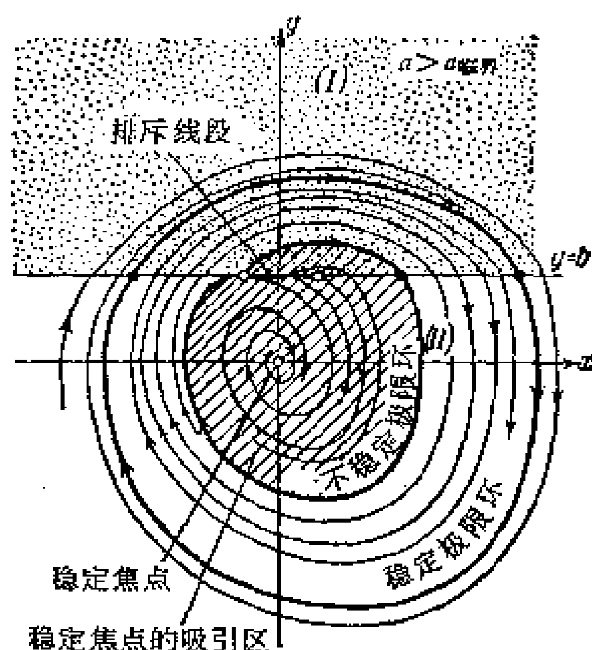


图 378

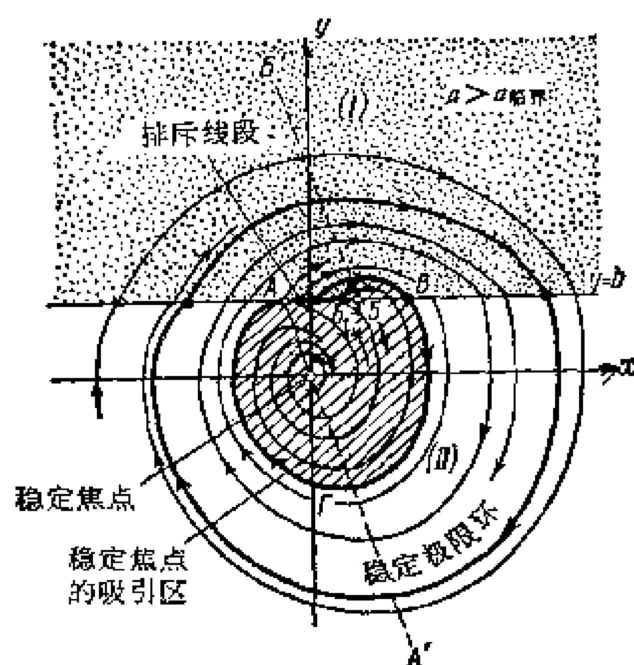


图 379

(e)以及拉梅尔图中的情况 (e)，不稳定极限环将落到排斥线段上(图 378)。最后，当 $a > f_1(\gamma)$ 时，即(γ, a)点位于图 380 的区域(∂)，而点变换只有一个不动点(拉梅尔图的情况(∂))时，相平面上的相轨线划分如图 379 表示。

这样，当 $a < a_{临界} = f(\gamma)$ 时，振荡器中不发生任何自振。当 $a > a_{临界} = f(\gamma)$时，这相当于图 380 中画斜线的区域，振荡器中的自振具有硬激状态：即只有当初始条件对应的相点位于不稳定极限环外部(图 377)，或位于图 379 上画斜线的区域外部时[1]，振荡器中才可能发生周期(即自振)状态。

稳定自振周期显然等于：

$$\tau = \frac{1}{\omega}(\bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2),$$

其中 $\bar{\tau}_1$ 及 $\bar{\tau}_2$ 为方程组(8.29)的解[2]。

将振荡器参数平面划分成非振动区域（区域(a)）和硬激状态区域(第一象限的其余区域）的边界曲线 $a_{临界} = f(\gamma)$ 显然可由方程组(8.29)及如下条件确定的，即：$a = a_{临界}$时，曲线(8.27)和(8.28)彼此相切：

$$\left(\frac{du_1}{dv}\right)_{v=\bar{v}} = \left(\frac{du}{dv}\right)_{v=\bar{v}}$$

或

$$\frac{1 - e^{\gamma\bar{\tau}_1}(\cos\bar{\tau}_1 - \gamma\sin\bar{\tau}_1)}{1 - e^{-\gamma\bar{\tau}_1}(\cos\bar{\tau}_1 + \gamma\sin\bar{\tau}_1)} = \frac{1 - e^{-\gamma\bar{\tau}_2}(\cos\bar{\tau}_2 + \gamma\sin\bar{\tau}_2)}{1 - e^{-\gamma\bar{\tau}_2}(\cos\bar{\tau}_2 - \gamma\sin\bar{\tau}_2)}.$$

可以证实，这一边界曲线(图 380中之曲线(б)) 通过参数 a 和 γ 平面的原点，而且随着 γ 的增加，$a_{临界}$ 单调地增大。

4. a 及 γ 很小的情况. 下面我们对 a 及 γ 足够小（即 $a, \gamma \ll 1$)的情况，找出自振周期和振幅的近似表达式，将方程(8.29)写成如下形式：

---

1) 图 379 中闭曲线 $AБ_1BГA$，即稳定焦点 (0,0) 之吸引区的边界，也可以看成是一个不稳定极限环，但必须采用如下方法补充确定相点在排斥线段 $AБ$ 上的运动规律：相点在此线段的除 $Б_1$ 外的所有点上，都沿此线段向右移动. 在 $Б_1$ 点则转到轨线 $Б_1BГA$ 上. 关于这种补充确定的方法，我们可作如下解释：如果将电子管特性曲线逼近为与Г型折线十分接近的光滑特性曲线，那么在振荡器的相平面上，水平切线等倾线必然是与折线 $A'AББ'$ 相近的连续曲线. 而不稳定极限环亦一定十分接近于闭曲线 $AБ_1BГA$*.

2) 如果满足 $0<\bar{\tau}_1<\pi$, $\pi<\bar{\tau}_2<\bar{\tau}_2^0<2\pi$ (图 374 的情形(в))时，方程组对于 $\bar{\tau}_1$ 及 $\bar{\tau}_2$ 有两组解，那么为了计算振荡器中周期振动的周期，显然必须选用 $\bar{\tau}_1$ 中较大的那一个值(与此对应，$\bar{\tau}_2$ 应取较小值).

* 此时不稳定极限环亦是一条光滑闭曲线，而“排斥线段”不再存在了 ——译者注.

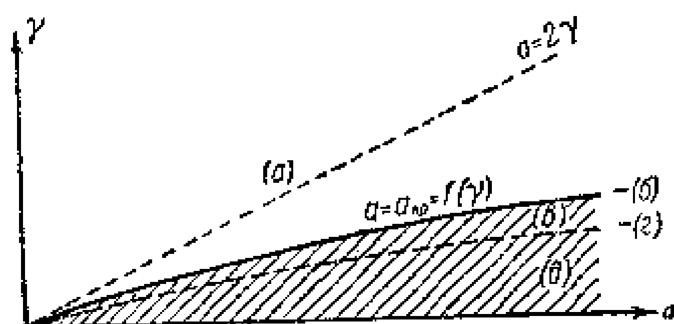


图 380

$$\frac{\operatorname{ch}\gamma\tau_1-\cos\tau_1}{\sin\tau_1}=-\frac{\operatorname{ch}\gamma\tau_2-\cos\tau_2}{\sin\tau_2},$$

$$\frac{\operatorname{sh}\gamma\tau_1}{\sin\tau_1}-a=\frac{\operatorname{sh}\gamma\tau_2}{\sin\tau_2}.$$

此时，对于 $a,\gamma\ll 1$ 的情况，我们有：

$$\frac{1-\cos\tau_1}{\sin\tau_1}=-\frac{1-\cos\tau_2}{\sin\tau_2},\quad \frac{\gamma\tau_1}{\sin\tau_1}-a=\frac{\gamma\tau_2}{\sin\tau_2},$$

由此可得 $\bar{\tau}_1+\bar{\tau}_2=2\pi$（因此，自振周期近似地等于 2π），而 $\bar{\tau}_1$ 则可以由下方程求得：

$$\sin\bar{\tau}_1=\frac{2\pi\gamma}{a},$$

这一方程只有当$\frac{2\pi\gamma}{a}<1$ 时才有实解(且有两个解：$0<(\bar{\tau}_1)_1<\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{2}<(\bar{\tau}_1)_2<\pi$)；由此可得：

$$a_{临界}=2\pi\gamma.$$

不难计算出，极限环(接近于圆周)的半径等于：

$$R=\frac{b}{\cos\frac{\bar{\tau}_1}{2}}=\frac{\sqrt{2}\,b}{\sqrt{1+\cos\bar{\tau}_1}}=\frac{\sqrt{2}\,b}{\sqrt{1\mp\sqrt{1-\left(\frac{2\pi\gamma}{a}\right)^2}}},$$

其中 $\bar{\tau}_1$ 解的较大值$\left(\frac{\pi}{2}<\tau_1<\pi\right)$和半径表达式中的负号对应于稳定极限环.

§ 5. 具有双环 RC 回路的电子管振荡器

在图 381 上表示出了具有双环 RC 回路的电子管振荡器的两种电路图（采用备有阴极电阻的双三极管和处于负互导状态的五极管）[1]，在上册第五章 § 12 我们曾用等倾线法对它们进行过研究．如果把 C_a 和 C_g 看成小的寄生电容，那么这两个电路就变成具有一个 RC 回路的多谐振荡器（参看第四章 § 7）．

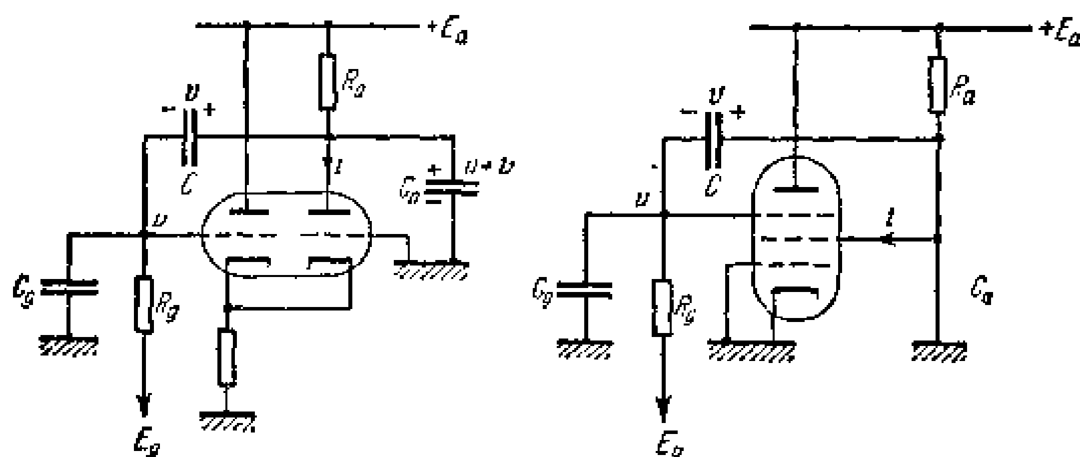


图 381

为了使这两种电路能够成为振荡器，很重要的一点在于，表示电流 i 和电子管（或电子管组）控制极电压 u 之间关系的特性曲线应具有下降段．下面，和以前一样，我们将忽略屏极反应，即认为 i 只与 u 有关（$i=i(u)$），但与第五章 § 12 不同之点在于：为了研究振荡器时可能采用点变换法

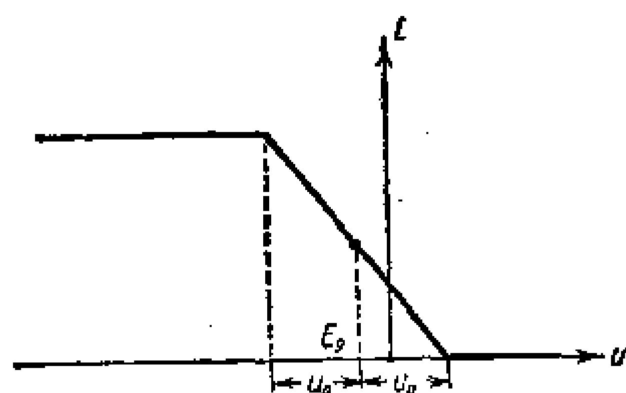


图 382

1） C_a 及 C_g 为电容，其中之一可以不存在。

起见，我们用如图382所示的分段线性函数来逼近电子管的特性曲线．同时，为了进一步简化问题，我们选取栅偏压 E_g 时应使电子管的工作点(这相当于振荡器的平衡状态)位于特性曲线的下降段的中点．

所研究的这种具有双环 RC 回路的振荡器，正如在第五章§12中已经看到过的，其振动方程可写成如下形式，即：

$$\left.\begin{aligned}\mu\dot{x} &= -x - y - K\varphi(x),\\ \dot{y} &= x,\end{aligned}\right\} \tag{8.30}$$

其中变量 x, y 与电压 u 及 v 之间有如下关系式：

$$u = E_g + u_0 x,$$

$$v = E_a - E_g - R_a i(E_g) + u_0 \frac{C_g}{C} x + u_0\left[1 + \frac{C_g}{C} + \frac{R_a}{R_g}\left(1 + \frac{C_a}{C}\right)\right] y$$

(这里的 u_0 是特性曲线下降段“长度”的一半；参看图 382)；

$$\varphi(x) = \frac{1}{u_0 S}\{i(E_g + u_0 x) - i(E_g)\} = \begin{cases}+1 & x < -1 \text{ 时},\\ -x & |x| \leqslant 1 \text{ 时},\\ -1 & x > +1 \text{ 时}\end{cases}$$

为电子管(或电子管组)的折算(无量纲的)特性曲线[1]；加在上方的圆点表示对于无量纲时间 t 的导数．无量纲时间等于

$$t = \frac{t_{\text{平常}}}{R_a(C + C_a) + R_g(C + C_g)}$$

而

$$K = \frac{SR_a}{1 + \frac{C_g}{C} + \frac{R_a}{R_g}\left(1 + \frac{C_a}{C}\right)},$$

$$\mu = \frac{R_a}{R_g}\,\frac{\frac{C_a}{C} + \frac{C_g}{C} + \frac{C_a}{C}\,\frac{C_g}{C}}{\left[1 + \frac{C_g}{C} + \frac{R_a}{R_g}\left(1 + \frac{C_a}{C}\right)\right]^2}$$

1) S 我们理解为特性曲线 $i = i(u)$ 下降段的互导．

为无量纲参数$\left(K>0,\ 而\ 0<\mu<\frac{1}{4}\right)$[1].

我们注意到，方程组(8.30)与方程

$$\mu\ddot{x}+[1+K\varphi'(x)]\dot{x}+x=0$$

等价，这就是说，具有双环 RC 回路的电子管振荡器，采用电子管组特性曲线的分段线性逼近后与本章 § 3 中所研究过的动力学系统等价．但是为了详细研究振荡器中的似不连续振动（它们发生在 $C_a,\ C_g\ll C$，即 $0<\mu\ll 1$ 时)，我们再一次对这一动力学系统进行简短的讨论，而且为了达到这一目的，采用方程(8.30)的形式比较方便，我们将用它为出发点，并只限于研究自激振荡器情况，即设 $K>1$.

1. 相平面．点变换． 与本章 § 3 一样，所研究之动力学系统(8.30)的相平面 $x,\ y$ 被直线 $x=+1$ 和 $x=-1$ 分成三个区域：(I)，(II)，(III)，在每一个区域内方程(8.30)都是线性的(图383)；而且无论在整个相平面上以及在通过线性区域的边界时，相轨线都是连续曲线．此外，由于方程(8.30)的对称性，相平面 $x,\ y$ 的相轨线划分必关于原点（即平衡状态(0，0)）对称．

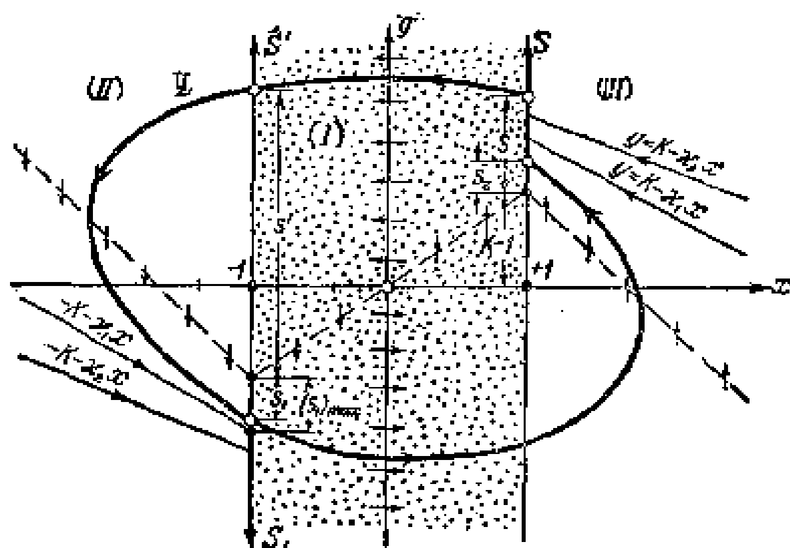


图 383

1）第二个不等式之所以成立，是因为在双环 RC 回路中（在振荡器中将电子管断开，即 $K=0$ 时)，所有过程都是衰减的非振荡过程．

对系统(8.30)的定性研究与第五章 § 12 中对系统(5.89) 所进行过的研究完全类似．这是指：纵轴 ($x=0$) 为水平切线等倾线 (其上 $\dot{y}=0$)，而折线

$$y=-x-K\varphi(x)$$

为铅垂切线等倾线(其上 $\dot{x}=0$)．在区域(II)和(III)里，各有两条直线相轨线 $y=\mp K-\varkappa_{1,2}x$，其中 $\varkappa_{1,2}$ 为下列方程的根的倒数(按符号和模都是如此)：

$$\mu\lambda^2+\lambda+1=0, \tag{8.31}$$

这一方程是(8.30)在区域(II)和(III)中的特征方程；因此 $\varkappa_1$ 和 $\varkappa_2$ 都为正值．

唯一的平衡状态——原点(0，0)，位于区域 (I) 内．由于在区域(I)内，方程组(8.30) 的特征方程以如下形式给出

$$\mu\lambda^2-(K-1)\lambda+1=0, \tag{8.32}$$

因此，当 $K>1$ 时，平衡状态不稳定，且 $4\mu>(K-1)^2$ 时为焦点，$4\mu<(K-1)^2$ 时为结点[1]．

其次，由于无限远点永远是不稳定的，因此 $K>1$ 时，在相平面上至少有一个(而且是稳定的)极限环，并关于原点对称．根据本章 § 3 中得出的结果可以断言，此极限环是唯一的．

为了找出此极限环，我们将问题归结成点变换．由于极限环是对称的[2]，它必然包围平衡状态(0，0)，而且又不能全部位于区域(I)内，因此它必然通过所有三个区域，且与直线 $x=+1$ 和 $x=-1$ 相交．从这一事实出发，我们选取半直线 $S: x=+1,\ y=K-1+s$ (其中 $s>0$) 作为“无切线段”，通过它的各个点的相轨线由区域(III)进入区域(I)，并找出此半直线对于它自身的点变换 Π (借助于方程组(8.30)的相轨线来实现)．与 § 3 一样，变换

$$\Pi=(\Pi')^2,$$

其中 Π' 为半直线 S 对与其相对称的半直线 S_1 ($x=-1,\ y=-(K-1)-s_1;\ s_1>0$)的点变换，此变换是借助于由半直线 S 各点出

1) $K<1$ 时平衡状态(0，0)稳定，系统的所有相轨线都渐近地($t\to+\infty$)向它趋近．
2) 极限环的对称性的证明与本章 §3 中的证明方法完全相同．

发的方程组(8.30)的轨线所实现的．变换Π'本身又可以看成是两个变换Π_1和Π_2的乘积，其中Π_1为半直线S向半直线S'：$x=-1$，$y=-(K-1)+s'(s'>0)$的变换，Π_2为半直线S'向半直线S_1的变换．这些变换分别由区域(I)和(II)内的相轨线所实现．我们有

$$\Pi'=\Pi_1\cdot\Pi_2.$$

这些变换的对应函数的参数表达式是不难求出的（采用与前几节相同的方法）．

计算第一个变换的对应函数时，应当应用区域(I)中的微分方程(8.30)．为方便起见，把它改写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}\mu\ddot{y}-(K-1)\dot{y}+y=0,\\ x=\dot{y}.\end{aligned}\right\}\tag{8.30a}$$

此方程组的特征方程(方程(8.32))，当$4\mu>(K-1)^2$时具有复根$\lambda=h_1\pm j\omega$，而当$4\mu<(K-1)^2$时，具有实根(正根)$\lambda=h_1\pm\omega_1(h_1>\omega_1)$，其中

$$h_1=\frac{K-1}{2\mu}\ \text{和}\quad \omega_1=+\frac{1}{2\mu}\sqrt{|(K-1)^2-4\mu|}$$

$$=+\sqrt{\left|h_1^2-\frac{1}{\mu}\right|}.$$

设$4\mu>(K-1)^2$．此时，方程组(8.30a)的通解可写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}y&=e^{h_1t}\left[\frac{x_0}{\omega_1}\sin\omega_1t+y_0\left(\cos\omega_1t-\frac{h_1}{\omega_1}\sin\omega_1t\right)\right],\\ x&=e^{h_1t}\left[x_0\left(\cos\omega_1t+\frac{h_1}{\omega_1}\sin\omega_1t\right)-\frac{y_0}{\mu\omega_1}\sin\omega_1t\right]\end{aligned}\right\}\tag{8.33}$$

(x_0, y_0为$t=0$时初始点的坐标；参看第一章§4)．对于由半直线S上s点出发(设其为$t=0$时)的相轨线L来说，在(8.33)中应当代入：$x_0=+1$，$y_0=K-1+s$．若设t_1为相点沿轨线L运动而穿越区域(I)的时间(由半直线S到半直线S')．则当$t=t_1>0$时，必有$x=-1$，$y=-(K-1)+s'$，即：

$$-(K-1)+s'=e^{\gamma_1\tau_1}\left[\frac{1}{\omega_1}\sin\tau_1+(K-1+s)(\cos\tau_1-\gamma_1\sin\tau_1)\right],$$

$$-1 = e^{\gamma_1 \tau_1}\left[\cos\tau_1 + \gamma_1 \sin\tau_1 - \frac{1}{\mu\omega_1}(K-1+s)\sin\tau_1\right],$$

其中

$$\tau_1 = \omega_1 t_1,\ \gamma_1 = \frac{h_1}{\omega_1} = \frac{K-1}{+\sqrt{|(K-1)^2-4\mu|}}. \qquad (8.34)$$

由得出的第二关系式中解出 s, 然后再由第一关系式中解出 s', 便得出变换 Π_1 的对应函数（$4\mu>(K-1)^2$ 之情况），它可写作下列表示 s 及 s' 之间关系的参数方程的形式:

$$s = \frac{K-1}{2}\ \frac{e^{-\gamma_1\tau_1} + \cos\tau_1 - \gamma_1\sin\tau_1}{\gamma_1\sin\tau_1},$$

$$s' = \frac{K-1}{2}\ \frac{e^{\gamma_1\tau_1} + \cos\tau_1 + \gamma_1\sin\tau_1}{\gamma_1\sin\tau_1}, \qquad (8.35)$$

因为

$$\mu\omega_1 = \mu h_1\frac{\omega_1}{h_1} = \frac{K-1}{2\gamma_1}$$ [1]

当$4\mu<(K-1)^2$时，即方程(8.32)具有实根，而方程组（8.30a）的通解可由（8.30）中以相应的双曲函数代替三角函数求得时，我们同样可以求出变换Π_1的对应函数:

---

1) s' 的表示式还可用另外方法求得，如在 s 的表示式中，将 s 代以 $-s'$，τ_1 代以 $-\tau_1$，就得到 s'。的确，设

$$x = x_0 f_1(t) + y_0 f_2(t),\ y = x_0 f_3(t) + y_0 f_4(t)$$

为区域(I)内通过 s 及 s' 点（x_0, y_0 为 $t=0$ 时的 x, y 值）的轨线方程，并设 t_1 ($t_1>0$)为相点沿这一轨线由 s 点到达 s' 点的穿越时间。将相点位于 s 点($x_0=+1$, $y_0=K-1+s$)那一瞬时视作时间的起点。那么，当 $t=t_1$ 时，必有 $x=-1$，即:

$$-1 = f_1(t_1) + (K-1+s)f_2(t_1),$$

由此可得

$$s = -\frac{1+f_1(t_1)}{f_2(t_1)} - (K-1) = \Phi_1(t_1).$$

利用选择时间起点的任意性，现在我们设相点位于 s' 点($x_0=-1$, $y_0=-(K-1)+s'$) 那一瞬时为时间起点，那么，当 $t=-t_1$ 时，必有 $x=+1$。由此可以得出

$$+1 = -f_1(-t_1) - (K-1-s')f_2(-t_1),$$

即

$$s' = \frac{1+f_1(-t_1)}{f_2(-t_1)} + (K-1) = -\Phi_1(-t_1).$$

这说明 s' 可以从 s 的关系式中导出，只需将其中的 t_1 以 $-t_1$ (或 τ_1 以 $-\tau_1$)代替，并改变符号就可以了。

$$\left.\begin{aligned}s&=\frac{K-1}{2}\;\frac{e^{-\gamma_1\tau_1}+\mathrm{ch}\tau_1-\gamma_1\mathrm{sh}\tau_1}{\gamma_1\mathrm{sh}\tau_1},\\ s'&=\frac{K-1}{2}\;\frac{e^{\gamma_1\tau_1}+\mathrm{ch}\tau_1+\gamma_1\mathrm{sh}\tau_1}{\gamma_1\mathrm{sh}\tau_1}\end{aligned}\right\}\tag{8.36}$$

（τ_1 和 γ_1 的值，和以前一样，由表示式（8.34)给出，但这里 $\gamma_1>1$）.

在区域(II)内，方程组(8.30)可写成如下形式:

$$\left.\begin{aligned}\mu\ddot{y}+\dot{y}+y&=-K,\\ x&=\dot{y}.\end{aligned}\right\}\tag{8.30b}$$

此方程组的特征方程(8.31)永远（回忆 $0<\mu<\frac{1}{4}$)具有负实根 $\lambda=-h_2\pm\omega_2$，其中

$$h_2=\frac{1}{2\mu},\ \omega_2=\frac{\sqrt{1-4\mu}}{2\mu}$$

(而且 $h_2>\omega_2$). 因此，方程组(8.30b)的通解可以写成如下形式:

$$\left.\begin{aligned}y&=-K+e^{-h_2t}\left[\frac{x_0}{\omega_2}\mathrm{sh}\omega_2t+(y_0+K)\left(\mathrm{ch}\omega_2t+\frac{h_2}{\omega_2}\mathrm{sh}\omega_2t\right)\right],\\ x&=e^{-h_2t}\left[x_0\left(\mathrm{ch}\omega_2t-\frac{h_2}{\omega_2}\mathrm{sh}\omega_2t\right)-\frac{y_0+K}{\mu\omega_2}\mathrm{sh}\omega_2t\right].\end{aligned}\right\}\tag{8.37}$$

设 $t=0$ 时，$x=x_0=-1$，$y=y_0=-(K-1)+s'$，而 $t=t_2=\frac{\tau_2}{\omega_2}>0$ 时，$x=-1$，$y=-(K-1)-s_1$（t_2 为相点沿区域(II)内的轨线 L，由 s' 点运动到 s_1 点所需之穿越时间). 此时，(8.37)的第二个关系式将给出:

$$-1=e^{-\gamma_2\tau_2}\left[-(\mathrm{ch}\tau_2-\gamma_2\mathrm{sh}\tau_2)-\frac{1}{\mu\omega_2}(1+s')\mathrm{sh}\tau_2\right],$$

其中

$$\tau_2=\omega_2t_2,\quad \gamma_2=\frac{h_2}{\omega_2}=\frac{1}{\sqrt{1-4\mu}}>1.\tag{8.38}$$

应用关系式 $\mu\omega_2=\mu h_2\frac{\omega_2}{h_2}=\frac{1}{2\gamma_2}$，从得出的方程中解出 s'，然后在得出的 s' 的表示式中：将 s' 以 $-s_1$ 和 τ_2 以 $-\tau_2$ 代替以后，我们就得出变换 Π_2 的对应函数[1]:

---

1) 上面指出的这种寻找 s' 之表达式的方法的证明，与535页脚注的证明相类似.

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \frac{e^{-\gamma_2\tau_2} - \mathrm{ch}\tau_2 + \gamma_2\mathrm{sh}\tau_2}{2\gamma_2\mathrm{sh}\tau_2}, \\ s' &= \frac{e^{\gamma_2\tau_2} - \mathrm{ch}\tau_2 - \gamma_2\mathrm{sh}\tau_2}{2\gamma_2\mathrm{sh}\tau_2}. \end{aligned}\right\} \tag{8.39}$$

2. 对应函数的研究. 在变换 Π_1, Π_2 的对应函数中，我们首先研究 $4\mu > (K-1)^2$ 时变换 Π_1 的对应函数. 在这种条件下，平衡状态(0,0)为不稳定焦点，区域(I)中的轨线为由焦点倒绕出的螺线，而对应函数本身则由关系式(8.35)表示出. 由于相点由 s 沿区域(I)中螺线的弧线运动到 s'，绕焦点的旋转又小于半圈，那么，变换参数 τ_1——相点在区域(I)的折算穿越时间，必满足不等式 $0 < \tau_1 < \pi$，而且较小的 τ_1 对应于较大的 s 和 s'[1]. 将相当于 $s=0$ 的 τ_1 值以 τ_1^0 表示之；这一临界的 τ_1 值显然是由如下方程确定的：

$$\phi_1(\tau_1, \gamma_1) = 0,$$

其中

$$\phi_1(\tau, \gamma) = 1 + e^{\gamma\tau}(\cos\tau - \gamma\sin\tau)$$

(此函数的图象以及此方程对于 τ_1^0 的图解表示在图 384 上；显然，$0 < \tau_1^0 < \pi$). 此时，如果将 τ_1 由 τ_1^0 变到 0，我们就得到 s 在 0 到 $+\infty$ 的区间内的所有值；同时 s' 也将由某一正值

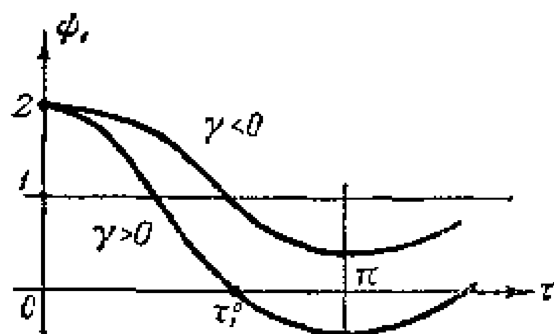


图 384

$$s_0' = (K-1)\left[\frac{\mathrm{sh}\,\gamma_1\tau_1^0}{\gamma_1\sin\tau_1^0} + 1\right] > 2(K-1)$$

趋向$+\infty$.

将(8.35)微分之，可得

$$\frac{ds}{d\tau_1} = -\frac{K-1}{2\gamma_1}\cdot\frac{1 + e^{-\gamma_1\tau_1}(\cos\tau_1 + \gamma_1\sin\tau_1)}{\sin^2\tau_1}$$

---

1) 这一点很容易理解，因为相点沿具有较大的 y 的轨线运动时，其速度必然较快：y 越大，$|\dot{x}|$ 就越大(根据(8.30)中的第一个方程)，而 $t_1(\tau_1)$就越小：$y\to+\infty$ 时 $\dot{x}\to-\infty$，而 $t_1\to 0$.

$$= -\frac{K-1}{2\gamma_1}\frac{\psi_1(\tau_1, -\gamma_1)}{\sin^2\tau_1},$$

$$\frac{ds'}{d\tau_1} = -\frac{K-1}{2\gamma_1}\cdot\frac{1+e^{\gamma_1\tau_1}(\cos\tau_1-\gamma_1\sin\tau_1)}{\sin^2\tau_1}$$

$$= -\frac{K-1}{2\gamma_1}\frac{\psi_1(\tau_1, \gamma_1)}{\sin^2\tau_1},$$

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{\psi_1(\tau_1, -\gamma_1)}{\psi_1(\tau_1, \gamma_1)}$$

而

$$\frac{d^2s}{ds'^2} = -\frac{4\gamma_1(\gamma_1^2+1)\sin^3\tau_1}{(K-1)[\psi_1(\tau_1, \gamma_1)]^3}\{\mathrm{sh}\gamma_1\tau_1 - \gamma_1\sin\tau_1\}.$$

由于 $0 < \tau_1 < \tau_1^0$ 时，$\psi_1(\tau_1, \gamma_1)$ 和 $\psi_1(\tau_1, -\gamma_1) > 0$，故而在 τ_1 的这一变化区间必有$\frac{ds}{d\tau_1} < 0$，$\frac{ds'}{d\tau_1} < 0$，$\frac{ds}{ds'} > 0$；此外，$\frac{ds}{ds'}$必由 $+\infty$单调地变到 $+1$（τ_1 由 τ_1^0 下降到 0 或者 s 由 0 增加到 $+\infty$ 时），因为此时$\frac{d^2s}{ds'^2} < 0$.

还应指出：

$$s' - s = (K-1)\left\{\frac{\mathrm{sh}\gamma_1\tau_1}{\gamma_1\sin\tau_1} + 1\right\} > 2(K-1)$$

且 $\tau_1 \to +0$ 时，$s' - s \to 2(K-1)$，这就是说，曲线(8.35)具有渐近线

$$s = s' - 2(K-1).$$

用上述这些知识，就足以画出对应函数(8.35)的图象；它表示在图 385 上.

与此相类似，当 $4\mu < (K-1)^2$，即变换 Π_1 的对应函数写成(8.36)形式时，变换参数 τ_1 也同样位于 $0 < \tau_1 < \tau_1^0$ 区间内，其中 τ_1^0 为 $s = 0$ 时参数 τ_1 的值，其大小将由下列方程确定：

$$\psi_2(\tau_1, \gamma_1) \equiv 1 + e^{\gamma_1\tau_1}(\mathrm{ch}\tau_1 - \gamma_1\mathrm{sh}\tau_1) = 0$$

（$\gamma = \gamma_1 > 1$ 和 $\gamma = -\gamma_1 < -1$ 时，$\psi_2(\tau, \gamma)$ 的图象表示在图 386上）. 此时，当 τ_1 由 τ_1^0 减小到 0 时（与上一情况相同），s 由 0 单调地增加到 $+\infty$，s' 则由某一正值

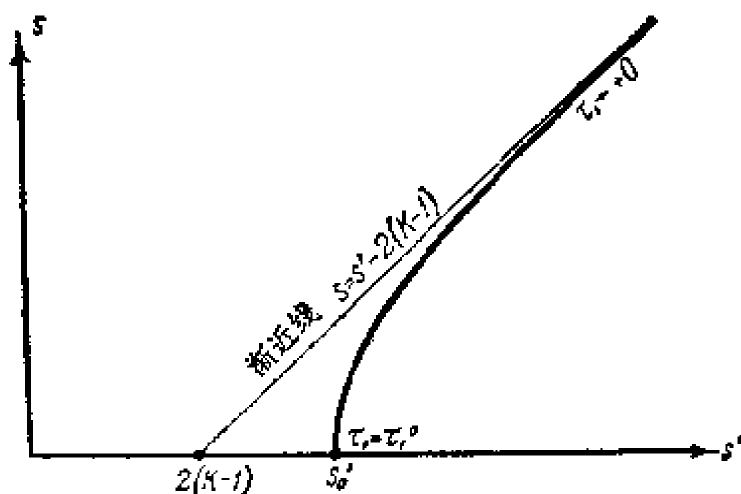


图 385

$$s_0' = (K-1)\left\{\frac{\operatorname{sh}\gamma_1\tau_1^0}{\gamma_1\operatorname{sh}\tau_1^0}+1\right\} > 2(K-1)$$

同样增加到 $+\infty$[1]；导数 $\frac{ds}{ds'}=\frac{\psi_2(\tau_1,-\gamma_1)}{\psi_2(\tau_1,\gamma_1)}$ 由 $+\infty$ 单调地减小到 $+1$，因为当 $0<\tau_1<\tau_1^0$ 时，我们有：

$$\frac{d^2s}{ds'^2}=-\frac{4\gamma_1(\gamma_1^2-1)\operatorname{sh}^3\tau_1}{(K-1)[\psi_2(\tau_1,\gamma_1)]^3}\{\operatorname{sh}\gamma_1\tau_1-\gamma_1\operatorname{sh}\tau_1\}<0.$$

因此，对应函数 (8.36) 的图象与对应函数(8.35) 的图象具有相同的形状(图 385)。

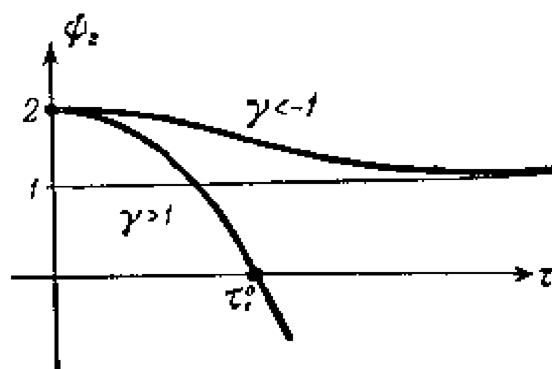


图 386

下面我们来着手研究变换 Π_2 的对应函数——函数 (8.39)。在这里，为了得到半直线 (S') 的所有点集合：$0<s'<+\infty$，我们必须将 τ_2 由 0 变化到 $+\infty$，而且（不同于 Π_1）当 τ_2 由 0 变化到 $+\infty$ 时，s' 由 0 单调地增加到

1) 曲线(8.36)当 $\tau_1\to0$ 时，具有渐近线 $s=s'-2(K-1)$。

$+\infty$，而 s_1 则由 0 增加到 $(s_1)_{极大}=\frac{\gamma_2-1}{2\gamma_2}>0$[1]。

为了证明 s' 和 s_1 增加的单调性（τ_2 由 0 增加到 $+\infty$ 时）只需计算出导数 $\frac{ds'}{d\tau_2}$ 和 $\frac{ds_1}{d\tau_2}$。不难看出

$$\frac{ds_1}{d\tau_2}=\frac{\psi_3(\tau_2,-\gamma_2)}{2\gamma_2\mathrm{sh}^2\tau_2},\quad \frac{ds'}{d\tau_2}=\frac{\psi_3(\tau_2,\gamma_2)}{2\gamma_2\mathrm{sh}^2\tau_2},$$

$$\frac{ds_1}{ds'}=\frac{\psi_3(\tau_2,-\gamma_2)}{\psi_3(\tau_2,\gamma_2)},$$

而

$$\frac{d^2s_1}{ds'^2}=-\frac{4\gamma_2(\gamma_2^2-1)\mathrm{sh}^3\tau_2}{[\psi_3(\tau_2,\gamma_2)]^3}\{\mathrm{sh}\gamma_2\tau_2-\gamma_2\mathrm{sh}\tau_2\},$$

其中

$$\psi_3(\tau,\gamma)=1-e^{\gamma\tau}(\mathrm{ch}\tau-\gamma\mathrm{sh}\tau)=2-\psi_2(\tau,\gamma),$$

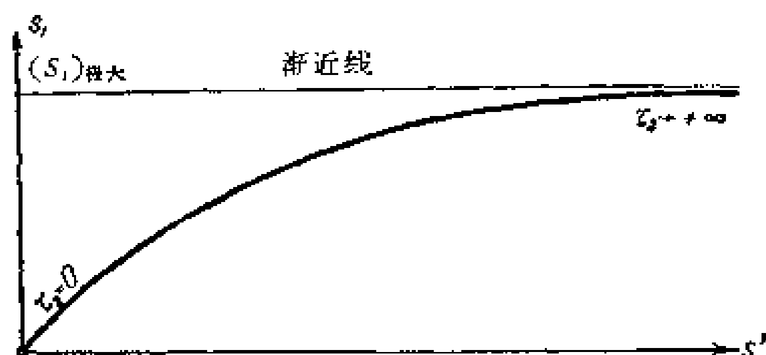


图 387

由于 $\gamma_2>1$，而且当 $|\gamma|>1$ 和 $\tau>0$ 时，$\psi_3(\tau,\gamma)>0$[2]，因此对于任意的 $0<\tau_2<+\infty$，都有：

---

1) 对区域 (II) 中的轨线之走向，进行如下的简单讨论，就可以得到上述结果。第一，由于相轨线不可能相交，因此 s' 增大时，我们也必然会获得 s_1 的增大；与此同时，较大的 s' 将对应于 s' 和 s_1 间的较大轨线弧长，因而也就对应于较大的穿越时间 t_1（较大的 τ_2）。第二，所有从半直线(s')出发进入区域(II)的轨线，都位于直线轨线 $y=-K-x_1x$ 的上方；因此必有 $s_1<(s_1)_{极大}$，其中$(s_1)_{极大}$ 为此直线轨线与半直线 S_1 相交之点的 s_1 值。寻求 s' 和 s_1 的极限值（$\tau_2\to0$ 和 $\tau_2\to+\infty$ 时），可以采用罗彼得法则。

2) 为了证明此不等式，只需指出：$\psi_3(0,\gamma)=0$，而当 $|\gamma|>1$ 和 $\tau>0$ 时，$\frac{\partial\psi_3}{\partial\tau}=(\gamma^2-1)e^{\gamma\tau}\mathrm{sh}\tau>0$。

$$\frac{ds_1}{d\tau}>0,\quad \frac{ds'}{d\tau}>0,\quad 0<\frac{ds_1}{ds'}<1,\quad \frac{d^2s_1}{ds'^2}<0.$$

(当 τ_2 由 0 增加到 $+\infty$ 或 s' 由 0 增加到 $+\infty$ 时，$\frac{ds_1}{ds'}$ 由 1 单调减小到 0)．图 387 上表示出变换 Π_2 的这一对应函数的图象．

3. 拉梅尔图． 在图 388 上，画出了拉梅尔图——画在一个平面上的变换 Π_1 和 Π_2 的对应函数图象（横轴为 s'，纵轴为 s_1 和 s）．这两个曲线具有唯一的交点——变换 Π' 的不动点．不动点的存在是由对应函数的连续性以及下列不等式所决定的，即：$s'=s'_0$ 时，$s_1-s>0$ 和 s' 足够大时，$s_1-s<0$． 而不动点的唯一性是由于：对于任意 $s'\geqslant s'_0$，都满足不等式 $0<\frac{ds_1}{ds'}<1<\frac{ds}{ds'}$．特例地，此不等式对于不动点也必然满足，因而不动点必定是稳定的．

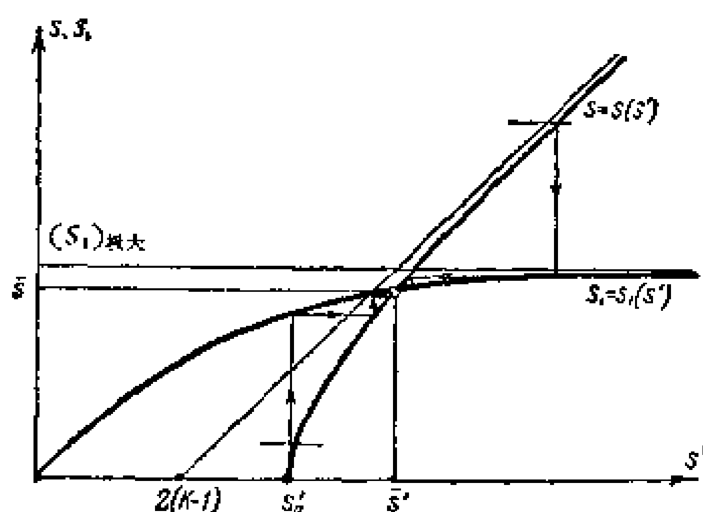


图 388

变换 Π' 的不动点还可以用解析方法由下列超越方程组求得，$4\mu>(K-1)^2$ 时，它们是：

$$\left.\begin{aligned}\frac{K-1}{2}\frac{e^{-\gamma_1\tau_1}+\cos\tau_1-\gamma_1\sin\tau_1}{\gamma_1\sin\tau_1}&=\frac{e^{-\gamma_2\tau_2}-\operatorname{ch}\tau_2+\gamma_2\operatorname{sh}\tau_2}{2\gamma_2\sin\tau_2},\\ \frac{K-1}{2}\frac{e^{\gamma_1\tau_1}+\cos\tau_1-\gamma_1\sin\tau_1}{\gamma_1\sin\tau_1}&=\frac{e^{\gamma_2\tau_2}-\operatorname{ch}\tau_2-\gamma_2\operatorname{sh}\tau_2}{2\gamma_2\operatorname{sh}\tau_2},\end{aligned}\right\}\quad(8.40)$$

而 $4\mu<(K-1)^2$ 时，它们是：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{K-1}{2}\,\frac{e^{-\gamma_1\tau_1}+\mathrm{ch}\tau_1-\gamma_1\mathrm{sh}\tau_1}{\gamma_1\mathrm{sh}\tau_1}&=\frac{e^{-\gamma_2\tau_2}-\mathrm{ch}\tau_2+\gamma_2\mathrm{sh}\tau_2}{2\gamma_2\mathrm{sh}\tau_2},\\
\frac{K-1}{2}\,\frac{e^{\gamma_1\tau_1}+\mathrm{ch}\tau_1+\gamma_1\mathrm{sh}\tau_1}{\gamma_1\mathrm{sh}\tau_1}&=\frac{e^{\gamma_2\tau_2}-\mathrm{ch}\tau_2-\gamma_2\mathrm{sh}\tau_2}{2\gamma_2\mathrm{sh}\tau_2}.
\end{aligned}\right\}\quad(8.40\mathrm{a})
$$

结论是，半直线 S 对半直线 S_1 的点变换 Π' 具有唯一的、而且是稳定的不动点($s=s_1=\bar{s}$, $s'=\bar{s}'$)。与此相对应，在相平面上也存在有唯一的(对称且稳定的)极限环，所有相轨线当 $t\to+\infty$ 时都向它趋近(图 389)，——$K>1$ 时，对于任意初始条件都能建立起自振[1]。

自振周期显然等于

$$
\tau=2\left(\frac{\bar{\tau}_1}{\omega_1}+\frac{\bar{\tau}_2}{\omega_2}\right)
$$

(采用无量纲时间单位)，或

$$
T=2[R_a(C+C_1)+R_gC]\left(\frac{\bar{\tau}_1}{\omega_1}+\frac{\bar{\tau}_2}{\omega_2}\right)
$$

(采用普通单位)，其中 $\bar{\tau}_1$ 及 $\bar{\tau}_2$ ($0<\bar{\tau}_1<\tau_1^0$, $0<\bar{\tau}_2<+\infty$)为对

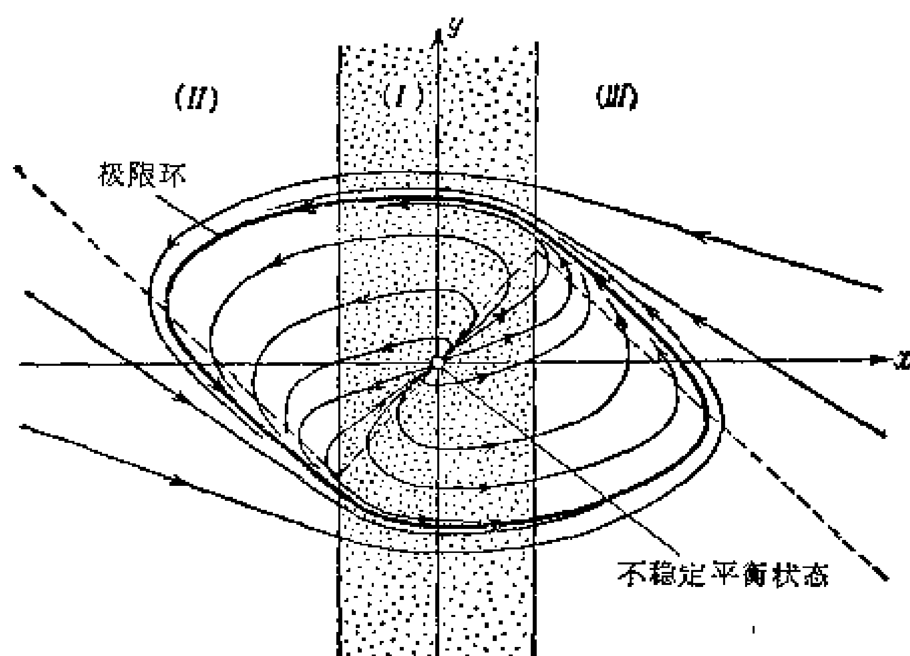


图 389

1) 在图 389 上表示出当 $K>1+2\sqrt{\mu}$，即平衡状态为不稳结点时，相平面的轨线划分。

应于不动点的 τ_1 和 τ_2 值，$4\mu>(K-1)^2$ 时，它们由方程组(8.40)，而 $4\mu<(K-1)^2$ 时由方程组(8.40a)确定。

我们立即就可以指出一个极限情况。如果 $K\to 1$(但 $K>1$)，则极限环必趋向圆 $x^2+y^2=1$，因为此时 $\bar{\tau}_1\to\pi$ 和 $\bar{\tau}_2\to 0$，而自振则必然趋向正弦振动，其周期为 $2\pi[R_a(C+C_1)+R_g(C+C_g)]$。

4. 不连续振动. 现在我们来研究另一个颇有兴趣的极限情况：

$$\mu\ll 1,\quad \mu\ll\frac{1}{4}(K-1)^2$$

——具有一个 RC 回路的多谐振荡器的情况（小的寄生电容 C_a，$C_g\ll C$）。在这种条件下，电路中的自振具有不连续性质。在第十章我们将会看到，在描述不连续振动的方程中，高阶导数项的系数很小，而系统(8.30)中当 μ 很小时，就成为此类系统的实例(相当简单，但很典型)。

为了找出 μ 充分小时系统(8.30)的相平面的轨线划分，我们写出积分曲线的方程：

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\mu x}{x+y+K\varphi(x)},\tag{8.41}$$

并在 x，y 平面上画出铅垂切线等倾线——曲线 F：

$$y=-x-K\varphi(x)\tag{8.42}$$

（在这条曲线上 $\dot{x}=0, \frac{dy}{dx}=\infty$）。

由方程(8.30)和(8.41)可以看出，当 μ 足够小 $(\mu\to+0)$ 时，$|\dot{x}|$ 迅速地增加，而 $\left|\frac{dy}{dx}\right|$ 则随着与等倾线 F 距离的增大而迅速减小：在距离 F 为 μ 阶小量的 (x,y) 点处，$\dot{x}$ 和 $\frac{dy}{dx}=O(1)$，而当距离 F 为 $\sqrt{\mu}$ 阶小量时，已经有 $\dot{x}=O(\mu^{-1/2})$ 和 $\frac{dy}{dx}=O(\mu^{1/2})$，即

当 $\mu\to+0$ 时 $\dot{x}\to\infty$，而 $\frac{dy}{dx}\to 0$[1]．因此，当 μ 足够小时，在曲线 F 的 $\sqrt{\mu}$ 邻域以外，相轨线无限地逼近于水平线 $y=$ 常数(这里当 $\mu\to+0$ 时，$\frac{dy}{dx}\to 0$，其逼近速度最低限度与 $\sqrt{\mu}$ 相同)，而相点沿此轨线运动时，可取任意大的速度($\dot{x}\to\infty$，与 $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ 相同或者更快)[2]．同时，在等倾线下方(这里，$-x-y-K\varphi(x)>0$ 且 $\dot{x}=\frac{-x-y-K\varphi(x)}{\mu}\to+\infty$) 相点向右运动，在上方则向左运动(图 390)．系统的这种有任意大速度的跳跃式运动的轨线(极限时为瞬时跳跃)，由无穷远点和等倾线 F 的 CA 线段上出发，走向半直线 F_1^+ 和 F_2^+，这些半直线是等倾线 F 的位于区域(II)和(III)内的部分．在半直线 F_1^+ 和 F_2^+ 的 μ 邻域内，当 $\mu\to 0$ 时，$\dot{x}$ 为有

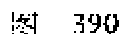


图 390

1) 在这里和以后我们用 $O[f(\mu)]$ 表示一种函数，这种函数的性质当 μ 很小时与 $f(\mu)$ 相同；$g(x,y,\mu)=O[f(\mu)]$ 的这种写法表示 $\mu\to+0$ 时，比值 $\frac{g(x,y,\mu)}{f(\mu)}$ 趋向一个有限极限(一般来说，与 x,y 有关)．

2) 所谓某一曲线的 ε 邻域，与以前一样，我们是指与此曲线的距离不超过 ε 的那些点的集合．显然，曲线 F 的 $\sqrt{\mu}$ 邻域当 $\mu\to 0$ 时就向曲线 F 收缩．

限值，这就是说，在这些邻域内存在有“缓慢”的运动($\mu \to +0$ 时，运动的相速度永远有界[1])的相轨线. 相点的缓慢运动在 A 和 C 的 $\sqrt{\mu}$ 邻域内转变为具有任意大速度的非常大的跳跃式的运动.

这说明，当 μ 足够小时，系统(8.30)之相点的运动是由两种相互交替的运动组成的：其一为沿着与水平直线 $y=$ 常数无限逼近的轨线，以任意大速度所做的跳跃式的运动；其二为沿着位于半直线 F_1^+ 及 F_2^+ 的 μ 邻域内的轨线的“缓慢”运动. 在图 390 上表示出相平面的**极限**($\mu \to +0$ 时)轨线划分：跳跃式(瞬时跳跃)运动的轨线为直线 $y=$ 常数，“缓慢”运动的轨线为半直线 F_1^+ 和 F_2^+. 极限环为闭曲线 $ABCDA$[2].

下面我们来严格证明，曲线 $ABCDA$ 确实是系统(8.30)的极限环当 $\mu \to +0$ 时的极限位置. 证明的方法是：在相平面上造出一个区域(ε)，在此区域内部(或在它的边界上)包含曲线 $ABCDA$，并当 $\mu \to +0$ 时，此区域收缩为这条曲线，而且轨线**不可能**从这一区域内**穿出**(t 增大时). 为此，在相平面上(图 391)画出等倾线 $\dot{x}=0$ (y 轴)，$\dot{x}=\infty$ (曲线 F，参看图 390)，等倾线 $\dot{x}=-\sqrt{\mu}$

---

1) 我们曾设 $\dot{y}=x$，因此 $\mu \to +0$ 时无论在曲线 F 邻域的内部和外部，它都将是有限值.

2) 当 μ 充分小时，所研究之系统的近似(渐近)运动方程可写成如下形式：沿轨线 $y=y_0=$ 常数(但在曲线 F 的某一邻域外部)做跳跃式运动时，为

$$\mu\dot{x} = -x - y_0 - K\varphi(x), \tag{A}$$

作“缓慢”运动(在 F_1^+ 及 F_2^+ 的近区)时，为

$$\left.\begin{aligned}\dot{y} &= x\\ y &= -x - K\varphi(x)\end{aligned}\right\} \text{ 或 } \dot{x}[1+K\varphi'(x)] + x = 0. \tag{B}$$

方程(B)我们曾在第四章 §7 中研究多谐振荡器时应用过. 在那里曾用跳跃假设代替对高速(C_a, $C_g \ll C$ 时)过程的动力学研究. 这一假设(系统由 $|x|\leqslant 1$ 状态瞬时地“跳到” $|x|>1$ 的状态，而且在跳跃时 y，即电容 C 上的电压，保持不变)现在我们是作为**动力学方程**(8.30)当 $\mu \to +0$ 时的**推论**得出来的.

在 BC 和 DA 线段上，将“缓慢”运动的方程 $\dot{x}+x=0$ (参看第四章 §7)积分之，我们就得出自振周期的极限表达式：$\lim\limits_{\mu\to+0}\tau = 2\ln(2K-1)$，因为对于周期运动来说，当 $\mu \to +0$ 时，相点的穿越时间：在区域(I)内 $t_1 \to +0$，在区域(II)内 $t_2 \to \ln(2K-1)$.

和 $x=+\sqrt{\mu}$[1]). 同时画出闭曲线 P 和 Q，这两条曲线关于原点对称，并以如下方式由直线线段组成。

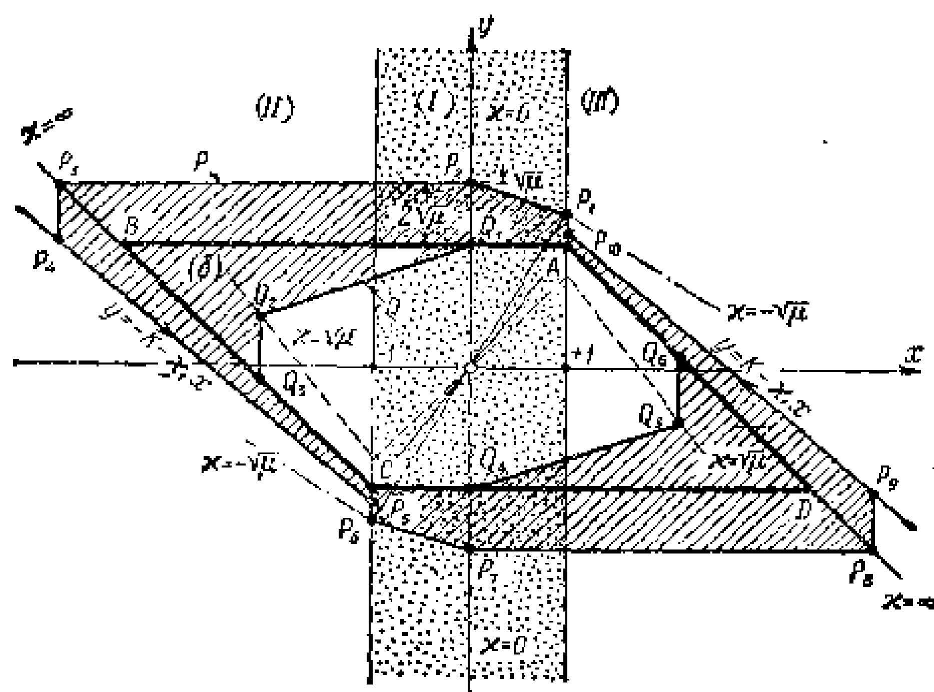


图 391

作第一个闭折环线 P（环线 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9P_{10}P_1$）时，先由等倾线 $x=-\sqrt{\mu}$ 同直线 $x=+1$ 的交点 $P_1(1,K-1+\sqrt{\mu})$ 开始。线段 P_1P_2 联结 P_1 和 $P_2(0,K-1+2\sqrt{\mu})$ 两点，其斜率等于 $-\sqrt{\mu}$。其次画出水平线段 P_2P_3，画到与等倾线 $x=\infty$ 相交为止。然后画出垂直线段 P_3P_4，画到与系统(8.30)在区域(II)的直线轨线：

$$y=-K-x_1x,$$

其中

$$x_1=\frac{1+\sqrt{1-4\mu}}{2}=1+O(\mu);$$

1) 根据(8.41)，等倾线 $\frac{dy}{dx}=x$ 将为

$$x=-\frac{\mu x}{x+y+K\varphi(x)} \quad 或 \quad y=-\left(1+\frac{\mu}{x}\right)x-K\varphi(x),$$

因此，等倾线 $x=\pm\sqrt{\mu}$ 将是折线

$$y=-(1\pm\sqrt{\mu})x-K\varphi(x).$$

相交为止；P_4P_5 为这一轨线的线段．最后，P_5P_6 为直线 $x=-1$ 的线段，且 P_6 点$(-1, -K+1-\sqrt{\mu})$与 P_1 点对称，并位于 P_5 点$(-1, -K-x_1)$的下方．环线 P 的另一半与刚才所画的折线对称．

环线 Q 的左半部由以下四个线段组成：水平直线 $y=K-1$ 的线段 AQ_1(Q_1 位于纵座标轴上)，斜率为$+\sqrt{\mu}$的线段 Q_1Q_2(Q_2 位于等倾线 $x=+\sqrt{\mu}$ 上)，由 Q_2 画到与等倾线 $x=\infty$ 相交的铅垂线段 Q_2Q_3，以及等倾线 $x=\infty$ 的线段 Q_3C．环线 Q 的右半部(折线 $CQ_4Q_5Q_6A$)与左半部对称．

下面我们证明，位于环线 P 和 Q 之间的区域(ε)(在图 391 上这一区域上画有斜线)，满足上面提出的一切条件．第一，这一区域内(或在它的边界上)包含曲线 $ABCDA$，并当 $\mu\to+0$ 时，收缩为这条曲线，这是因为曲线 P 和 Q（区域(ε)的边界）与曲线 $ABCDA$ 的距离分别不超过 $2\sqrt{\mu}$ 和 $(2K-1)\sqrt{\mu}$，因此 $\mu\to+0$ 时，必趋于 0．第二，轨线不可能穿出区域(ε)（t 增加时)，这是因为在它的边界上，轨线或与它相切，或与它相交后穿入区域(ε)．

讨论一下系统(8.30)的轨线在折线 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 和 $AQ_1Q_2Q_3C$ 上的走向，就足以证明后一个论断．在等倾线 $x=-\sqrt{\mu}$ 和 $x=0$ 之间且位于等倾线 F 上方的线段 P_1P_2 上，我们有：$-\sqrt{\mu}\leqslant\frac{dy}{dx}\leqslant 0$ 和 $\dot{x}<0$；在这里，轨线的坡度比线段本身的坡度小，且相点向左移动，因而进入区域(ε)(P_1 点例外，在 P_1 点上轨线与线段 P_1P_2 相切)． 在线段 P_2P_3 上，$\dot{y}=x<0$（轨线向下运动）；在 P_3P_4 和 P_5P_6 上，$\dot{x}>0$，这是因为它们位于曲线 F 的下方(轨线向右运动)．线段 P_4P_5 本身就是轨线，因此不可能同其他轨线相交．这样一来，在环线 P 的左半部 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 上，系统(8.30)的轨线或者与环线相切，或者与它相交后进入区域(ε)．这一结论，对于轨线在环回线 P 右半部上的走向，也是正确的(基于轨线的对称性)．

与此相类似，在 AQ_1 上：$\dot{y}=x\geqslant 0$，在等倾线 $x=0$ 和 $x=+\sqrt{\mu}$之间的线段 Q_1Q_2 上：有 $0\leqslant\frac{dy}{dx}\leqslant+\sqrt{\mu}$和 $\dot{x}<0$，在

Q_2Q_3 上：$\dot{x} \leqslant 0$，以及在 Q_3C 上：$\dot{y} < 0$. 由此可以得出结论：轨线只能进入区域(ε)，并通过它的内边界 Q(我们只对环线 Q 的左半部 $AQ_1Q_2Q_3C$ 证明了这一结论，但由于轨线的对称性，这一结论也适合于环线 Q 的右半部 $CQ_4Q_5Q_6A$).

我们证明了：系统 (8.39) 的轨线在区域(ε) 的边界——环线 P 和 Q——上，或者相切，或者与它们相交后进入区域(ε). 由于这一区域不含有平衡状态，因而，根据二阶微分方程定性理论中的相应定理(参看上册第四章 § 2 定理 V)，其中必存在有稳定极限环. 从而我们就证实了，系统 (8.30) 的唯一的稳定极限环位于我们所作出的区域 (ε) 内，因此，这个极限环当 $\mu \to +0$ 时必趋向 $ABCDA$[1].

5. 当 μ 很小时自振的周期. 以前(参看第四章 § 7) 曾计算出不连续自振周期的渐近公式

$$\tau = 2\ln(2K-1), \tag{8.43}$$

当 μ 不很小时，用以寻求多谐振荡器的自振周期的这个公式，会给出相当大的误差. 例如，当 $\mu = 0.05$ 和 $K = 2$ 时，即自振与不连续振动极其接近时[2]，公式 (8.43) 的误差大约为 20%. 因此，在 μ 很小的情况下(即 C_a, $C_g \ll C$) 寻求多谐振荡器的自振周期的渐近表示式时，最好不从相平面的轨线划分的极限结构 ($\mu \to +0$ 时)出发(图 390)，而利用变换 Π_1 和 Π_2 的对应函数(8.36)，(8.39) 以及方程(8.40a)，来精确地确定出 μ 很小时变换 Π' 的不动点和极限环[3].

对于这一目的来说，对应函数 (8.36)，(8.39) 以及方程组

---

1) 这一结论也可以用另外方法表述，即：系统(8.30)的极限环位于曲线 $ABCDA$ 的 δ 邻域内，其中 $\delta = O(\mu)$. 例如，设 δ 为 $2\sqrt{\mu}$ 和 $(2K-1)\sqrt{\mu}$ 中最大者，那么曲线 $ABCDA$ 的 δ 邻域中必含有区域(ε)，因而就必然含有极限环.

2) 当 $\mu = 0.05$ 和 $K = 2$ 时，多谐振荡器的自振由 x 的"缓变"的(速度 $\dot{x}$ 的量级为 1) 和"迅速"的、跳跃式的(速度 $\dot{x}$ 的量级为 $\frac{1}{\mu} = 20$)运动相互交替组成.

3) 还可以参看 [114, 52, 93, 158, 159]，其中对几种二阶微分方程之周期解的周期，得到了渐近展开式. 例如在[114]内，讨论了与 $K = 2$ 时的方程组(8.36)相等价的方程.

(8.40a) 的形式都不够方便．因此，我们在 (8.36) 和 (8.39) 中将 $\tau_1=\omega_1 t_1$，$\tau_2=\omega_2 t_2$ 直接转换为 t_1 和 t_2——相点在区域(I)和(II)中的穿越时间．方程(8.32)的特征方程的根(对于区域(I))以 λ_1 和 λ_1' 表示：

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1&=h_1-\omega_1=\frac{K-1-\sqrt{(K-1)^2-4\mu}}{2\mu}\\&=\frac{1}{K-1}+\frac{\mu}{(K-1)^3}+2\frac{\mu^2}{(K-1)^5}+\cdots,\\\lambda_1'&=h_1+\omega_1=\frac{K-1+\sqrt{(K-1)^2-4\mu}}{2\mu}\\&=\frac{K-1}{\mu}-\frac{1}{K-1}-\frac{\mu}{(K-1)^3}-2\frac{\mu^2}{(K-1)^5}+\cdots,\end{aligned}\right\}\tag{8.44}$$

将特征方程(8.31)(对于区域(II))的根的绝对值以 λ_2 和 λ_2' 表示：

$$\left.\begin{aligned}\lambda_2&=h_2-\omega_2=\frac{1-\sqrt{1-4\mu}}{2\mu}=1+\mu+2\mu^2+\cdots,\\\lambda_2'&=h_2+\omega_2=\frac{1+\sqrt{1-4\mu}}{2\mu}=\frac{1}{\mu}-1-\mu-2\mu^2-\cdots.\end{aligned}\right\}\tag{8.44a}$$

将 $\tau_1=\omega_1 t_1$ 代入 s 的表示式(8.36)，并把此表示式的分子和分母都乘以 $e^{h_1 t_1}$：

$$s=\frac{K-1}{2}\,\frac{\omega_1}{h_1}\,\frac{1+\frac{1}{2}[e^{\lambda_1' t_1}+e^{\lambda_1 t_1}]-\frac{1}{2}\frac{h_1}{\omega_1}[e^{\lambda_1' t_1}-e^{\lambda_1 t_1}]}{\frac{1}{2}[e^{\lambda_1' t_1}-e^{\lambda_1 t_1}]}.$$

考虑到 $\frac{K-1}{2h_1}=\mu$，$h_1=\frac{1}{2}(\lambda_1'+\lambda_1)$，$\omega_1=\frac{1}{2}(\lambda_1'-\lambda_1)$ 我们就得到变换 Π_1 之对应函数的参数表示式如下：

$$\left.\begin{aligned}s&=\mu\frac{\lambda_1'[1+e^{\lambda_1 t_1}]-\lambda_1[1+e^{\lambda_1' t_1}]}{e^{\lambda_1' t_1}-e^{\lambda_1 t_1}},\\s'&=\mu\frac{\lambda_1'[1+e^{-\lambda_1 t_1}]-\lambda_1[1+e^{-\lambda_1' t_1}]}{e^{-\lambda_1 t_1}-e^{-\lambda_1' t_1}}.\end{aligned}\right\}\tag{8.45}$$

(为了求得 s'，可将 s 的表示式改变符号，并以 $-t_1$ 代换 t_1；参看

535 页下注)．用同样的方法，在(8.38)中将 τ_2 以 $\omega_2 t_2$ 代换，并应用关系式：

$$\gamma_2\omega_2 = h_2,\ \frac{1}{2h_2} = \mu,\ h_2 + \omega_2 = \lambda_2',\ h_2 - \omega_2 = \lambda_2,$$

$$h_2 = \frac{1}{2}(\lambda_2' + \lambda_2)\ \text{和}\ \omega_2 = \frac{1}{2}(\lambda_2' - \lambda_2),$$

便得到变换 Π_2:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \mu\,\frac{\lambda_2[e^{\lambda_2' t_2} - 1] - \lambda_2'[e^{\lambda_2 t_2} - 1]}{e^{\lambda_2' t_2} - e^{\lambda_2 t_2}},\\ s' &= \mu\,\frac{\lambda_2'[1 - e^{-\lambda_2 t_2}] - \lambda_2[1 - e^{-\lambda_2' t_2}]}{e^{-\lambda_2 t_2} - e^{-\lambda_2' t_2}}. \end{aligned}\right\} \tag{8.46}$$

从变换 Π_1 和 Π_2 之对应函数的这些表示式，考虑到根 λ_1, λ_2 和 λ_1', λ_2' 的量阶的不同，即 $\lambda_1, \lambda_2 = O(1)$而 $\lambda_1', \lambda_2' = O\left(\frac{1}{\mu}\right)$，就不难得到对应函数的渐近展开式，还可以求出 μ 很小时的自振周期．

很明显，当相点沿某一条与半直线 S 相交的轨线（例如极限环)运动时，若 $\mu \to +0$，则区域(I)内的穿越时间 $t_1 \to +0$，在区域(II)内 t_2 将趋向于有限极限($t_2 = O(1)$)[1]．但此时必有 $e^{-\lambda_2 t} = O(1)$，而 $e^{-\lambda_2' t_2} = O(e^{-\frac{1}{\mu}})$，即以高于 μ 的任何次幂之速度趋向于零($\mu \to +0$ 时)．因此(准确到 $e^{-\frac{1}{\mu}}$ 阶项)变换 Π_2 的对应函数可写成如下形式[2]：

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \mu\lambda_2 + O(e^{-\frac{1}{\mu}}),\\ s' &= \mu[(\lambda_2' - \lambda_2)e^{\lambda_2 t_2} - \lambda_2'] + O(e^{-\frac{1}{\mu}}). \end{aligned}\right\} \tag{8.46a}$$

---

1) 在区域(I)内，当 $\mu \to +0$ 时，相点的横坐标 x 以速度 $\dot{x} \to -\infty$ 由 $+1$ 变到 -1；因此，当 $\mu \to +0$ 时 $t_1 \to +0$；可以说，对于有限的 $0 < s < M$ 必有 $O(\mu) < t_1 < O\left(\mu \ln \frac{1}{\mu}\right)$．在区域(II)内，相点的纵坐标 y 的变化量为有限值；从 $y' = -(K-1) + s' > K - 1$（因为 $s' > 2(K-1)$）变化到 $y_1 = -(K-1) - s_1 < -(K-1)$，其变化速度 $y = \dot{x}$ 为有限值；由此可得 $t_2 = O(1)$．

2) 对于任意的 s'，只要它大于任意小的固定值($s' > a$)，渐近式(8.46a)都是成立的．(8.46a)的第一关系式告诉我们，在点 $s' = 0$ 的某一固定邻域外部与半直线 S' 相交的所有轨线，例如所有离开区域(III)的轨线，包括极限环在内，都在区域(II)中进入直线轨线 $y = -K - x_1 x$ 的微小($e^{-1/\mu}$ 阶)邻域内．

以同样的准确度可算出极限环：

$$\bar{s}=\bar{s}_1=\mu\lambda_2+O(e^{-\frac{1}{\mu}}). \tag{8.46b}$$

把(8.46b)代入(8.45)的第一个关系式，我们将得出确定 $\bar{t}_1$(相点沿极限环运动时通过区域(I)所需之穿越时间)的方程：

$$[\lambda_2+\lambda_1+O(e^{-\frac{1}{\mu}})]e^{\lambda_1'\bar{t}_1}=(\lambda_1'+\lambda_2)e^{\lambda_1\bar{t}_1}+\lambda_1'-\lambda_1. \tag{8.47}$$

此方程可用逐次逼近法求解，其中应考虑 λ_1 和 λ_1' 不同阶这一性质。我们先来估计一下 $\bar{t}_1$ 的量阶；由于 $\mu\to 0$ 时 $e^{\lambda_1\bar{t}_1}\to 1$，因而为了使(8.47)成立，$e^{\lambda_1'\bar{t}_1}$ 必需与 λ_1' 同阶，即 $e^{\lambda_1'\bar{t}_1}=O\left(\frac{1}{\mu}\right)$，$\lambda_1'\bar{t}_1=O\left(\ln\frac{1}{\mu}\right)$ 和 $\bar{t}_1=O\left(\mu\ln\frac{1}{\mu}\right)$[1]。将 $e^{\lambda_1\bar{t}_1}=1+O(\lambda_1\bar{t}_1)=1+O\left(\mu\ln\frac{1}{\mu}\right)$ 代入(8.47)：

$$e^{\lambda_1'\bar{t}_1}=\frac{2\lambda_1'+\lambda_2-\lambda_1+\lambda_1'O\left(\mu\ln\frac{1}{\mu}\right)}{\lambda_2+\lambda_1}$$

$$=\frac{2(K-1)^2}{\mu K}\left[1+O\left(\mu\ln\frac{1}{\mu}\right)\right],$$

由此可得

$$\lambda_1'\bar{t}_1=\ln\frac{1}{\mu}+\ln\frac{2(K-1)^2}{K}+\ln\left[1+O\left(\mu\ln\frac{1}{\mu}\right)\right],$$

或，由于

$$\ln\left[1+O\left(\mu\ln\frac{1}{\mu}\right)\right]=O\left(\mu\ln\frac{1}{\mu}\right)$$

和

$$\frac{1}{\lambda_1'}=\mu\lambda_1=\frac{\mu}{K-1}+O(\mu^2),$$

---

1) 这样一来，当 $\mu\to+0$ 时 $\bar{t}_1\to+0$，但趋近的速度比 μ 慢，比 μ^β 快($0<\beta<1$)，因为对于任意 $0<\beta<1$ 和足够小的 μ，都有 $O(\mu)<O\left(\mu\ln\frac{1}{\mu}\right)<O(\mu^\beta)$。$\bar{t}_1$ 所以具有这样的量阶，是因为区域(I)内的极限环首先进入等倾线 F 上的点 $A(1,K-1)$ 的邻域(μ 阶)，该处 $|\dot{x}|<O(1)$。对于在离 A 点一有限距离处与半直线 S 相交的轨线，有 $t_1=O(\mu)$。

$$\bar{t}_1 = \frac{\mu}{K-1}\ln\frac{1}{\mu} + \frac{\mu}{K-1}\ln\frac{2(K-1)^2}{K} + O\left(\mu^2\ln\frac{1}{\mu}\right)^{1)}. \quad (8.48)$$

下面我们利用(8.45)的第二关系式求出 $\bar{s}'$(极限环与半直线 S' 交点的坐标)的渐近表示式，以便根据(8.46a)再求出 $\bar{t}_2$ 和自振的周期. 根据(8.48)我们有:

$$e^{-\lambda_1'\bar{t}_1} = \frac{\mu K}{(K-1)^2} + O\left(\mu^2\ln\frac{1}{\mu}\right),$$

$$\lambda_1\bar{t}_1 = \frac{\mu}{(K-1)^2}\ln\frac{1}{\mu} + \frac{\mu}{(K-1)^2}\ln\frac{2(K-1)^2}{K} + O\left(\mu^2\ln\frac{1}{\mu}\right)$$

和

$$e^{\lambda_1\bar{t}_1} = 1 + \lambda_1\bar{t}_1 + O(\lambda_1^2\bar{t}_1^2) = 1 + \frac{\mu}{(K-1)^2}\ln\frac{1}{\mu}$$
$$+ \frac{\mu}{(K-1)^2}\ln\frac{2(K-1)^2}{K} + O\left(\mu^2\ln^2\frac{1}{\mu}\right).$$

因此,根据(8.45)的第二个方程,并把它改写成如下形式:

$$s' = \frac{(\mu\lambda_1' - \mu\lambda_1)e^{\lambda_1 t_1} + \mu\lambda_1' - \mu\lambda_1 e^{\lambda_1 t_1}e^{-\lambda_1' t_1}}{1 - e^{\lambda_1 t_1}\cdot e^{-\lambda_2' t_1}},$$

我们将得到:

$$\bar{s}' = \left[1 + \frac{\mu K}{2(K-1)^2}\right]\left\{\left(K-1-\frac{2\mu}{K-1}\right)e^{\lambda_1\bar{t}_1} + K - 1 - \frac{\mu}{K-1}\right\}$$
$$+ O(\mu^2) = 2(K-1) + \frac{\mu}{K-1}\ln\frac{1}{\mu}$$
$$+ \frac{\mu}{K-1}\left[K - 3 + \ln\frac{2(K-1)^2}{K}\right] + O\left(\mu^2\ln^2\frac{1}{\mu}\right)^{2)}.$$

---

1) 将得到的渐近表示式(8.48)代入方程(8.47)右端,我们将得出 $\bar{t}_1$ 的下一次近似(准确到 $\mu^3\ln\frac{1}{\mu}$ 阶项). 用这种逐次逼近法,可以求得 $\bar{t}_1$ 的准确到 $O\left(\mu^n\ln\frac{1}{\mu}\right)$ 的渐近展开式,其中 n 为任意正整数. 但这一展开式是不收敛的.

2) 分子的误差等于 $O\left(\mu^2\ln\frac{1}{\mu}\right)$; 因此,我们以准确度 $O(\mu^2)$ 取 $\mu\lambda_1'$ 和 $\mu\lambda_1$ 的表示式,便有 $\frac{1}{1-e^{\lambda_1\bar{t}_1}\cdot e^{-\lambda_1'\bar{t}_1}} = 1 + \frac{\mu K}{2(K-1)^2} + O\left(\mu^2\ln\frac{1}{\mu}\right)$,而把 $\mu\lambda_1 e^{\lambda_1\bar{t}_1}e^{-\lambda\bar{t}_1} = O\left(\mu^2\ln\frac{1}{\mu}\right)$ 归入余项之内.

由得出的 $\bar{s}'$ 的渐近表示式, 可以看出,极限环上横坐标为 $x = -1$ 的点,与曲线 $ABCDA$ 之间的距离为与 $\mu\ln\frac{1}{\mu}$ 同阶的量.

此时，利用(8.46a)的第二方程，可以得出：

$$e^{\lambda_2 \bar{t}_2} = \frac{\bar{s}' + \mu\lambda_2'}{\mu\lambda_2' - \mu\lambda_2} = (1 + 2\mu)(\bar{s}' + 1 - \mu)$$

$$+ O(\mu^2) = (2K - 1)\left\{1 + \frac{\mu \ln \frac{1}{\mu}}{(K-1)(2K-1)}\right.$$

$$+ \mu \left[\frac{2K(2K-3)}{(K-1)(2K-1)} + \frac{\ln \frac{2(K-1)^2}{K}}{(K-1)(2K-1)}\right]$$

$$\left. + O\left(\mu^2 \ln^2 \frac{1}{\mu}\right)\right\}^{1)},$$

$$\lambda_2 \bar{t}_2 = \ln(2K - 1) + \frac{\mu \ln \frac{1}{\mu}}{(K-1)(2K-1)}$$

$$+ \mu \frac{2K(2K-3) + \ln \frac{2(K-1)^2}{K}}{(K-1)(2K-1)} + O\left(\mu^2 \ln^2 \frac{1}{\mu}\right)^{2)}$$

最后，

$$\bar{t}_2 = \frac{1}{\lambda_2}(\lambda_2 \bar{t}_2) = (1 - \mu)\lambda_2 \bar{t}_2 + O(\mu^2)$$

或

$$\bar{t}_2 = \ln(2K - 1) + \frac{\mu \ln \frac{1}{\mu}}{(K-1)(2K-1)}$$

$$+ \mu \left[\frac{2K(2K-3)}{(K-1)(2K-1)} + \frac{\ln \frac{2(K-1)^2}{K}}{(K-1)(2K-1)}\right.$$

---

1) 所有项都准确到 $O\left(\mu^2 \ln \frac{1}{\mu}\right)$。例如，

$$\mu\lambda_2' = 1 - \mu + O(\mu^2) \text{ 和 } \frac{1}{\mu\lambda_2' - \mu\lambda_2} = 1 + 2\mu + O(\mu^2).$$

2) 这里应用如下展开比较方便：

$$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3).$$

$$-\ln(2K-1)\Big]+O\left(\mu^2\ln^2\frac{1}{\mu}\right). \tag{8.49}$$

与(8.48)相加后可以得出多谐振荡器自振周期(即μ很小时，(8.39)之周期解的周期)的渐近表示式:

$$\tau=2(\bar{t}_1+\bar{t}_2)=2\ln(2K-1)+\frac{4K}{(K-1)(2K-1)}\mu\ln\frac{1}{\mu}$$

$$+\left[-\frac{4K(2K-3)}{(K-1)(2K-1)}+\frac{4K\ln\frac{2(K-1)^2}{K}}{(K-1)(2K-1)}\right.$$

$$\left.-2\ln(2K-1)\right]\mu+O\left(\mu^2\ln\frac{1}{\mu}\right). \tag{8.50}$$

正象所预期的那样，这一展开式的高次项恰好与多谐振荡器周期的极限($\mu\to+0$时)表示式(8.43)相重合.

§6. 双位式自动操舵仪

在这一节里，我们研究船上装有最简单的所谓双位式航向稳定系统——双位式自动操舵仪时，船的动力学问题.

1. 问题的提出. 设φ为船对给定航向的偏角(图392). 忽略转弯时船的侧滑不计，并考虑到舵机所产生的力矩$M=M(\psi)$，以及阻尼力矩$H\frac{d\varphi}{dt}$(H为粘性摩擦系数)，我们来建立船绕通过重心之铅垂轴的简化的转动方程. 若I为船绕铅垂主轴的惯性矩，则船的转动方程为:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2}+H\frac{d\varphi}{dt}=M. \tag{8.51}$$

船本身是不具有航向稳定性的. 因为当$M=0$(舵位于径向平面，即位于船的对称面内，$\psi=0$)时，船将趋向某一恒定航向$\varphi=$常数，但后者与初始条件有关，因此可以是任意的. 为了形象地说明上述论断，在图393上表示出了当舵位于径向平面内时船的相面(相柱面的展开图): 相轨线构成一直线族，相点沿着这

些直线趋向($t\to+0$ 时)布满整个 φ 轴的平衡状态.

使船在给定航向上具有稳定性的只能是舵手，只能是舵的相应的转动. 用相面的轨线划分的术语来说,舵手(是人或者是舵向自动稳定系统——自动操舵仪,都一样)的任务在于建立一个稳定的平衡状态(这相当于给定航向,即 $\varphi=0$) 来代替平衡状态的连续统.

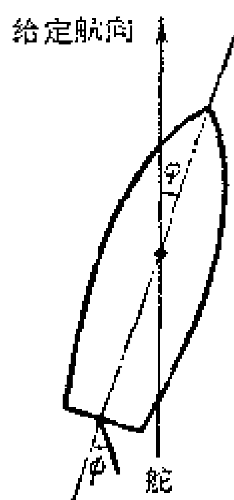


图 392

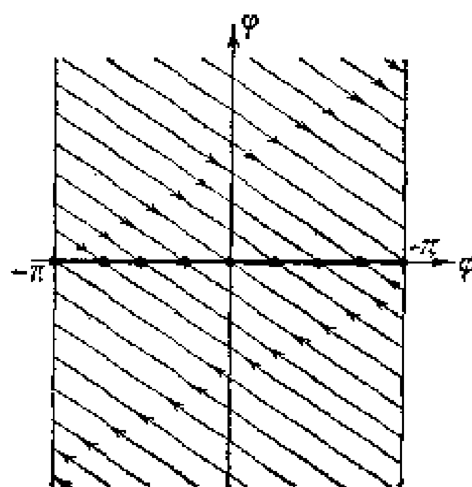


图 393

航向自动稳定系统中最简单的一种就是所谓双位式自动操舵仪,其中,舵一般只能占据两个位置 $\psi=\pm\psi_0$,在其中每一个位置上舵所产生的力矩 M 大小相等($=M_0$)而方向相反. 在这里，不准备研究自动操舵仪本身的动力学，我们只假定舵的位置以一定的规律与船的运动状态相联系($M=\pm M_0$,并为 φ 和 $\frac{d\varphi}{dt}$ 的函数). 如果舵仅在船转过给定航向 ($\varphi=0$) 时由一侧移到另一侧,那么我们将得到最简单的双位航向调节. 同时我们还假定舵的换位是瞬时完成的. 以后我们将会看到,这种自动装置,如果满足某些要求,确实能稳定船的航向[1]. 然而,很自然,甚至根据操纵普通船的经验，我们就会想到，如果舵的换位不是发生在船通过给定航向

1) 例如,很明显,为了使自动操舵仪能正确工作,当船向右偏离给定航向时 ($\varphi>0$ 时)舵必须转向船的左弦 ($\psi=-\psi_0$ 和 $M=-M_0$); 反之，$\varphi<0$ 时，应使 $\psi=+\psi_0$, $M=+M_0$.

时，而是稍微早一些，即当航向偏转正在减小，但还没有达到零时，那么舵机的稳定作用就一定会更加有效．这种换舵的“提前”（预调）在实际上通常采用两种方法来实现：或采用所谓速度校正，或引入所谓硬反馈[1]．

在我们所研究的这种最简单的双位式自动操舵仪中，若采用速度校正，则舵的换位将不发生在船通过给定航向时，而发生在由航向偏角和此偏角的变化速度二者所构成的线性组合，即

$$\sigma = \varphi + b\frac{d\varphi}{dt}$$

达到零值的时候（不难看出，若 $b > 0$，则舵的换位将具有超前，即发生在船通过给定航向之前）．

这种采用速度校正（装有电动舵机）的双位式自动操舵仪，其略图表示在图 394 上；在图中也表示出系统：“船＋自动操舵仪”的方块图，此方块图反映出系统的基本元件和它们之间的联系．这种自动操舵仪具有两个传感器：航向偏角 φ 的传感器为陀螺罗盘，航向偏角速度 $\frac{d\varphi}{dt}$ 的传感器为所谓“阻尼陀螺”[2]．这两个传感器移动电换接器的接触“须”和接触片，移动的结果使电换接器根据 $\sigma = \varphi + b\frac{d\varphi}{dt}$ 的符号，通过辅助继电器，按需要的方向接通舵机．后者迅速地（我们将看作是瞬时地）将舵移到一个极限位置，这一极限位置是由端点开关所决定的（只要舵移动到极限位置 $\psi = +\psi_0$ 或 $\psi = -\psi_0$，相应的端点开关断开继电器电路，使舵机断电，从而停止舵的继续移动）．显然，舵机的接通必须遵守如下规则，即：$\sigma > 0$ 时将舵向左弦移动（$\psi = -\psi_0$，$M = -M_0$），$\sigma < 0$ 时向右弦（$\psi = +\psi_0$，$M = +M_0$）移动．这样一来，$\sigma \neq 0$

1）具有硬反馈的自动操舵仪将在本节第 4 小节中将进行简单的叙述．

2）阻尼陀螺是个二自由度陀螺（只能与船同时围绕铅垂轴旋转），在水平轴上作用有弹簧的力矩和专门阻尼器的粘性摩擦力矩．陀螺水平轴的转角（自由振动衰减下去以后）与船的航向变化速度成正比．它之所以起这个名称，是因为把它安置在自动操舵仪的构造中时，能阻尼船之航向的振动．

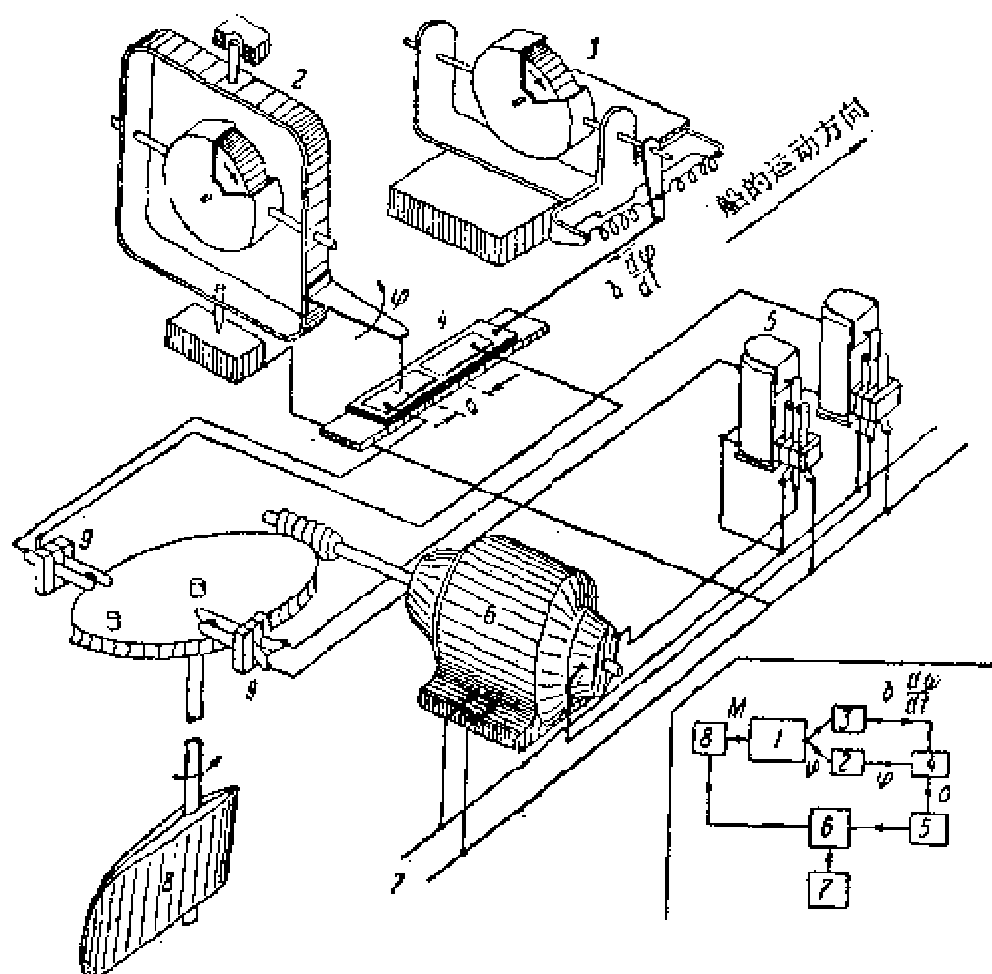


图 394 有速度校正的双位式自动操舵仪的略图和方块图
1——船； 2——航向陀螺(陀螺罗盘)； 3——阻尼陀螺(速度传感器)； 4——电换接器； 5——继电器； 6——舵机； 7——电源； 8——舵； 9——端点开关.

时舵就占据两个极限位置中的一个（“双位式自动操舵仪”的名称也正来源于此）．如果 $\sigma=0$（电换接器处于中立位置），则舵机将被断开，于是，舵就可以占据两极位置之间的任意位置：$-\psi_0 \leqslant \psi \leqslant +\psi_0$；$-M_0 \leqslant M \leqslant +M_0$（图 395）．

电换接器接触点的间隙忽略不计，并假定舵的换位能瞬时地完成，我们就可以近似地研究具有速度校正的双位式自动操舵仪，其方程有如下形式：

$$M=M_0 Z\left(\varphi+b\frac{d\varphi}{dt}\right), \tag{8.52}$$

其中

$$Z(\sigma)=\begin{cases}-1 & \sigma>0\text{ 时}\\ +1 & \sigma<0\text{ 时}\end{cases}\quad\text{以及 }|Z(0)|\leqslant 1$$[1]

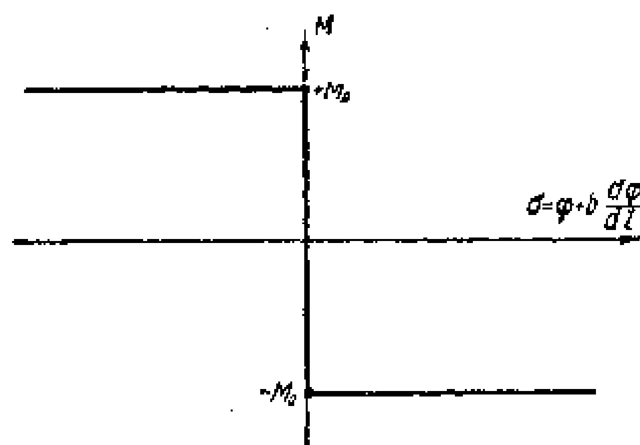


图 395

2. 相平面. "滑动状态". 有了这些预备知识后，我们着手研究船的动力学，并设船上装有采用速度校正的双位式自动操舵仪. 首先,我们将系统"船+自动操舵仪"的方程(8.51)和(8.52)加以简化，为此引入无量纲变量 x, $t_{新}$, z, 其值以如下关系式确定，即：

$$\varphi=Ax,\quad t_{旧}=Tt_{新},\quad M=M_0z,$$

其中

$$A=\frac{M_0I}{H^2}\ \text{和}\ T=\frac{I}{H}.$$

采用新变量以后,方程组有如下形式:

$$\ddot{x}+\dot{x}=z\ \text{和}\ z=Z(x+\beta\dot{x}),\tag{8.53}$$

其中

$$\beta=\frac{b}{T}=b\ \frac{H}{I}$$

且字母上方的圆点表示对于新的无量纲时间 $t_{新}$(以后将用 t 代替)的导数. 其次，我们只关心船的航向偏移很小的情况(设$|\varphi|$远小于 π),因此将假设所研究之系统(船+自动操舵仪)的相面 x, $\dot{x}$ 为一般的平面.

---

1) 我们之所以不采用 $\operatorname{sgn}\sigma$ 来表示这一函数，是因为函数 $\operatorname{sgn}\sigma$ 通常定义为 $\operatorname{sgn}(0)=0$.

令 $\dot{x}=y$，并研究相平面 x, y 的轨线划分．此相平面被对应于换接器中立位置的"开关直线"

$$x+\beta y=0 \tag{8.54}$$

分成两个区域(I)和(II)，每一区域都有各自的线性运动方程：

在区域(I)内($x+\beta y>0$)为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=-y-1,\end{aligned}\right\} \tag{8.55}$$

在区域(II)内($x+\beta y<0$)为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=-y+1,\end{aligned}\right\} \tag{8.55a}$$

后一个方程组可以从(8.55)中得出，只要将其中的 x, y 以 $-x$, $-y$ 代替即可．因此，区域(I)和(II)内的相轨线彼此关于原点对称．

在"开关直线"本身上，相点的运动将是不确定的，这是因为自动操舵仪的方程((8.53)的第二个方程)并不能单值地确定船运动方程的右端($\sigma=0$ 时，舵的坐标可取任意值 $-1\leqslant z\leqslant+1$)．因此，为了得到相平面的轨线划分的完整图象，为了能够在全部时间内不受限制地观察系统的每一个运动，我们就必须对所研究系统当 $x+\beta y=0$ 时的运动方程加以补充确定[1]．

为了这一目的，我们来研究在直线(8.54)附近轨线的走向．引入电换接器的折算坐标

$$\xi=x+\beta y,$$

并计算 $\dot{\xi}$．在区域(I)内：

$$\dot{\xi}=\dot{x}+\beta\dot{y}=y-\beta(y+1)=(1-\beta)y-\beta.$$

等倾线 $\dot{\xi}=0$（轨线与"开关直线"相平行的点的轨迹）显然为水平直线

$$y=\frac{\beta}{1-\beta}.$$

---

1) 这种补充确定通常要求对所研究系统中的过程有某些补充知识．要获得这种知识可以这样做：首先研究较复杂的方程组，这个方程组应反映自动操舵仪中所发生过程的详细特点，然后再来研究这个复杂系统的一个合理选择的极限过渡情况(参看下一节)．

设 $0<\beta<1$. 此时，在等倾线上方 $\dot{\xi}>0$，轨线离开直线(8.54)，在等倾线下方——向此直线接近. 在区域(II)中具有与此相对称的结构. 这样一来，在直线(8.54)上将有一线段

$$|y| \leqslant \left|\frac{\beta}{1-\beta}\right|, \tag{8.56}$$

轨线从两侧向它接近. 在这一线段的外部，轨线从一侧向它接近，从另一侧由它离去（图 396）. 当 $\beta>1$ 时可以得出同样的结构（图 397）. 这就是说，在区域(I)内，若 $y>\frac{\beta}{1-\beta}$，则轨线向开关直线接近 ($\dot{\xi}<0$)，若 $y<\frac{\beta}{1-\beta}$，则由开关直线离开.

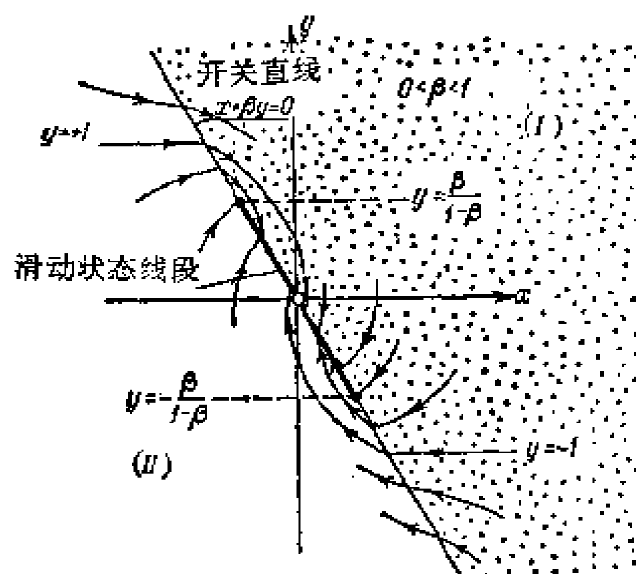


图 396

在开关直线——区域(I)和(II)的边界——上，由轨线的这种走向，使我们有可能用如下方法补充确定相点在这条直线上的运动(补充确定当电换接器处于中立位置时系统的运动)：

1）如果相点在线段(8.56)外部走向“开关直线”，它必然与后者相交，由区域(I)转入区域(II)，或者相反；

2）如果相点走向“开关直线”时进入线段(8.56)上，则当它到达以后将沿此线段运动.

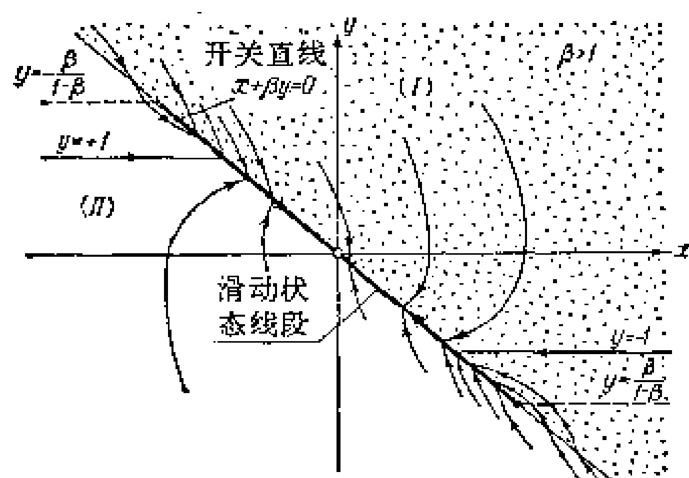


图 397

对于后一情况，系统的运动规律可以从“开关直线”的方程(8.54)中代入 $y=\dot{x}$ 后得出：

$$x+\beta\dot{x}=0,$$

由此可以求出

$$x=x_0e^{-t/\beta}. \tag{8.57}$$

这就是双位式自动操舵仪的所谓**滑动状态**[89]．当自动操舵仪在此状态中工作时，电换接器处于中立位置，而舵的位置则由极限位置平滑地变化到中立位置．舵的折算坐标在这种情况下，显然按如下规律变化：

$$z=\ddot{x}+\dot{x}=x_0\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\beta}\right)e^{-t/\beta} \tag{8.57a}$$

为了理解滑动状态的物理本质，必须额外再考虑某些(一般来讲是次要的)因素：例如自动操舵仪中的滞后式舵机的惯性，这些因素在实际的自动操舵仪中永远存在，其作用的结果使舵的换位发生在电换接器坐标 ξ 通过零以后．由于这些因素的存在，使得滑动状态表现为电换接器的频繁换接（自动操舵仪的滞后越小或舵机换舵所需的时间越短，就越频繁），其结果使得舵或者一小段一小段地移动，或者以接近于(8.57)的位置为中心发生振动[1]．理想化的滑动状态(8.57)，是由简化研究中得出的，也是当 $x+\beta y=0$

1）参看下一节．

时对系统的运动经过补充确定才求出的．这种理想的滑动状态可以看做是上述补充因素（滞后，移动舵所需的有限时间）趋向零时的极限情况．

出现滑动状态时，船舶的航向偏移按(8.57)作非振荡衰减，而且 β 越小，衰减越快．然而必须记住，随着 β 的减小，滑动状态的区域也相应缩短，而且，下面我们将会看到，在此区域外部将有振荡式衰减，并且速度较慢．因此，表征速度校正量的 β，无论过大或过小，都将使给定航向的建立过程变得甚为缓慢．

3. 点变换. 现在我们来研究在滑动状态线段以外之轨线的走向，方法是将问题归结为直线对直线的某一点变换．设 $0<\beta<1$[1]．为了建立点变换，我们研究一条在某点 $s_0(-\beta s_0, s_0)$ 与"开关直线"相交后进入（$t=0$ 时）区域(I)的轨线；显然 $s_0>\dfrac{\beta}{1-\beta}$．将(8.55)积分，得出区域(I)中的通解：

$$\left.\begin{aligned}
&y=-1+(y_0+1)e^{-t},\\
&x=x_0-t+(y_0+1)(1-e^{-t}),\\
&\xi=x+\beta y=\xi_0-t+(1-\beta)(y_0+1)(1-e^{-t})
\end{aligned}\right\}\quad(8.58)$$

（x_0, y_0, ξ_0 为 $t=0$ 时 x, y, ξ 的值）．在所研究的轨线上，$x_0=-\beta s_0$, $\xi_0=0$；若 τ 以方程

$$(1-\beta)(y_0+1)(1-e^{-\tau})-\tau=0, \qquad (8.59)$$

单值确定，则 $t=\tau$ 时，电换接器的坐标 ξ 等于零，而相点则返回到"开关直线"上的点 $s_1(\beta s_1, -s_1)$，其中

$$s_1=1-(s_0+1)e^{-\tau}. \qquad (8.59a)$$

这里可能出现两种情况．如果 $s_1\leqslant\dfrac{\beta}{1-\beta}$，则轨线进入滑动状态线段，以后的运动将按(8.57)进行．如果 $s_1>\dfrac{\beta}{1-\beta}$，则轨线将转入区域(II)，然后在某点 $s_2(-\beta s_2, s_2)$ 处重新返回"开关直线"，这

1）当 $\beta>1$ 时，由于在滑动状态中，船的航向偏移衰减缓慢，所以 $\beta>1$ 情况没有重要意义．从图 397 中不难看出，在这种情形下，最多在第二次换舵时就会出现滑动运行状态．

样一直变化下去[1].

这样我们就将得出所研究的这条轨线与“开关直线”的交点序列,即点列:

$$s_0, s_1, s_2, \cdots, s_k, s_{k+1}, \cdots.$$

不难看出,由于区域(I)和区域(II)中之轨线关于原点的对称性,每一后继点 s_{k+1} 可由其先行点 s_k 得出,所用的变换与点 s_1 由点 s_0 得出时所用的变换相同,亦就是说,后继函数:

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= -1 + \frac{\tau}{(1-\beta)(1-e^{-\tau})}, \\ s_1 &= +1 - \frac{\tau}{(1-\beta)(e^{\tau}-1)}, \end{aligned}\right\} \tag{8.60}$$

可由(8.59)和(8.59a)得出. 这里,为使点 s_k 具有后继点 s_{k+1}, 必须满足条件 $s_k > \frac{\beta}{1-\beta}$; 否则点 s_k 在半直线(s)上将不具有后继点,因为相应的 $|y_k|$ 小于 $\frac{\beta}{1-\beta}$, 因而所研究的这条轨线必将进入滑动线段.

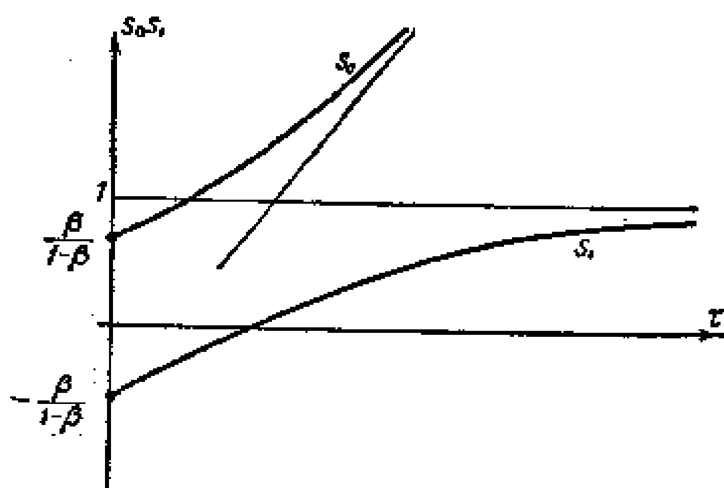


图 398

函数(8.60)的图象表示在图 398 上. $\tau = 0$ 时, $s_0 = \frac{\beta}{1-\beta}$,

1) 不难看出,情况 $s_1 < -\frac{\beta}{1-\beta}$ 是不可能的.

$s_1 = -\frac{\beta}{1-\beta}$;其次，$\tau$ 增大时，s_0 和 s_1 单调增大,而且 $\tau \to +\infty$时，$s_0 \to +\infty$，而 $s_1 \to +1$[1]. 这两条曲线彼此不相交(变换(8.60)没有不动点),这是因为 $\beta < 1, \frac{\tau}{2} > \operatorname{th}\frac{\tau}{2}$,因而

$$s_1 - s_0 = -2\left[\frac{\frac{\tau}{2}}{(1-\beta)\operatorname{th}\frac{\tau}{2}} - 1\right] < 0.$$

这样一来,所研究的这条轨线与“开关直线”的交点中,每一后继点都比前行点更接近原点,因而经过有限的振动以后,自动操舵仪进入滑动状态.

船在进入滑动状态以前的振动次数(舵的换位次数)，显然与初始条件以及参数 β 的大小有关. 若$\frac{1}{2} \leqslant \beta < 1$，则对于任意 τ

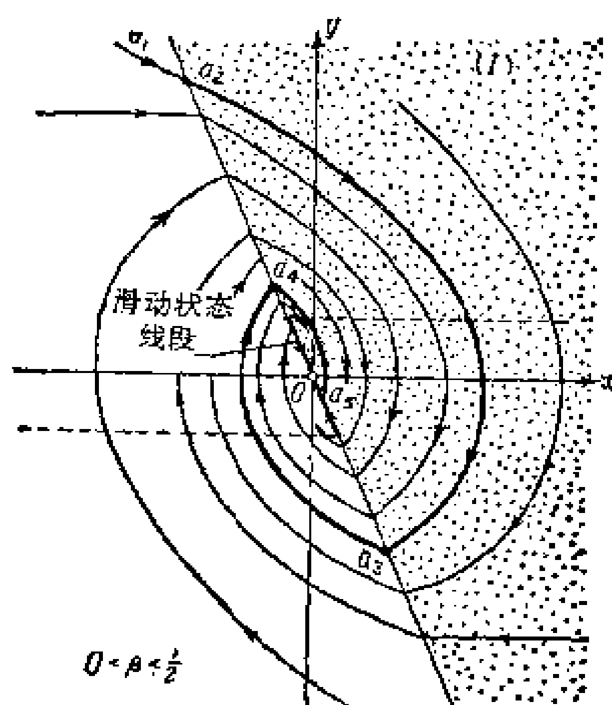


图 399

1) 的确,当 $\tau>0$ 时

$$\frac{ds_0}{d\tau} = \frac{e^{-\tau}[e^{\tau} - (\tau+1)]}{(1-\beta)(1-e^{-\tau})^2} > 0 \text{ 和 } \frac{ds_1}{d\tau} = \frac{e^{\tau}[\tau - (1-e^{-\tau})]}{(1-\beta)(e^{\tau}-1)^2} > 0.$$

(即任意 s_0)，都有 $s_1 < 1 < \frac{\beta}{1-\beta}$，因此轨线最多与直线(8.54)相交一次，然后就进入滑动状态线段．我们已经看到，$\beta > 1$ 时的情况与此相同．考虑到 β 的增大会使自动操舵仪在滑动状态中的航向偏转之非振荡衰减的速度减小，显然可以认为采用过大的速度校正——不仅 $\beta > 1$，而且也包括 $\beta > \frac{1}{2}$——是不合适的．图

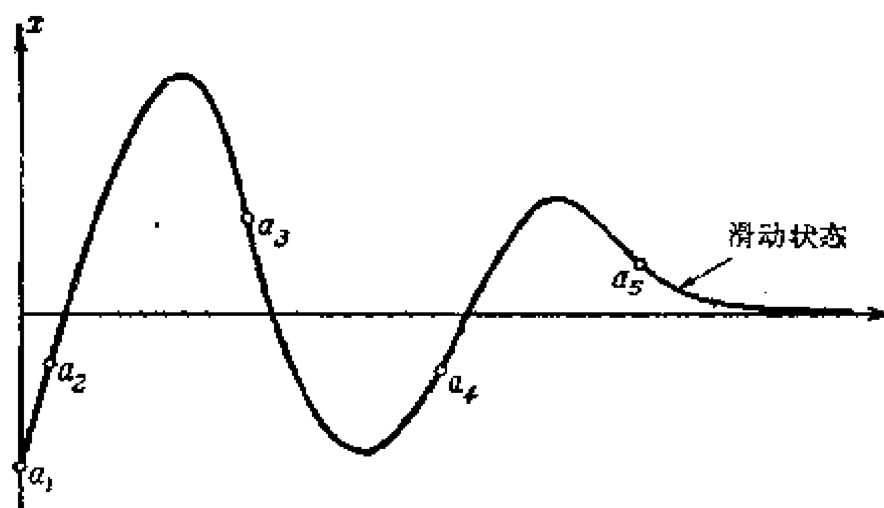


图 400

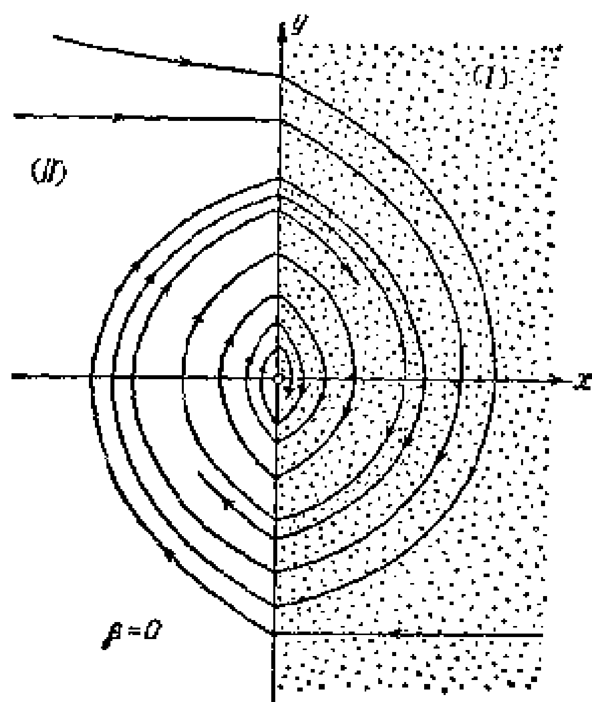


图 401

399 上表示出 $\beta < \frac{1}{2}$ 时相平面的轨线划线。图 400 上表示出装有双位式操舵仪之船的航向振动波形图，所取情况对应于图 399 上的轨线 $a_1a_2a_3a_4a_5O$。对于任何初始条件，自动操舵仪都进入滑动状态，然后以非振荡的方式建立起给定航向。同时，β 越小，滑动状态线段就越短，在滑动状态开始以前，系统振动的时间也越长。$\beta = 0$（即完全没有速度校正）时，根本不存在滑动状态，船之航向的全部振动过程都将是振荡的，而且衰减较慢（为了说明这一点，在图 403 上表示出 $\beta = 0$ 时系统的相平面）。

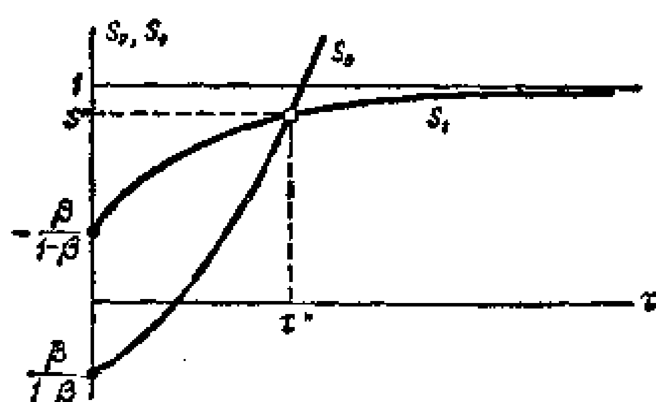


图 402

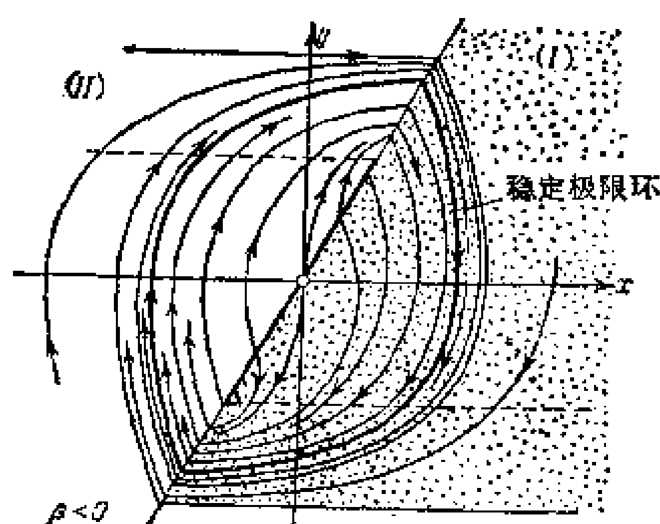


图 403

应指出，被研究之系统：船和二位式自动操舵仪(采用上述的简化假设)，当 $\beta<0$ 能进入自振状态，即当阻尼陀螺连接错误，使换舵发生在船舶通过给定航向之后．在这种情况下，对于相平面的轨线划分之结构的研究，也可以归结为轨线与"开关直线"之交点的变换(其后继函数同样将以(8.60)的形式写出)．$\beta<0$ 情况中的拉梅尔图表示在图 402 上．点变换(8.60)在 $\beta<0$ 时具有唯一的稳定的不动点，在相平面上(图 403)，此不动点对应于稳定的对称极限环．将 $s_1=s_0$ 代入方程式(8.60)，就可以求出振动的半周期，或者也可由方程

$$1-\beta=\frac{\tau^*}{2}\operatorname{cth}\frac{\tau^*}{2}$$

求得．不难证实，当 $\beta\to-0$ 时，航向自振的振幅和周期也将趋向于零．

4. 具有硬反馈的自动操舵仪． 现在我们来简单研究一下实现换舵提前(即在船舶通过给定航向之前换舵)的第二种方法．这种方法在自动调节技术中也常常被采用，其实质为：在自动操舵仪结构中引入硬反馈．这种自动操舵仪的略图以及系统"船+自动操舵仪"的方块图均表示在图 404 上．采用硬反馈以后，舵机的电换接器，其坐标将为

$$\sigma^*=\varphi+B\psi$$

(ψ 为舵的转角，由船的径向平面算起)；当 $\sigma^*>0$ 时，舵转向左弦(处于 $\psi=-\psi_0$ 位置)，当 $\sigma^*<0$ 时——转向右弦(处于 $\psi=+\psi_0$ 位置)．$\sigma^*=0$ 时(电换接器处于中立位置)，舵机断电，此时舵在 $-\psi_0\leqslant\psi\leqslant+\psi_0$ 之间可占据任意位置[1]．

与以前一样，将换舵所需要的时间忽略不计，并认为舵上所产生的力矩 M 与转角 ψ 成正比，即：

$$M=\frac{M_0}{\psi_0}\psi,$$

我们可以近似地写出硬反馈自动操舵仪的方程如下[2]：

$$M=+M_0Z\left(\varphi+B\psi_0\frac{M}{M_0}\right).$$

---

1) 不难看出，只有当 $B>0$ 时，才能实现换舵提前．

2) $Z(\sigma^*)$ 的定义可参看本节第一小节．

若采用变量

$$x=\frac{H^2}{M_0 l}\varphi,\ t_{新}=\frac{H}{I}t_{旧} \text{ 和 } z=\frac{M}{M_0}=\frac{\psi}{\psi_0},$$

则装有双位式硬反馈自动操舵仪的船的运动方程可写成如下形式:

$$\ddot{x}+\dot{x}=z,\ z=Z(x+\beta^* z), \tag{8.61}$$

其中 $\beta^*=B\psi_0$——折算反馈系数.

系统的相平面 $x, y(y=\dot{x})$ 被直线 $x=+\beta^*$ 和 $x=-\beta^*$

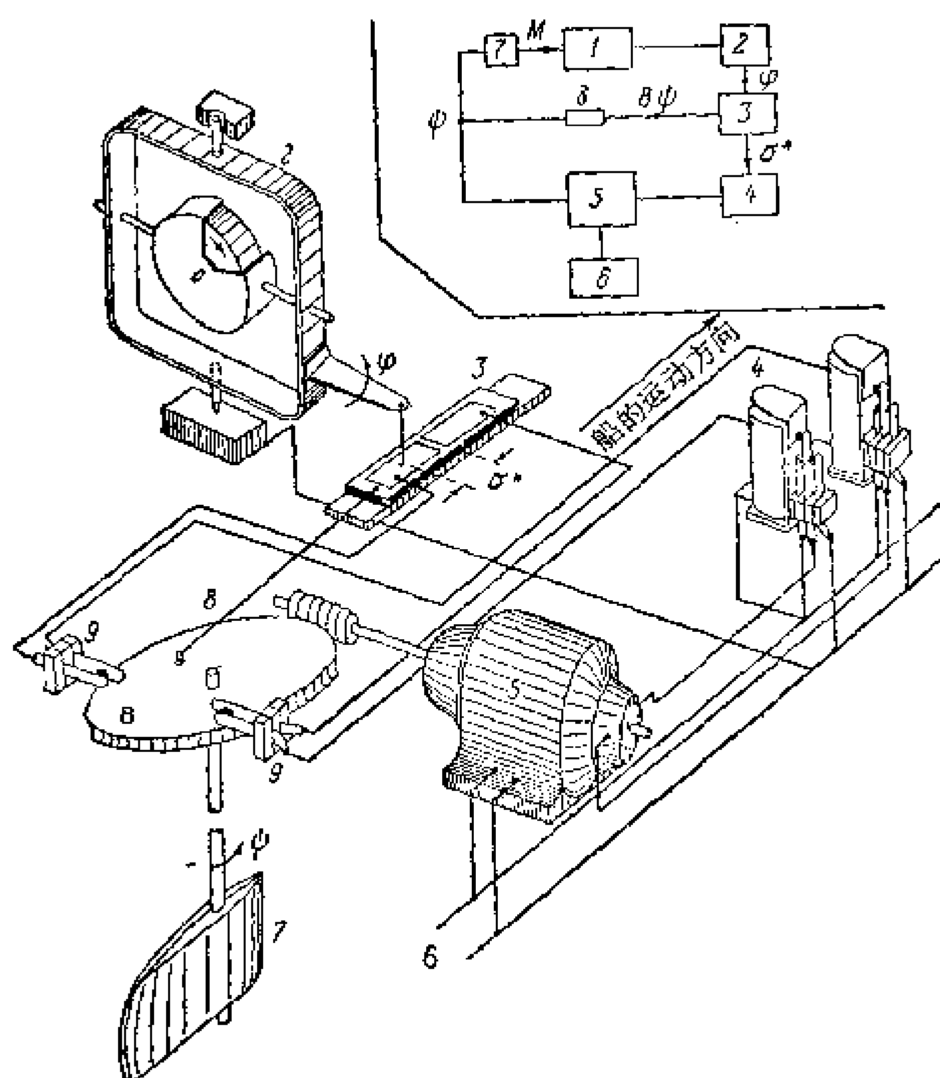


图 404　双位式硬反馈自动操舵仪的略图和方块图

1——船; 2——航向陀螺(陀螺罗盘); 3——电换变器; 4——继电器; 5——操舵机; 6——电源; 7——舵; 8——硬反馈杠杆; 9——端点开关.

分成三个区域：(I)，(II)，(III)(图 405)．其中 $z=-1$（舵位于左极限位置），因而 $\xi^*=x-\beta^*\geqslant 0$ 的区域，显然是区域(I)：$x>\beta^*$．在此区域内，系统的运动方程为方程组(8.55)．$z=+1$（舵位于右极限位置）以及 $\xi^*=x+\beta^*\leqslant 0$ 的区域为区域(II)：$x<-\beta^*$．在 $-\beta^*<x<+\beta^*$ 区域(区域(III))内，z 既不能等于 $+1$ 又不能等于 -1（舵不能占据任何极限位置）；因此，在这里必有 $\xi^*=x+\beta^*z\equiv 0$——电换接器处于中立位置，而舵则在两极限位置之间平滑移动：

$$z=-\frac{x}{\beta^*}. \tag{8.62}$$

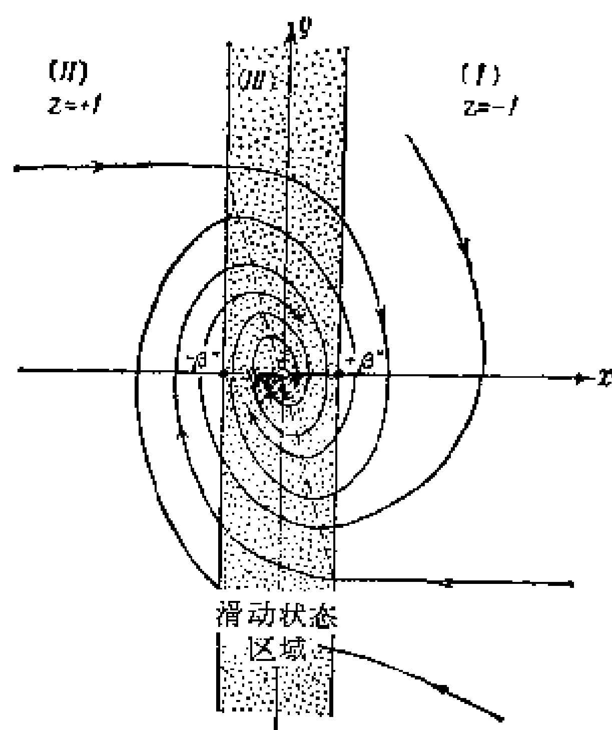


图 405

这也是滑动状态，但在这里(具有硬反馈时)，它不是发生在某一直线线段上，而是在相平面的整个区域 $-\beta^*<x<+\beta^*$ 内．因此，与采用速度校正的自动操舵仪不同，在硬反馈自动操舵仪中，每次换舵都出现滑动状态，换句话说，舵的一切移动都由自动操舵仪在滑动状态中完成．

在实际双位式硬反馈自动操舵仪中，滑动状态表现为舵机的频繁接通和断开，使舵按照接近于(8.62)的规律一小段一小段地移动．其进行的方式如下．航向变化时，电换接器将舵机按需要的方向接通．后者移动舵，并通过硬反馈带动电换接器的接触片，经过不长的时间间隔就断开舵机．然后航向继续变化将引起舵机的又一次短时接通，如此类推．舵机接通断开的频率，取决于自动操舵仪的滞后（包括继电装置在内）和舵机本身的惯性，这就是说，取决于那些在任何实际自动操舵仪中都存在着的因素，而这些因素在本节内被我们忽略了．上述因素越小，频率就越高．滑动状态的理想化（表现为对自动操舵仪方程组所做的补充确定(8.62)），是作为自动操舵仪的滞后和舵机的惯性趋于零时的极限情况得出来的．

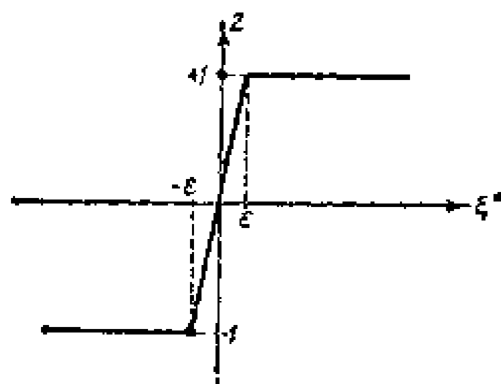


图 406

应指出，滑动状态的补充确定(8.62)还可以从图 406 所示的连续特性曲线的极限过渡中得出．对于这种特性曲线，当 $|\xi^*|<\varepsilon$（其中 $\xi^*=x+\beta^* z$）时，有

$$z=\frac{\xi^*}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}(x+\beta^* z),\ \text{即}\ z=-\frac{x}{\beta^*-\varepsilon},$$

取 $\varepsilon\to 0$ 的极限，即得出(8.62)．

当自动操舵仪处于滑动状态时（在相平面的区域(III)内），船的航向的变化，根据(8.61)的第一方程和方程(8.62)，可用如下线性方程描述，即：

$$\ddot{x}+\dot{x}+\frac{x}{\beta^*}=0 \qquad (8.62a)$$

这就是说，航向的变化总是衰减的，而且 $\beta^*<4$ 时为振荡衰减，$\beta^*>4$ 时为非振荡衰减（显然 $\beta^*=4$ 时衰减速度最大）．

在图 405 上表示出系统"船＋硬反馈双位式自动操舵仪"的相

平面之轨线划分．可以证实（例如将问题归结为直线对直线的某种点变换），所有轨线当 $t\to+\infty$ 时都趋向稳定平衡状态 $x=0$．这说明，船从任何初速条件都将进入给定航向，而且建立航向的最后阶段是由自动操舵仪在滑动状态中完成的．

5. 其他自动调节系统． 作为本节的结束，我们指出，还有很多其他自动调节和自动控制系统，采用适当的假设以后，亦可以归结为我们曾经在这里研究过的动力学系统．

作为例子，我们研究发动机转速的间接调节系统，在系统中采用无"死区"的"恒速"伺服机和理想敏感元件（即忽略发动机转速测量器的质量和其中的摩擦）[1]．这种自动调节系统的略图表示在图 407 上．其运动方程（当调节对象所处的状态接近平衡状态 $\omega=\Omega$ 时）可以写成下面这种在自动调节理论中习惯采用的形式[2]：

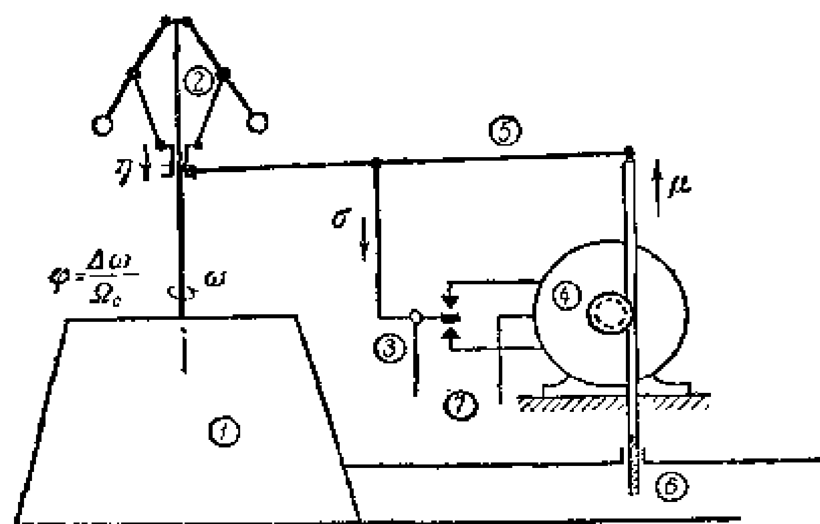


图 407 发动机间接调节系统的略图

1——调节对象（发动机）；2——敏感元件（离心式发动机转速测量器）；3——电换接器（伺服机旋转方向变换开关）；4——伺服机（双向电动机）；5——硬反馈杠杆；6——控制发动机功率的阀，由伺服机带动；7——伺服机的供电线路．

1）我们取发动机的转速调节只是为了使问题更加确定：这里所研究的系统，可以代之以任何 1/2 自由度并具有正自调的其他系统．同样，伺服电机也可以用任何其他伺服机代替．

2）可参看[120,99,1]．

调节对象(具有正自调)的线性化方程为

$$T_a \frac{d\varphi}{dt} + k\varphi = \mu;$$

(理想)敏感元件方程为

$$\delta\eta + \varphi = 0;$$

反馈方程为

$$\sigma = \eta - \gamma\mu;$$

“恒速”(无“死区”)伺服机的方程为

$$\frac{d\mu}{dt} = \begin{cases} +\dfrac{1}{T_s} & \sigma > 0 \text{ 时}, \\ -\dfrac{1}{T_s} & \sigma < 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

这里 φ 为发动机转速的相对变化， η 为敏感元件输出坐标的相对变化(离心式测速器套筒的相对位移), σ 为伺服机换接器的相对位移, μ 为调节对象控制阀的相对位移（发动机油门的相对位移), T_a 和 k 为所谓的发动机开动时间和自调系数, δ 为敏感元件的不均匀系数, γ 为硬反馈系数, T_s 为伺服机的时间常数(方程的所有系数都是正值). 将最后一个方程代入第一方程,再把第一和第二方程代入第三方程,可以得出:

$$T_a T_s \frac{d^2\varphi}{dt^2} + kT_s \frac{d\varphi}{dt} = \begin{cases} +1 & \sigma > 0 \text{ 时}, \\ -1 & \sigma < 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

和

$$\sigma = -\left(\frac{1}{\delta} + \gamma k\right)\varphi - \gamma T_a \frac{d\varphi}{dt}.$$

若引入新变量 x, ξ 以及新的无量纲时间 $t_{新}$, 其值以关系式:

$$t = \frac{T_a}{k} t_{新}, \quad \varphi = \frac{T_a}{k^2 T_s} x, \quad \sigma = -\frac{T_a\left(\dfrac{1}{\delta} + \gamma k\right)}{k^2 T_s} \xi$$

与旧的量相联系，则所研究之间接调节系统的方程可简化为如下形式:

$$\ddot{x} + \dot{x} = \begin{cases} -1 & \xi > 0 \text{ 时}, \\ +1 & \xi < 0 \text{ 时}, \end{cases}$$

其中

$$\xi = x + \beta \dot{x}, \ \beta = \frac{\gamma k}{\frac{1}{\delta} + \gamma k}{}^{1)},$$

即归结为方程组(8.53)。

§7. 具有滞后的双位式自动操舵仪

上节我们讲过，为了揭露自动操舵仪滑动状态的物理本质，必须考虑到某些因素，这些因素在实际的自动操舵仪中所起的作用引起换舵的滞后——换舵发生在电换接器坐标 σ 通过零以后．在这些因素中，我们曾指出自动操舵仪的滞后和舵机的惯性(换舵的时间很短，但却是有限的)．在本节中，我们将在对这些因素进行近似(而且分别地)考虑的基础上，研究系统“船＋自动操舵仪”的动力学．而且只限于采用速度校正的自动操舵仪的情况[2]．

作为引起换舵滞后的第一个原因，我们来研究所谓电换接器的“空间滞后”．这就是说，我们假定：舵从船的一弦换到另一弦时（和以前一样，假定是瞬时的），不发生在换接器坐标 σ 通过零的时候，而是在 σ 增加过程中，当 $\sigma = +\sigma_0$ 时换舵(舵换到 $\psi = -\psi_0$ 位置)，在 σ 减小过程中当 $\sigma = -\sigma_0$ 时换舵(舵换到 $\psi = +\psi_0$ 位置)．自动操舵仪的相应特性表示在图 408 上．这种空间滞后之所以

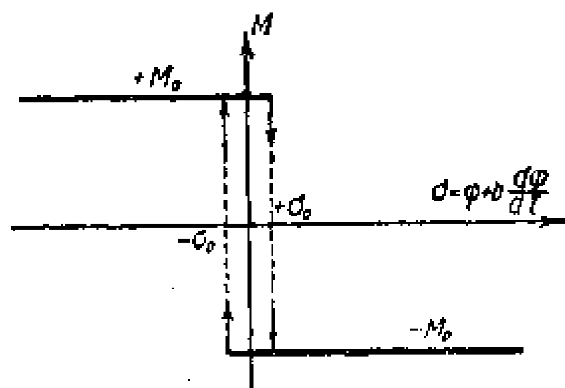


图 408

出现，举例来说，可以是由于电换接器中有间隙存在(在阻尼陀螺

---

1) 在所研究之系统中，显然 $0<\beta<1$．

2) 研究硬反馈双位式自动操舵仪产生滑动状态的物理本质，要求考虑具有 $1\frac{1}{2}$ 自由度的动力学系统；而对这种系统的研究已超出本书的范围．

与电换接器接触片之间的联接部分中的间隙，其大小等于 $2\sigma_0$；参看图 409）．问题的这种提法，使我们必须研究具有双叶相平面的动力学系统．

产生换舵滞后的另一个原因是舵机换舵时，舵的位置变化具有有限速度（而不是无穷大）．本来可以设想，当电换接器坐标 σ 变为零时，马上开始换舵，但换舵是以一定的恒速 $\dot{\psi} = -A\operatorname{sgn}\sigma$（$A$ 为常数）进行的，而不是瞬时的，直到舵到达极限位置或 σ 重新达到零时为止$\left(\text{在第一种情况中，换舵时间等于}\frac{2\psi_0}{A}\right)$[1]．但是，这种系统，即船＋装有"恒速"舵机的自动操舵仪，将具有 $1\frac{1}{2}$ 自由度（相空间是三维的），对它的研究不能归结为研究直线对直线的点变换．

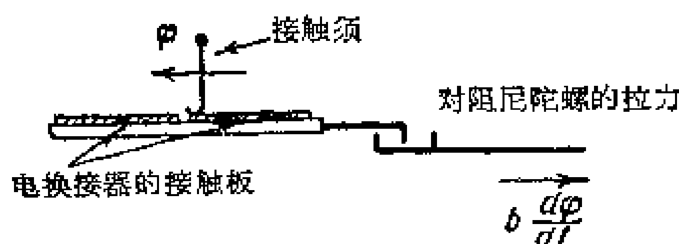


图 409

因此，我们把对换舵过程本身的、这种详细而深入的研究，以如下简化的假设代替；即假定换舵是瞬时的，但换舵发生在电换接器坐标 σ 变到零并经过时间间隔 Δ 以后（Δ 中包括用以控制舵机的继电装置的动作时间在内[2]）．这样，我们就得出具有时间滞后的二阶分段线性系统，其运动以二阶微分差分方程描述；研究这种系统的运动（对于某些主要类型的运动）可以归结为研究直线对其自身的点变换．

1. 具有空间滞后的自动操舵仪． 现在我们来着手研究采用速度校正的系统"船＋自动操舵仪"的动力学，并考虑到电换接器

1）对问题采取这种提法时，假定舵机接通后 $\dot{\psi}$ 立刻（瞬时地）达到恒定值 $\pm A$，断开后立刻达到零值，也就是将舵机的惯性矩以及由舵机带动的操舵装置之所有机件的质量都忽略不计．

2）此种恒定时间间隔的滞后通常称为时间滞后，以事区别于空间滞后．在后一种情况中，继电系统动作的滞后不是以时间间隔，而是以相点在相空间的某一恒定位移（在我们所研究的关于自动操舵仪的问题中，为 $|\sigma|$ 的变化量 σ_0）来衡量的．

中的空间滞后。这种自动操舵仪的特性曲线曾表示在图 408 上；在 σ 增加的过程中当 $\sigma=+\sigma_0$ 时，在 σ 减小的过程中当 $\sigma=-\sigma_0$ 时，自动操舵仪将舵由一个极限位置瞬时地移向另一极限位置，当 $\sigma<\sigma_0$ 时保持在 $\psi=+\psi_0(M=+M_0)$ 的位置上，当 $\sigma>-\sigma_0$ 时则保持在 $\psi=-\psi_0(M=-M_0)$ 的位置上。当 $-\sigma_0<\sigma<+\sigma_0$ 时，舵的位置已不是单值地决定于电换接器的坐标 σ（可能是 $\psi=+\psi_0$，也可能是 $\psi=-\psi_0$），而决定于系统的先前状态：舵保持前一瞬时所处的位置。自动操舵仪特性的这种非单值性（舵的力矩 M 作为电换接器坐标 $\sigma=\varphi+b\frac{d\varphi}{dt}$ 之函数的非单值性），显然使我们不能用 $\varphi,\frac{d\varphi}{dt}$ 平面做为系统的相面。相面将是双叶的，它由两叶(I)和(II)构成，各自对应于舵处于左右极限位置时系统的状态集合，并在“非单值区域”：$|\sigma|<\sigma_0$ 范围内，彼此重叠（图 410）。而且，根据所采用的自动操舵仪的特性曲线，我们必须假定相点从(I)叶向(II)叶的过渡只发生在(I)叶的边界上，而相反的过渡——只在(II)叶的边界上[1]。

引入（与前节相同）新变量 x, ξ, z，以及新的无量纲时间 $t_{新}$，

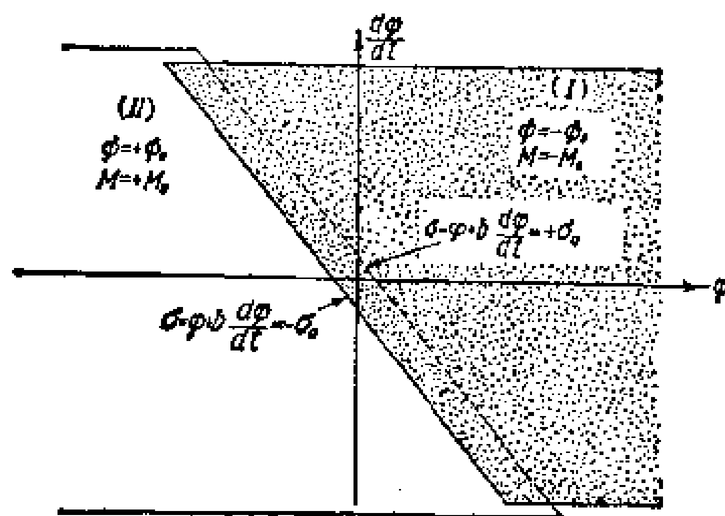


图 410

1) 还可以参看第三章 §6，其中曾研究过两个具有双叶相曲面的动力系统。

它们与旧量之间有如下的关系式:

$$\varphi = \frac{M_0 I}{H^2} x,\ \sigma = \frac{M_0 I}{H^2} \xi,\ M = + M_0 z,\ t = \frac{I}{H} t_{新}.$$

此时，所研究之动力学系统的运动方程将变成与(8.53)类似的形式:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{x} = y, \\
&\dot{y} = -y + z, \\
&\text{但其中} \\
&z = Z^*(\xi) = \begin{cases} -1 & \xi > -\dfrac{\alpha}{2}\text{时}, \\ +1 & \xi < +\dfrac{\alpha}{2}\text{时} \end{cases} \\
&\xi = x + \beta y,\ \alpha = \frac{2H^2}{M_0 I}\sigma_0,\ \beta = \frac{bH}{I}{}^{1)}
\end{aligned}\right\} \quad (8.63)$$

在(I)叶上(相当于舵处于左极限位置，即 $\psi = -\psi_0$ 时系统的状态集合，亦就是半平面 $\xi = x + \beta y > -\frac{\alpha}{2}$)我们有 $M = -M_0$，即 $z = -1$，因此系统运动方程可写成(8.55)形式，其解为关系式(8.58)．此叶的轨线划分表示在图 411 上(为了确定起见，取 $0 < \beta < \frac{1}{2}$ 的情况)．不难看出，在(I)叶上没有平衡状态，所有轨线都走向边界

$$\xi = x + \beta y = -\frac{\alpha}{2},$$

然后转入(II)叶．可以指出，(I)叶上的轨线与(II)叶上的轨线彼此对于原点对称．这种对称性是方程组(8.63)的直接结论，或更准确地说，是它关于 x, y 以 $-x, -y$ 置换的不变性的直接推论．

在(I)叶上(图 411)画出半直线 S':

$$x + \beta y = -\frac{\alpha}{2}, \dot{\xi} = (1-\beta)y - y \leqslant 0,$$

1) 当 $|\xi| < \frac{\alpha}{2}$ 时，z 保持前一瞬时的数值，可以是 $z = +1$ 或 $z = -1$.

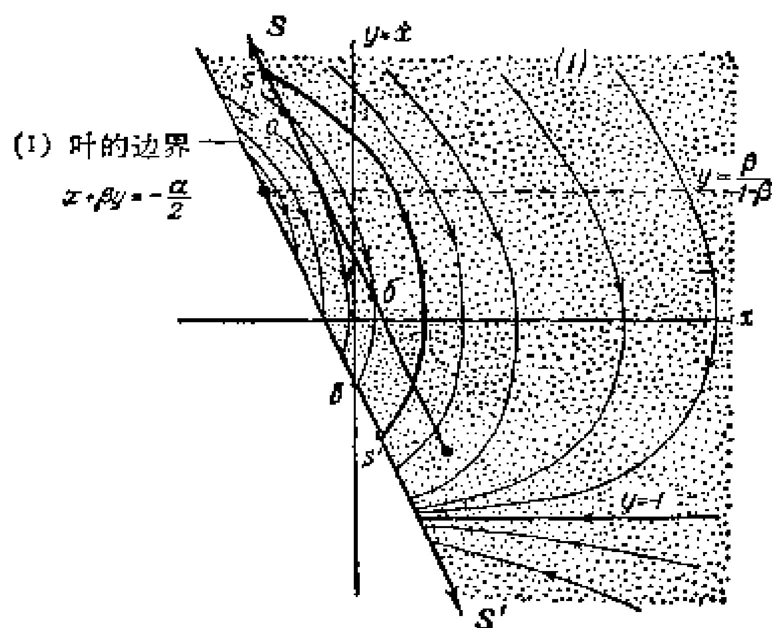


图 411

通过它相点由(I)叶转入(II)叶，再画出与其相对称的半直线 S：

$$x+\beta y=+\frac{\alpha}{2},\quad (1-\beta)y+\beta\geqslant 0,$$

即轨线由(II)叶转入(I)叶的半直线；选择坐标：在半直线 S 上为 $s=y$，在半直线 S' 上为 $s=-y$（同一坐标值 s 在这两条半直线上，对应着彼此对称的点)，并研究半直线 S 对半直线 S' 的点变换 Π：

$$s'=\Pi(s),$$

此变换是借助于 (I) 叶的轨线所实现的[1]. 而半直线 S' 上的点则是借助于(II)叶的轨线变换成半直线 S 上的点，同时由于(I)和(II)叶上之轨线的对称性，此变换将与变换 Π 恒等. 这样一来，在每一给定轨线与半直线 S 和 S' (开关半直线)交点上的数值序列

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_k,\ s_{k+1},\ \cdots$$

---

1) 很明显，半直线 S 的每一个点 s，在半直线 S' 上都有其后继点 s'. 这一变换将是单值连续的；然而变换 Π 却不具有相互单值性，因为半直线 S 并不是无切半直线(在点 $s=y=\dfrac{\beta}{1-\beta}$ 上 $\dot{\xi}=0$，即轨线与此半直线相切). 例如，在图 411 上半直线 S 的点 a 和 $б$ 同属于一个轨线，借助于变换 Π 变换为 S' 上的同一点.

中，用变换 Π 就能根据每一个 s_k 求出其后继值：

$$s_{k+1}=\Pi(s_k),$$

这显然使我们有可能把研究双叶相曲面的轨线划分归结为研究这一点变换。

在(8.58)中，代入 $\xi_0=+\frac{\alpha}{2}$ 和 $y=s$，并以 τ 表示相点在(I)叶上由半直线 S 运动到半直线 S' 的穿越时间（当 $t=\tau>0$ 时，$\xi=-\frac{\alpha}{2}$ 和 $y=-s'$），将得出关系式：

$$-\frac{\alpha}{2}=+\frac{\alpha}{2}-\tau+(1-\beta)(s+1)(1-e^{-\tau}),$$

$$-s'=-1+(s+1)e^{-\tau},$$

从中解出 s 和 s' 以后，我们得到变换 Π 的对应函数，其参数形式如下：

$$\left.\begin{aligned} s&=-1+\frac{\tau-\alpha}{(1-\beta)(1-e^{-\tau})},\\ s'&=+1-\frac{\tau-\alpha}{(1-\beta)(e^{\tau}-1)}.\end{aligned}\right\}\tag{8.64}$$

为了画出拉梅尔图，引人辅助函数：

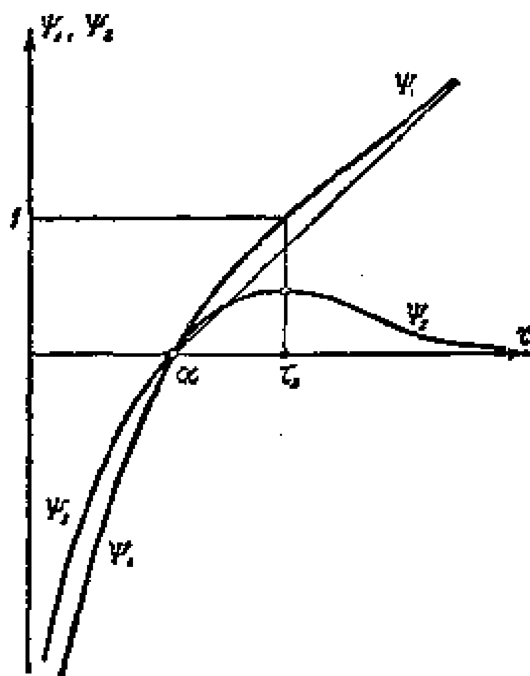


图 412

$$
\left.\begin{aligned}
\Psi_1(\tau) &= \frac{\tau-\alpha}{1-e^{-\tau}},\\
\Psi_2 &= \frac{\tau-\alpha}{e^{\tau}-1} = \Psi_1(\tau)e^{-\tau}.
\end{aligned}\right\} \tag{8.65}
$$

这两个函数的图象（对于 $\tau > 0$ 的情况）表示在图 412 上．其中第一个为单调增函数，第二个在 $\tau = \tau_1$ 时具有极大值[1]，τ_1 值决定于条件：

$$\Psi_1(\tau_1) = 1;$$

$\tau \to 0$ 时，Ψ_1 和 $\Psi_2 \to -\infty$；$\tau \to +\infty$ 时，$\Psi_1 \to \tau - \alpha$，而 $\Psi_2 \to +0$．显然

$$
\left.\begin{aligned}
&s = -1 + \frac{\Psi_1(\tau)}{1-\beta},\ s' = +1 - \frac{\Psi_2(\tau)}{1-\beta},\\
&\frac{ds}{d\tau} = \frac{\Psi_1'(\tau)}{1-\beta},\ \frac{ds'}{d\tau} = -\frac{\Psi_2'(\tau)}{1-\beta},\ \frac{ds'}{ds} = -\frac{\Psi_2'(\tau)}{\Psi_1'(\tau)}.
\end{aligned}\right\} \tag{8.64a}
$$

而且半直线 S 的初始点 $s = s_0 = -\dfrac{\beta}{1-\beta}$ 对应于数值 $\tau = \tau_0$，其大小以决定于方程[2]：

$$\Psi_1(\tau_0) = 1 - 2\beta.$$

设 $0 < \beta < 1$．在这种情况下，在半直线 S 上，$s = y \geqslant s_0 = -\dfrac{\beta}{1-\beta}$，因而此半直线的点变换参数 $\tau \geqslant \tau_0$（当 $\beta < 1$ 时，$\dfrac{ds}{d\tau} > 0$）．应用函数 Ψ_1 和 Ψ_2 的图象以及关系式(8.64a)，不难画出拉梅尔图；对应于 $0 < \beta < 1$ 情况的拉梅尔图画在图 413 上．不难看出，曲线(8.64)具有唯一的交点，因而变换 Π 只有一个**唯一的不动点**（$s = s' = s^*$，$\tau = \tau^*$）．这可以直接从如下事实得出，即差值

$$s - s' = -2 + \frac{1}{1-\beta}[\Psi_1(\tau) + \Psi_2(\tau)]$$

---

1) 事实上，当 $\tau > 0$ 和 $\alpha > 0$ 时，$\dfrac{d\Psi_1}{d\tau} = \dfrac{1-e^{-\tau}-(\tau-\alpha)e^{-\tau}}{[1-e^{-\tau}]^2} = \dfrac{e^{-\tau}[\alpha+e^{\tau}-\tau-1]}{[1-e^{-\tau}]^2} > 0$；$\dfrac{d\Psi_2}{d\tau} = \dfrac{e^{\tau}-1-(\tau-\alpha)e^{\tau}}{(e^{\tau}-1)^2} = \dfrac{1-\Psi_1(\tau)}{e^{\tau}-1}$，即 Ψ_1 等于 1 时，$\Psi_2(\tau)$ 达极大值（$\tau < \tau_1$ 时，$\Psi_2' > 0$，当 $\tau > \tau_1$ 时，$\Psi_2' < 0$）．显然，$\tau_1 > \alpha$．

2) 由于函数 $\Psi_1(\tau)$ 的单调性，τ_0 和 τ_1 可由上述方程单值地确定．显然，$\tau_0 < \tau_1$．

$$= -2 + \frac{\tau - \alpha}{1 - \beta} \operatorname{cth} \frac{\tau}{2}$$

为 τ 的连续单调增函数，这是因为 $\beta < 1$，并当 $\alpha, \tau > 0$ 时，有

$$\frac{d}{d\tau}[\Psi_1(\tau) + \Psi_2(\tau)] = \frac{d}{d\tau}\left[(\tau - \alpha)\operatorname{cth}\frac{\tau}{2}\right]$$

$$= \frac{\alpha + \operatorname{sh}\tau - \tau}{2\operatorname{sh}^2\frac{\tau}{2}} > 0, \qquad (8.65a)$$

而且当 $\tau \to +\infty$ 时，此差值趋向 $+\infty$，而当 $\tau = \tau_0$ 时，则等于

$$s_0 - s_0' = -2 + \frac{1}{1-\beta}(1 - 2\beta)(1 + e^{-\tau_0})$$

$$= -\frac{1 - e^{-\tau_0} + 2\beta e^{-\tau_0}}{1 - \beta} < 0.$$

在变换 Π 的不动点上，参数的数值 $\tau = \tau^*$ 显然可由方程

$$-2 + \frac{\tau^* - \alpha}{1 - \beta}\operatorname{cth}\frac{\tau^*}{2} = 0$$

或

$$\tau^* - 2(1 - \beta)\operatorname{th}\frac{\tau^*}{2} = \alpha \qquad (8.66)$$

单值地确定．而不动点的坐标 s^* 则为

$$s^* = -1 + \frac{\tau^* - \alpha}{(1 - \beta)(1 - e^{-\tau^*})}$$

或者由于

$$\frac{\tau^* - \alpha}{1 - \beta} = 2\operatorname{th}\frac{\tau^*}{2} = 2\,\frac{1 - e^{-\tau^*}}{1 + e^{-\tau^*}},$$

等于

$$s^* = -1 + \frac{2}{1 + e^{-\tau^*}} = \frac{1 - e^{-\tau^*}}{1 + e^{-\tau^*}} = \operatorname{th}\frac{\tau^*}{2}. \qquad (8.66a)$$

应当指出，当 α 很小（自动操舵仪特性曲线的"不定区"宽度很小，即滞后很小）时，τ^* 和 s^* 也同样很小；若准确到 α^3 阶项，则有

$$\tau^* = \frac{\alpha}{\beta},\ s^* = \frac{\alpha}{2\beta}. \qquad (8.66b)$$

此不动点（$s = s' = s^*$，$\tau = \tau^*$）是稳定的，因为稳定条件

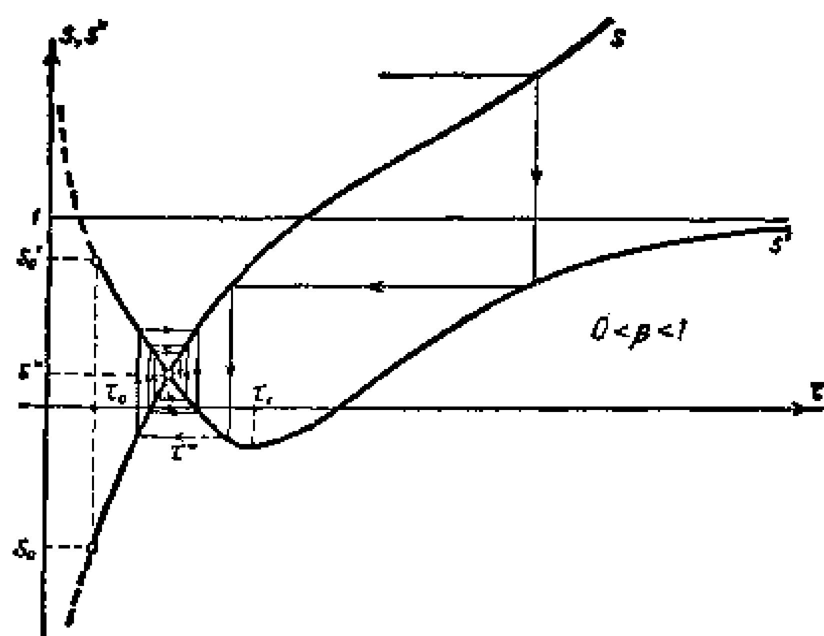


图 413

$$\tau=\tau^* \text{ 时}, \left|\frac{ds'}{d\tau}\right|<\left|\frac{ds}{d\tau}\right|,$$

可以根据(8.64a)归结为不等式

$$\tau=\tau^* \text{ 时}, \frac{d\Psi_1}{d\tau}>\left|\frac{d\Psi_2}{d\tau}\right|,$$

而后者永远满足．的确，如果 $\tau^*>\tau_1$，则 $\tau=\tau^*$ 时，$\frac{d\Psi_2}{d\tau}<0$，于是不动点的稳定条件等价于不等式

$$\text{当 } \tau=\tau^* \text{ 时}, \frac{d}{d\tau}[\Psi_1+\Psi_2]>0,$$

此不等式的正确性，前面已经对任意 $\tau>0$ 作了证明(参看(8.65a))．如果 $\tau^*<\tau_1$，则 $\tau=\tau^*$ 时，$\frac{d\Psi_2}{d\tau}>0$，从而稳定条件将取如下形式：

$$\text{当 } \tau=\tau^* \text{ 时}, \frac{d}{d\tau}(\Psi_1-\Psi_2)>0,$$

此不等式也同样永远满足，这是因为

$$\Psi_1-\Psi_2=\tau-\alpha \text{ 而 } \frac{d}{d\tau}[\Psi_1-\Psi_2]=1。$$

这样，当 $0<\beta<1$ 时，点变换 Π 具有唯一的、而且是稳定的不动点．不难看出，此不动点乃是以任意 s 为初始点的序列

$$s, s_1, s_2, \cdots$$

的极限点．

对于 $\beta \geqslant 1$ 的情况也是如此．当 $\beta=1$ 时，半直线 S 和 S' 变为直线 $x+\beta y=\frac{\alpha}{2}$ 和 $x+\beta y=-\frac{\alpha}{2}$，而且根据(8.58)，相点由直线 S 到直线 S' 的穿越时间与 s 无关，并等于 $\tau=\alpha$．在这种情况下，变换 Π 的对应函数将可写成显式：

$$s'=1-(s+1)e^{-\alpha},$$

而变换 Π 本身则具有唯一的稳定的不动点 $s^*=\operatorname{th}\frac{\alpha}{2}$．

当 $\beta>1$ 时，在半直线 S 的各点上：$s=y \leqslant -\frac{\beta}{1-\beta}=s_0$，但由于在 $\beta>1$ 时，$\frac{ds}{d\tau}<0$，因而此半直线的诸点仍然对应于 $\tau \geqslant \tau_0$．对应于此种情况的拉梅尔图表示在图 414 上．不动点的

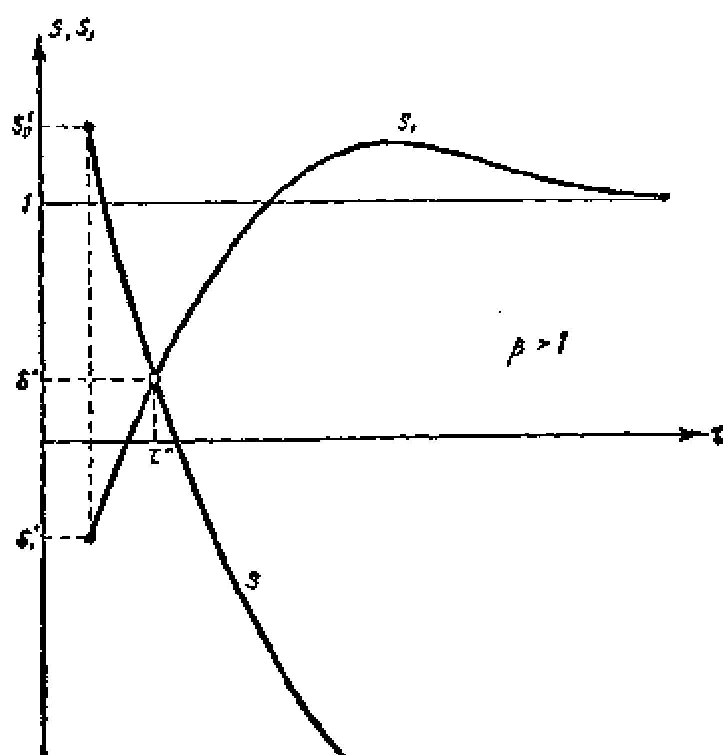


图 414

存在性可由函数(8.64)的连续性以及不等式：$\tau=\tau_0$ 时 $s-s'>0$，$\tau\to+\infty$ 时 $s-s'<0\,(s-s'\to-\infty)$得出，而其唯一性——则由于 τ 由 τ_0 变到 $+\infty$ 时，$s-s'$ 减小的单调性看出．当 $\beta>1$ 时，关于不动点稳定性的证明与前面对于 $0<\beta<1$ 情况所作的证明无任何区别．

这样一来，参数 β 取任意正值时，在所研究之动力学系统的相平面上，都存在有唯一的，而且是稳定的、对称的极限环，所有轨线都向它趋近 ($t\to+\infty$ 时)．换句话说，装有所研究的这种自动操舵仪的船，无论初始条件如何，都将进入自振状态——围绕给定航向($\varphi=0$，或 $x=0$) 作不衰减的周期振动．自动操舵仪的滞后越小和速度校正越大，这种振动的振幅和周期就越小[1]．图 416 所表示的就是船的航向振动波形的一个例子．它相当于图 415 上轨线 A(曲线上的点表示自动操舵仪换位的时刻——即舵从一个极限位置向另一极限位置变换的时刻)．

轨线在到达"开关直线" $x+\beta y=\pm\frac{\alpha}{2}$ 上 $|y|<\frac{\beta}{|1-\beta|}$ 的诸点以后，将保持在这两条直线之间，即直线 $x+\beta y=0$ 的 δ 邻域内$\left(\text{其中 } \delta=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)$ 运动．这些齿型的相轨线显然对应于自动操舵仪的滑动状态，在此状态中，自动操舵仪在"非单值区"的

---

1) 位于(I)叶上的那部分极限环的方程，根据(8.58) $\left(y_0=s^*,\quad x_0=\frac{\alpha}{2}-\beta s^*\right)$，可以写成如下形式：

$y=-1+(1+s^*)e^{-t}$，$x=\frac{\alpha}{2}-\beta s^*-t+(1+s^*)(1-e^{-t})$．将相点交于横轴，而航向偏移达最大幅值所需时间以 $\bar{t}$ 表示之．显然，

$$e^{\bar{t}}=1+s^*,\quad \text{即}\quad \bar{t}=\ln(1+s^*),$$

因此，航向的自振振幅为：

$$\bar{x}=\frac{\alpha}{2}+(1-\beta)s^*-\ln(1+s^*).$$

若 s^* 很小($\alpha\ll\beta$)，则根据(8.66b)，我们有 $\bar{x}=\frac{s^{*2}}{2}=\frac{\alpha^2}{8\beta^2}$．

自振的周期(采用无量纲时间单位)等于 $2\tau^*$，即当 $\alpha\ll\beta$ 时，为 $\frac{2\alpha}{\beta}$．

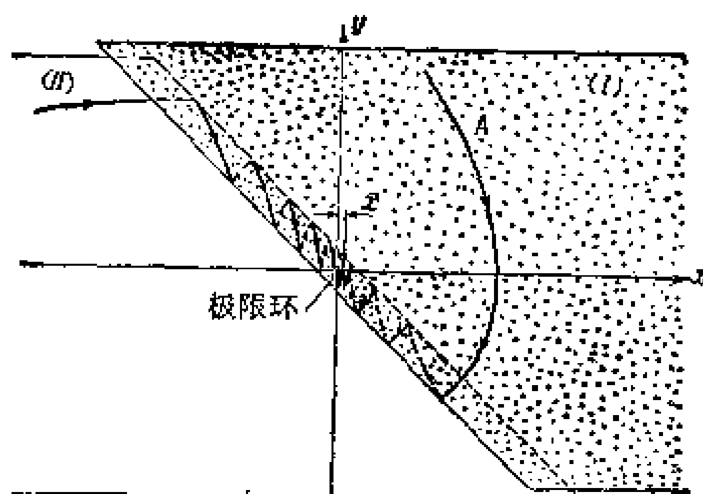


图 415



图 416

范围内，频繁地将舵从一个极限位置向另一极限位置更番变换(每次经过量阶为 $\frac{\alpha}{\beta}$ 的时间间隔 Δt)[1]. 在滑动状态中 $y=\dot{x}=-\frac{x}{\beta}+O(\alpha)$，因此，当自动操舵仪的滞后区减小时($\alpha\to 0$，即每次换舵所需经过的时间间隔 Δt 趋向于零时)，齿型轨线趋向直线 $x+\beta y=0$，$x\to x_0e^{-t/\beta}$，而极限环的尺寸和航向的自振振幅则趋向零.

1) 在自动操舵仪每两次换位之间的这段时间内，y 的变化之量阶为 $\frac{\alpha}{\beta}$，而 $|\dot{y}|$ 则与 1 同阶；由此得出，自动操舵仪每两次换位之间的时间间隔 Δt 与 $\frac{\alpha}{\beta}$ 同阶.

这样一来，在 $a \to 0$ 的极限情况中，我们就得出上一节中给出的(以假设形式)滑动状态的补充确定.

2. 具有时间滞后的自动操舵仪. 如果把自动操舵仪的滞后理想化成时间滞后，即认为自动操舵仪在电换接器坐标 σ 达到零以后，经过某一恒定的时间间隔 Δ，才进行换舵，那么我们就得出装有二位式自动操舵仪的船的另一种动力学模型. 研究这种模型，仍将得到性质上与上一小节完全相同的结果.

具有时间滞后的系统：有二位式自动操舵仪的船，若采用上一小节曾用过的变量，则其方程显然可写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} = y, \\ &\dot{y} = -y + z, \\ &z(t) = Z[\xi(t-\theta)] = \begin{cases} -1 & \xi(t-\theta) > 0 \text{ 时}, \\ +1 & \xi(t-\theta) < 0 \text{ 时}, \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (8.67)$$

其中

$\xi = x + \beta y$, θ (折算滞后时间) $= \dfrac{H}{I}\Delta$. 在这里，与以前曾研究过的动力学系统不同，有二位式自动操舵仪之船的运动方程已不再是微分方程，而是微分差分方程：变量 x, y 在瞬时 t 的变化速度(例如船的加速度)不仅取决于 y 在此瞬时的数值，而且还取决于在另一个较早的瞬时 $t' = t - \theta$ 时电换接器坐标 ξ 的数值. 正因为如此，$t > t^*$ 时系统的运动就不再单值地取决于瞬时 t^* 之 x, y 的值. 为了完全地和单值地确定出 $t > t^*$ 时的运动，必须要求给出在 $t^* - \theta \leqslant t \leqslant t^*$ 区间内的函数 $x(t)$. 换句话说，所研究之系统于任一瞬时 t^* 的状态，决定于时间间隔 $t^* - \theta \leqslant t \leqslant t^*$ 上的函数 $x(t)$ (或者说，决定于瞬时 t^* 的 x, y 之值，以及时间间隔 $t^* - \theta \leqslant t \leqslant t^*$ 上的分段常数函数 $Z[\xi(t)]$)；因而，系统的相空间不再是任何平面，而是一泛函空间[1].

正因为如此，为了研究系统动力学时使问题得到简化，并可将

---

1) 此泛函空间，显然可以看成是"无限维"空间，因为在 $t^* - \theta \leqslant t \leqslant t^*$ 区间上的函数 $x(t)$ (或 $Z[\xi(t)]$)，可以用该函数富氏级数展开式的系数所组成的无限可数集合给定.

其归结为研究直线对直线的点变换，我们在今后就不得不只限于研究系统的某些特殊类型的运动，对这些运动，我们就能够把它们用某种双叶相面上的轨线反映出来，而这一相面又是从完整(泛函)相空间中分出来的．把满足如下条件的状态（在任意瞬时 t^*）集合以 K_0 表示，此条件是：在 $t^*-\theta\leqslant t\leqslant t^*$ 区间，电换接器坐标 ξ 不取零值．下面我们只研究从这些状态开始的运动．任意瞬时的 K_0 型(即属于集合 K_0 的)状态，都由这一瞬时之 x, y 的数值单值地确定，因此我们将用 x,y 平面上的点来反映这些状态(相互单值而且连续)，并从此平面上将直线 $x+\beta y=0$ 去掉(在平面 K_0 上)[1]．

为了确定起见，设表示 K_0 型初始状态($t=0$ 时)的点(x_0, y_0)位于半平面 K_0 上：$x+\beta y>0$，即电换接器坐标的初始值 $\xi_0=\xi(0)=x_0+\beta y_0>0$．此时，根据状态集合 K_0 的定义，在 $-\theta<t\leqslant 0$ 区间上也必然有 $\xi>0$；因此，最低限度在 $0<t\leqslant\theta$ 区间上必有 $z=-1$，于是，系统的运动将由微分方程组(8.55)描述：

$$\dot{x}=y,$$
$$\dot{y}=-y-1.$$

这两个方程将永远成立一直到发生换舵，即 z 由-1变到$+1$时为

---

1) 给出 $t=t^*$ 瞬时的 x, y（在直线 $x+\beta y=0$ 以外)我们同时也就给出了在这一瞬时的 $\xi(\neq 0)$．在 $t^*-\theta\leqslant t\leqslant t^*$ 区间上，ξ 具有与此相同的符号(因为所处状态属于集合 K_0)，这也就确定了 $t^*-\theta\leqslant t\leqslant t^*$ 区间上的 $Z[\xi(t)]$(或者说 $t^*-\theta\leqslant t\leqslant t^*$ 区间上的 $z(t)$)，它等于$+1$或-1，这决定于 ξ 的符号．因此，给定 $t=t^*$ 瞬时的 x, y，我们就能全面地和单值地确定出 $t>t^*$ 时系统的运动，即全面地单值地确定出在 $t=t^*$ 瞬时系统的 K_0 型状态．

如果在一般情况，系统的状态以 $t=t^*$ 瞬时的 x, y，以及函数 $Z[\xi(t)]$ 在 $t^*-\theta\leqslant t\leqslant t^*$ 区间上的富氏系数 $\{a_n, b_n\}$（在 $t^*-\theta\leqslant t\leqslant t^*$ 区间上，$Z[\xi(t)]=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2\pi nt}{\theta}+b_n\sin\frac{2\pi nt}{\theta}$)给出，则状态集合 K_0 将是子空间：$a_n=b_n=0(n=1,2,\cdots)$ 和 $\frac{a_0}{2}=-\operatorname{sgn}(x+\beta y)$．

还应当指出，从完整(泛函)空间之中所以能分离出这种二维的状态集合 K_0(即系统进行某些类型的运动时所通过的状态)，是因为所研究的这种具有时间滞后的系统，是继电系统的缘故($\xi(t-\theta)$只是函数 Z 的自变量，而函数 Z 完全由 ξ 的符号确定)．

止；如果系统在 $t=0$ 时由状态 (x_0, y_0) 开始运动，并在 $t_1=t_1(x_0, y_0)$ 瞬时 ξ 达到零，则方程组(8.55)显然将描述系统在 $0<t<t_1+\theta$ 区间上的运动[1]. 这时，在 ξ 没有达到零以前，即在 $0<t<t_1$ 区间内，系统将通过属于集合 K_0 的状态，于是我们就可以用相点沿方程组(8.55)在半平面 K_0' 上的轨线(8.58)的运动，来表示系统的这种运动. 但在 $t_1<t<t_1+\theta$ 区间上，系统的状态已不再属于这一集合，因为 $t=t_1$ 时 $\xi=0$. 因此，我们引入一补充面 K_1'，将它"缝接"到半平面 K_0' 上，且与半平面 K_0'' $(x+\beta y<0)$ 重叠，并用它上面的点来表示系统的这些状态（图 417）[2]. 这一补充面 K_1'

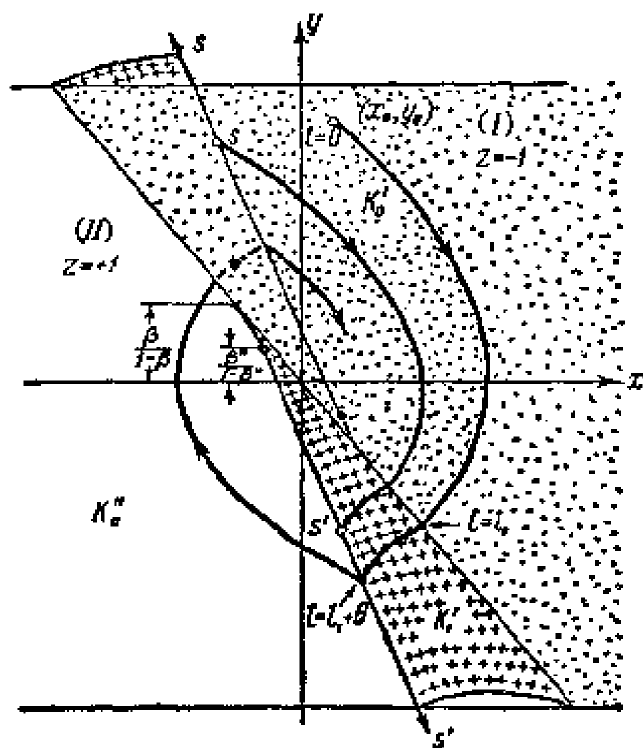


图 417

与半平面 K_0' 共同构成相面的(I)叶，此相面对应于系统由 K_0 型状态 $(\xi_1>0)$ 开始运动所通过的状态的集合，这些状态由方程组(8.55)确定.

1）由方程组(8.55)的通解(8.58)，可以导出，对于任意的 (x_0, y_0) 都存在有唯一的瞬时 $t=t_1(x_0, y_0)$，使得 $t=t_1$ 时 $\xi=0$，和 $t>t_1$ 时 $\xi<0$.

2）图 417 对应于 $0<\beta<1$ 和 θ 不很大的情况.

当 $t = t_1 + \theta$ 时(即 ξ 达到零以后经过时间间隔 θ),发生换舵,舵的坐标 z 变为 $+1$,而系统的状态又重新属于集合 K_0(对应的相点位于半平面 K_0'' 的 S' 线上). 在这以后,一直当 $z = +1$ 还成立时,亦即方程(8.55a):

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -y + 1,$$

还是正确的时候,系统在运动过程中将通过对应于相面(II)叶上的点的状态. (II)叶与(I)叶相对称,并由半平面 $K_0'': x + \beta y < 0$ 和补充面 K_1'' 构成. 在电换接器坐标达到零并由负改变为正以后再经过时间 θ,舵的坐标 z 在(II)叶的边界线 S 上重新变为-1,相点转入(I)叶,然后沿着它运动,直到落在 S' 线——(I)叶的边界线上为止,依此类推.

这样一来,如果系统的初始状态($t = 0$ 时)属于集合 K_0,则在这以后($t > 0$ 时)系统在运动过程中就只能通过属于集合 $K = K_0 + K_1' + K_1''$ 的那些状态,后者对应于图 417 所示之双叶相面上的点(相互单值而且连续). 系统的每一个这种运动,都由相面 K 上的轨线与之对应(也是单值而且连续)[1]. 很明显,既然确定系统在(I)和(II)叶上的运动的方程(8.55)和(8.55a)具有对称性,那么,(I)和(II)叶的轨线划分也就必然彼此对称(关于原点). 因此,如果只限于由 K_0 型状态开始的运动,则研究系统"船+具有时间滞后的自动操舵仪"的动力学问题,就归结为研究 S 线向 S' 线的点变换,此变换由(I)叶上的轨线(8.58)所实现[2].

下面我们来求出相轨线由(II)叶向(I)叶和由(I)叶向(II)叶的过渡线,即 S 和 S' 线的方程. 为了确定 S' 线——(I)叶的边界

---

1) 在系统作这种运动时,每两次换舵之间的时间间隔 $\Delta t > \theta$. 上面已经指出过,这些运动乃是所研究的这种具有时间滞后的继电系统的特殊类型的运动,从实际应用的观点看来,也最有研究价值的运动. 如果阐明以下问题,哪些运动(由不属于集合 K_0 的状态开始的运动),当 t 增加时可以转变为我们所研究的这种类型的运动,那将会是很有意义的.

2) 选择 S 和 S' 线上的坐标 s 和 s' 时,应使这些线上彼此对称的点具有相等的 s 和 s'.

线——我们指出，ξ 达到零，由正变到负，只发生在半直线

$$\xi = x + \beta y = 0, \quad \dot{\xi} = \dot{x} + \beta \dot{y} = (1 - \beta)y - \beta < 0$$

的诸点，即点

$$x = -\beta u, \quad y = u$$

上，其中

$$\text{当 } \beta < 1 \text{ 时, } u < \frac{\beta}{1-\beta}, \text{ 和 当 } \beta > 1 \text{ 时, } u > \frac{\beta}{1-\beta}.$$

由于(I)叶的边界线 S' 对应于，ξ 达到零以后经过时间 θ，系统进入的状态所构成的集合，因此，如果在通解(8.58)中，以半直线上：$\xi = 0$，$\dot{\xi} < 0(x_0 = -\beta u,\ y_0 = u)$上的点为初始点，并令 $t = \theta$，则可以从中得出这条线 S' 的方程：

$$y = -1 + (u + 1)e^{-\theta},$$
$$x = -\beta u - \theta + (u + 1)(1 - e^{-\theta}).$$

即 S' 线乃是半直线：

$$x + \beta^* y = -\frac{\alpha^*}{2},$$

其中

$$\beta^* = \beta e^{\theta} - (e^{\theta} - 1), \ \frac{\alpha^*}{2} = (\beta - 1)(e^{\theta} - 1) + \theta, \quad (8.68)$$

初始点$\left(对应于\ u = \frac{\beta}{1-\beta}\right)$为

$$y_{始} = -1 + \frac{1}{1-\beta} e^{-\theta} = \frac{\beta^*}{1-\beta^*}.$$

半直线 S 与半直线 S' 相对称：其方程为

$$x + \beta^* y = +\frac{\alpha^*}{2},$$

其初始点则为 $y = -\frac{\beta^*}{1-\beta^*}$的点$\Big($在半直线 S 上，若 $\beta^* < 1$，则 $y > -\frac{\beta^*}{1-\beta^*}$，若 $\beta^* > 1$，则 $y < \frac{\beta^*}{\beta^*-1}\Big)$。在 α^* 和 β^* 取不同

符号时，所研究系统的双叶相曲面表示在图 418—421 上[1].

如果 $\beta < 1$，但滞后时间 θ 不太大（即 $\beta < 1 - e^{-\theta}$）或者 $\beta > 1$，则 $\alpha^* > 0$，$\beta^* > 0$；从而我们所研究的这种系统，即系统“船＋二位式具有时间滞后和速度校正的自动操舵仪”，与系统“船＋具有某等价空间滞后 α^* 和等价速度校正 β^* 的自动操舵仪”，将具有相同的动力学(相同的运动)．这一情况完全可以归结为本节第一小节中曾研究过的情况：系统的一切（由 K_0 型状态开始的）

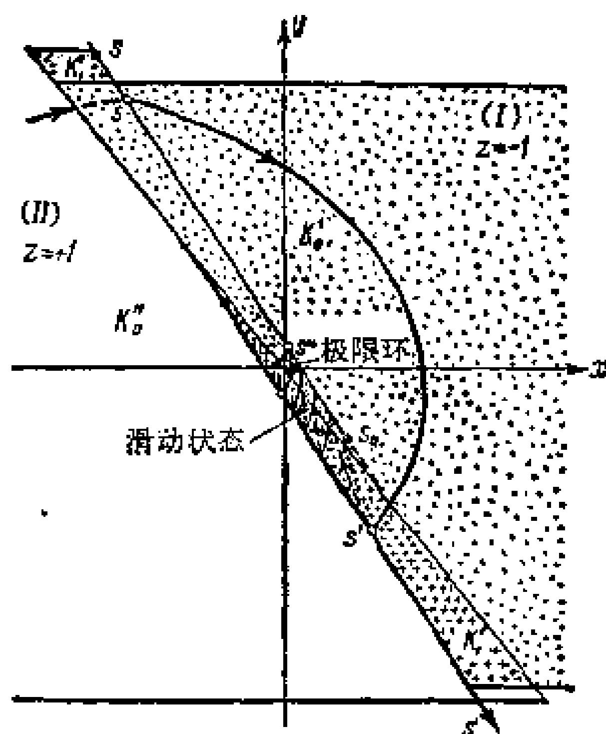


图 418

运动最终都将引起航向的自振，而且滞后 θ 越小和速度校正 β 越大，振幅和周期就越小．当时间滞后 θ 很小时，在相平面上出现齿型相轨线，介于两条很近的半直线 S 和 S' 之间，这相当于自动操舵仪处于滑动状态，此时舵在船两弦之间频繁（θ 越小越频繁）更

---

1) 需要指出，$\beta^* - \beta = (\beta - 1)(e^{\theta} - 1)$；因此，$\beta > 1$ 时 $\beta^* > \beta$，$\beta < 1$ 时 $\beta^* < \beta$．同时，$\beta > 1$ 时 $\alpha^* > 0$，若 $\beta < 1$，则 α^* 和 β^* 都可以是负值，条件是 θ 足够大，即 $\beta < 1 - e^{-\theta}$ 时 $\beta^* < 0$，$\beta < 1 - \frac{\theta}{e^{\theta} - 1}$ 时 $\alpha^* < 0$；在 θ 增加的过程中，首先变成负值的是 β^*，然后才是 α^*，因此，如果 $\alpha^* \leqslant 0$，则肯定有 $\beta^* < 0$．

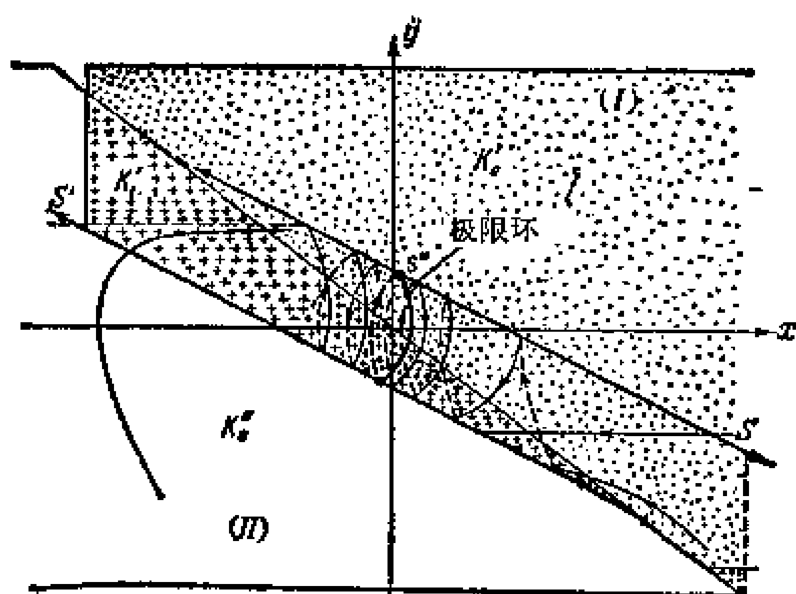


图 419

换(图 418 和 419)[1]。

当 θ 较大$\left(1-\frac{\theta}{e^{\theta}-1}\leqslant\beta<1-e^{-\theta}\right)$时，$\alpha^*\geqslant 0$，而 $\beta^*<0$。这说明，具有此种时间滞后之自动操舵仪相当于具有某一等价空间滞后 α^* 和反接的速度校正（不是以前那种超前的，而是“滞后”的速度校正：$\beta^*<0$）。对于这种情况的研究，与前一小节曾进行的研究无任何区别：拉梅尔图完全一样（图 413），只是 $\tau_0>\tau_1$，这就排除了存在滑动状态的可能性；所有轨线都将趋向（$t\to+\infty$ 时）唯一的稳定的极限环（图 420）。

在本节的结尾，我们来简单研究一下最后一种情况：$\beta<1-\frac{\theta}{e^{\theta}-1}$，即 α^* 及 β^* 都是负值的情况。这种情况的相面表示在图 421 上。在这里，自动操舵仪的时间滞后已等价于空间超前（因为

1）当 θ 很小时，$\beta^*\approx\beta-(\beta-1)\theta\approx\beta$，$\frac{\alpha^*}{2}=\beta\theta$，因此自振周期（准确到 θ^2 阶项）为 $2\tau^*=2\frac{\alpha^*}{\beta^*}\approx 4\theta$。在滑动状态中，每两次换舵间的时间间隔 Δt，也具有这样的量阶。θ 很小时，航向自振振幅显然等于 $\bar{x}\approx\frac{\alpha^{*2}}{8\beta^{*2}}=\frac{\theta^2}{2}$（参看 583 页的脚注）。

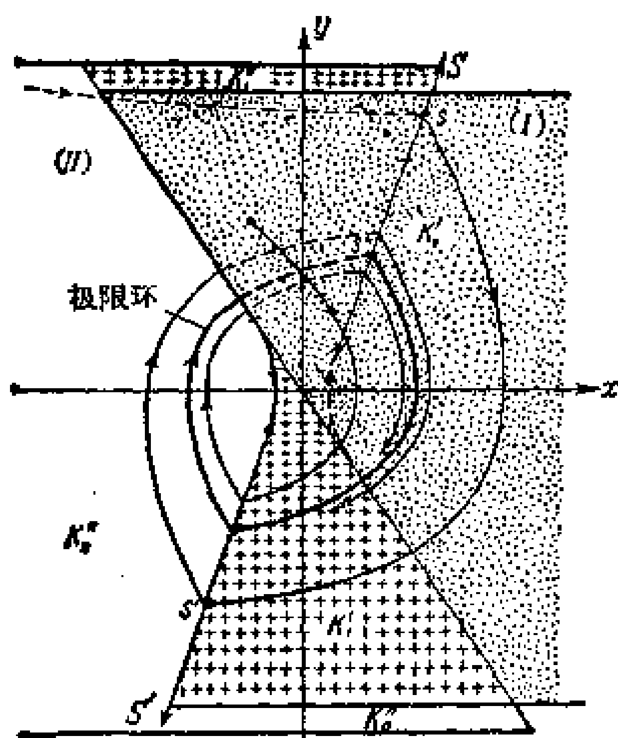


图 420

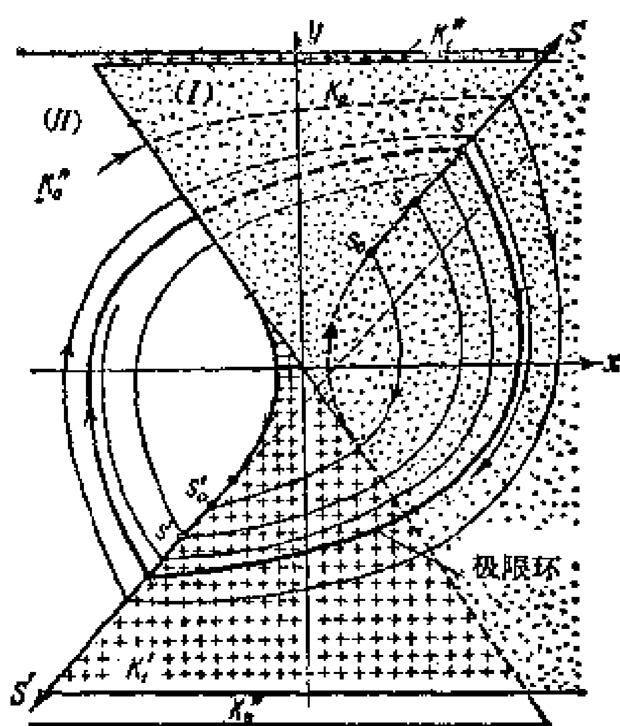


图 421

$\alpha^* < 0$)，并具有滞后的速度校正 $\beta^* < 0$. 选取 $s = y$ 和 $s' = -y$ 作为半直线 S 和 S' 上的坐标$\left(s \text{ 和 } s' > s_0 = -\frac{\beta^*}{1-\beta^*}\right)$. 此时，半直线 S 对半直线 S' 的点变换（由(I)上的轨线所实现的）的对应函数仍然满足表示式 (8.64)，只是应当把其中的 α 和 β 代之以负值 α^* 和 β^*:

$$\left.\begin{aligned} s &= -1 + \frac{\tau - \alpha^*}{(1-\beta^*)(1-e^{-\tau})}, \\ s' &= +1 - \frac{\tau - \alpha^*}{(1-\beta^*)(e^{\tau}-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{8.69}$$

与第一小节中曾研究过的 $\alpha>0$ 的情况不同，在这里 ($\alpha=\alpha^*<0$)，函数 $\Psi_1(\tau)$ (参看 (8.65)) 在 $\tau = \tau_1'$ (其值由方程 $\alpha^* + e^{\tau} - \tau - 1 = 0$ 确定)处具有极小值，因此 $\Psi_2(\tau)$ 为 τ 的单调减函数. 其次我们还有：$\tau \to +0$ 时 Ψ_1 和 $\Psi_2 \to +\infty$，而 $\tau \to +\infty$ 时 $\Psi_1 \to +\infty$，$\Psi_2 \to +0$ (图 422). 因此，根据(8.69)的第一个关系式，每一个数值 $s > s_0 = \frac{-\beta^*}{1-\beta^*}$ 都有两个 τ 值与之对应，其中一个大于

τ_1'，另一个小于 τ_1'[1]．这显然是由于从 S 上之点出发的相轨线，在没有到达 S' 以前，先与其延长线相交，即在 $y > \frac{\beta^*}{1-\beta^*}$ 的点上（S' 以外）与直线 $x+\beta^* y = -\frac{\alpha^*}{2}$ 相交的缘故．因此，根据(8.69)

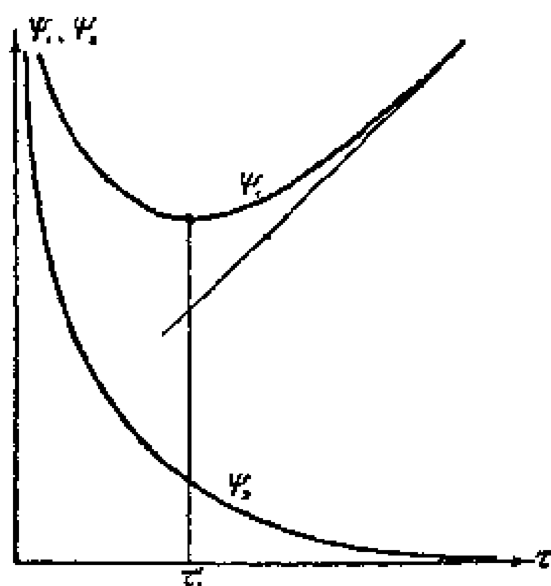


图 422

所确定的对应于给定 s 值的两个 τ 值中，较大的一个才是相点半直线 S 的 s 点沿着轨线运动到 S' 的 s' 点所需之穿越时间 τ，也就是说，在表示式(8.69)中，我们应当设 $\tau > \tau_1'$[2]．对应于 S 上的起始点 s_0 的 τ 值以 τ_0 表示[3]． 此时，由于 $\tau > \tau_1'$ 时 $\frac{d\Psi_1}{d\tau} > 0$ 和 $\frac{ds}{d\tau} > 0$，半直线 S 上的 $s > s_0$ 的点，必对应于参数值 $\tau > \tau_0 > \tau_1'$，而且 τ 由 τ_0 变到 $+\infty$ 时，s 由 $s_0 = \frac{-\beta^*}{1-\beta^*}$ 单调地增加到 $+\infty$．

所研究之情况 $\left(\text{即 } \beta < 1 - \frac{\theta}{e^\theta - 1}\right)$ 的拉梅尔图表示在图

1) 不难证实，根据(8.68)必有 $s_0 = \frac{-\beta^*}{1-\beta^*} > s_{极小} = (s)_{\tau=\tau_1'}$．

2) 原书为 τ_2'——译者注．

3) 和以前一样，τ_0 决定于方程 $\Psi_1(\tau_0) = 1 - 2\beta^*$，但在这里 τ_0 应理解为此方程的那个较大的根 $\tau_0 > \tau_1'$．

423 上．不难证实，在这种情况下，半直线 S 对半直线 S' 的点变换具有唯一的稳定不动点[1]．此不动点在相面上对应于唯一的稳定的极限环，所有相轨线(当 $t\to+\infty$ 时)都向它趋近(图 421)．

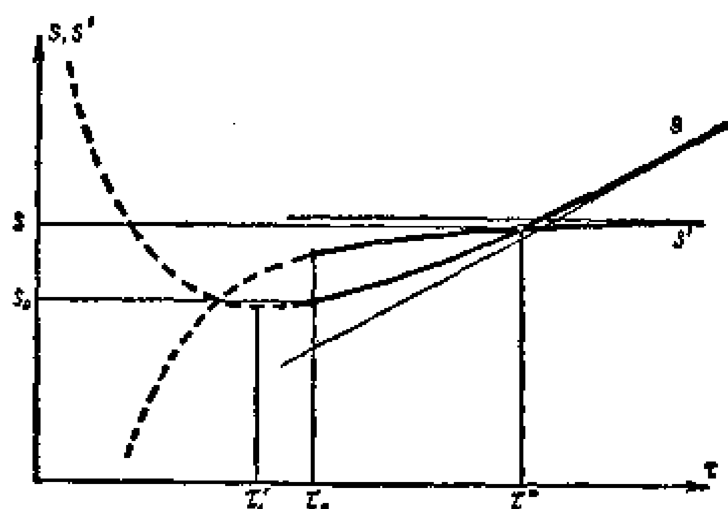


图 423

§8．继电自动调节系统(具有死区和空间滞后)

上两节中，我们曾以自动操舵仪为例，研究了双位式自动调节系统，其中由于调节器的滞后，在任意初始条件下，都建立起自振．在这一节，我们研究较复杂的二阶继电自动调节系统的动力学，在此系统的组成部分中包含着无惯性的继电元件，后者的特性曲线是对称的，表示在图 424 上[122, 102][2]．继电元件的输出量 U 可以取三个数值：$+U_0$，0 或 $-U_0$ 中的一个，这取决于输入坐标 σ 的数值和前一瞬时系统所处的状态．如果系统在前一瞬时处于"关闭"状态($U=0$，这只有在 $|\sigma|<\sigma_0$ 时才可能)，则此"关闭"状态将一直保持到输入坐标 σ 在变化过程中超出"死区"范围：$|\sigma|<\sigma_0$ 为

1) 半直线 S 对半直线 S' 的点变换之不动点的存在性、唯一性和稳定性的证明，与第一小节中曾进行过的证明，完全一样．

2) 无惯性的元件，如其输出量只能取某几个离散值，则称之为继电元件．由继电元件和线性元件组成的系统，则称之为继电系统．

止．达到死区边界时，此元件向某一方向"接通"，即U将发生瞬时的(跳跃的)变化：$\sigma=+\sigma_0$ 时由0到$+U_0$，$\sigma=-\sigma_0$ 时由0到$-U_0$．元件被"接通"后，不仅在死区外部，而且在后者的某一部分里，将保持在这一状态中：$\sigma>\sigma_1$ 时，保持$U=+U_0$ 的状态；$\sigma<-\sigma_1$ 时，保持$U=-U_0$的状态($|\sigma_1|\leqslant\sigma_0$)．只有在$\sigma=\pm\sigma_1$ 时原来"接通"的元件才能被"关闭"．例如，当 $-\sigma_0<\sigma<-\sigma_1$ 和$\sigma_1<\sigma<\sigma_0$ 时，元件的状态（即其输出坐标U)完全由它的前期状态，即元件原来处于"接通"还是"关闭"的状态来决定．这种元件（具有如图 424 所示的特性曲线）通常用三个参数来表征：元件"接通"后，输出坐标的绝对值 U_0，死区宽度σ_0，以及所谓的继电元件的回归系数 $\lambda=\sigma_1/\sigma_0(-1\leqslant\lambda\leqslant1)$[1]．

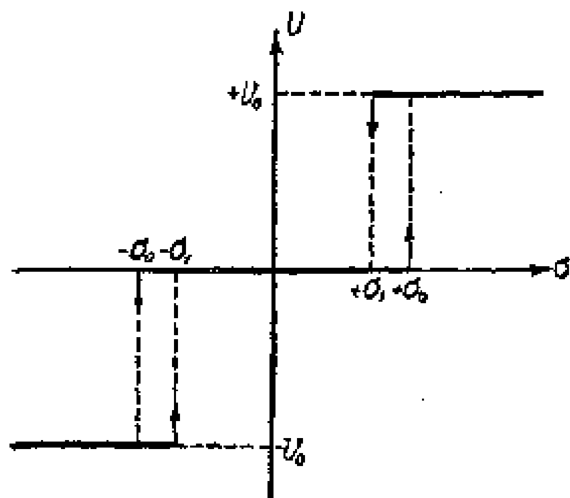


图 424

这样，所研究的这种自动调节系统的继电元件不但具有空间滞后(即带有两个非单值区的"滞后"型特性曲线)，而且还具有死区(非灵敏区)．一般电磁继电器(或继电器组)，各种电接触装置，以及"恒速"伺服机(若考虑到换接器中的死区和间隙)都可以理想化为这种继电元件[2]．

下面我们将会看到，和刚研究过的系统："船＋自动操舵仪"一样，继电元件的空间滞后也是系统中可能出现自振的原因．但在这里，与具有无死区调节器的系统不同，可以用强的硬反馈式强的速度校正，来消除系统中的自振．

1. 某些继电系统的运动方程． 设有一继电随动系统，其方

1) 在上一节研究的那种具有空间滞后的自动操舵仪中，$\sigma_1=-\sigma_0$，即 $\lambda=-1$．

2) 在一般的电磁继电器中，铁心对于衔铁的吸引力随着空气间隙的减小而增大．因此，铁心吸引衔铁，比起相反的过程来，就需要较大的电流．电接触装置，由于断开时有电弧产生，也同样具有"滞后"型特性曲线．

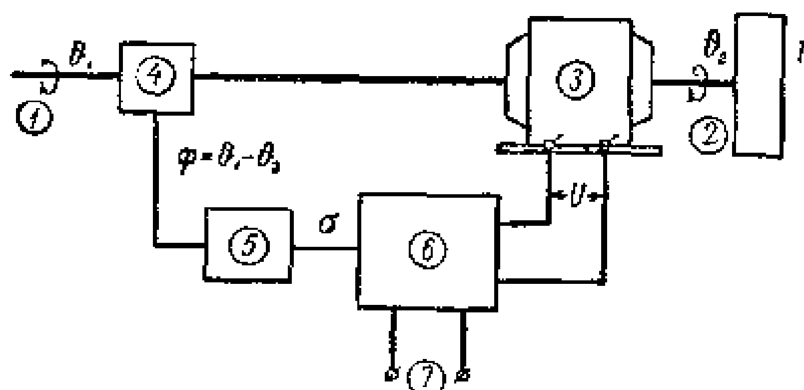


图 425 继电随动系统的方块图
1——"主动轴"； 2——"随动轴"； 3——伺服电动机； 4——差动器(偏差传感器)； 5——变换(微分)元件； 6——继电元件（控制伺服机的继电器组）； 7——伺服机的电源．

块图表示在图 425 上．这种系统的伺服机（他激电动机，激磁电流不变）是由具有图 424 所示特性曲线的继电元件所控制的．其电枢电压为继电元件的输出坐标．继电元件本身由系统偏差 $\varphi=\vartheta_1-\vartheta_2$ 及其导数控制．设继电元件的输入坐标为 $\sigma=\varphi+B\dfrac{d\varphi}{dt}$，$I$——随动系统随动轴(包括伺服机)的惯性矩，$k\dfrac{d\vartheta_2}{dt}$——电动机电枢的反电势，$i$——电枢电流，$Ai$——电动机的转动力矩，$R$——电枢电路的电阻[1]．此时，随动系统随动轴的运动方程，以及电枢电流的振动方程，显然可以写成如下形式：

$$I\frac{d^2\vartheta_2}{dt^2}=Ai,\quad Ri=U-k\frac{d\vartheta_2}{dt}$$

或

$$I\frac{d^2\vartheta_2}{dt^2}+\frac{Ak}{R}\frac{d\vartheta_2}{dt}=\frac{A}{R}U^{2)}.$$

1）我们假设，当继电器组处于中立位置(电动机电枢电压 $U=0$)时，电动机电枢接通"动刹车"电阻．选择此电阻时，应使电枢电路的全电阻在继电器组处于三种位置时都取同一数值．

2）我们没有考虑作用在随动系统随动轴上的摩擦．可以指出，考虑粘性摩擦并不改变系统运动方程的形式，而只是增大 $\dfrac{d\vartheta_2}{dt}$ 的系数．

我们研究随动系统运动的一个特例——输入轴不动（ϑ_1 = 常数）时系统的运动．这种情况中的运动方程形式如下：

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{Ak}{R}\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{A}{R}U,$$

$$\sigma=\varphi+B\frac{d\varphi}{dt},$$

若采用无量纲形式，则为：

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}+\dot{x}&=-u(\xi),\\ \xi&=x+\beta\dot{x}.\end{aligned}\right\}\qquad(8.70)$$

在方程(8.70)中

$$x=\frac{Ak^2}{IRU_0}\varphi,\quad \xi=\frac{Ak^2}{IRU_0}\sigma,\quad u=\frac{U}{U_0}$$

——新的无量纲变量，字母上方的圆点表示对于新的无量纲时间

$$t_{新}=\frac{Ak}{IR}t_{旧}$$

的导数．$u=u(\xi)$——继电器的折算特性，表示在图 426 上，其折算死区为

$$\varepsilon=\frac{Ak^2\sigma_0}{IRU_0}$$

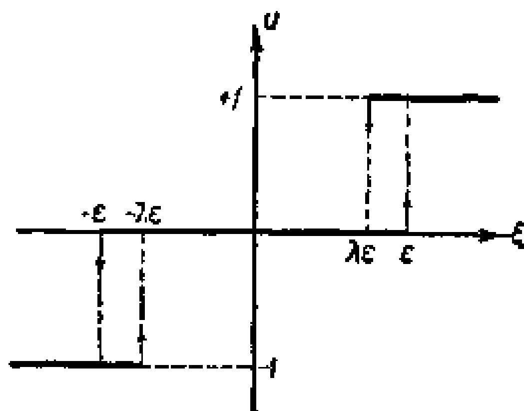


图 426

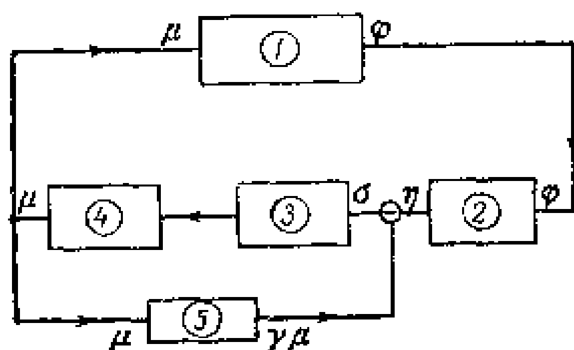


图 427 间接继电调节系统的方块图
1——调节对象； 2——敏感元件； 3——继电元件(伺服机的换接器)； 4——"恒速"伺服机； 5——硬反馈.

$\beta=\frac{Ak}{IR}B$——按偏差速度的折算(无量纲)控制系数.

具有"恒速"伺服机和硬反馈的间接调节系统（图 427；参看图 407），如采用适当的假设，其运动方程也可以归结为方程组(8.70)．如果考虑到"恒速"伺服机换接器中的间隙和死区，则伺服机的方程有如下形式：

$$\frac{d\mu}{dt}=\begin{cases}+\frac{1}{T_s} & 当\ \sigma>\lambda\sigma_0\ 时,\\ 0 & 当\ |\sigma|<\sigma_0\ 时,\\ -\frac{1}{T_s} & 当\ \sigma<-\lambda\sigma_0\ 时,\end{cases}$$

其中 σ_0 为死区的宽度，λ 为继电元件——伺服机换接器（此种伺服机具有如图 424 所示的特性曲线，但应将其中的 U 以 $\frac{d\mu}{dt}$，U_0 以 $\frac{1}{T_s}$ 代替）的回归系数[1]。其余线性元件的方程（具有正自调的调节对象，理想敏感元件以及硬反馈），与本章 § 6 第 5 小节一样，可写成：

$$T_a\frac{d\varphi}{dt}+k\varphi=\mu,$$

$$\delta\eta+\varphi=0,$$

$$\sigma=\eta-\gamma\mu.$$

这些方程经过变换：

$$\varphi=\frac{T_a}{k^2T_s}x,\quad \sigma=-\frac{T_a\left(\frac{1}{\delta}+\gamma k\right)}{k^2T_s}\xi,\quad T_s\frac{d\mu}{dt}=-u$$

和

$$t_{旧}=\frac{T_a}{k}t_{新},$$

则可简化为方程组（8.70），其无量纲死区宽度和反馈系数分别等于

$$\varepsilon=\frac{k^2T_s\sigma_0}{T_a\left(\frac{1}{\delta}+\gamma k\right)}\ 和\ \beta=\frac{\gamma k}{\frac{1}{\delta}+\gamma k}(0<\beta<1).$$

2. 相面. 我们看到，所研究的两种继电自动系统可以归结

1）如果用 l 和 Δ 表示换接器接触点的距离（图 407）和换接装置中的间隙，并采用与 σ 相同的相对单位，则

$$\sigma_0=\frac{l+\Delta}{2}\ 和\ \lambda=\frac{l-\Delta}{l+\Delta}.$$

为同一种动力学系统，并都是由方程组(8.70)所描述的．为了简化对此种系统运动的研究，我们今后将使用变量 $y=\dot{x}$ 和 ξ．采用这种变量以后，系统的运动方程可写成如下一阶微分方程组：

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}&=-y-u(\xi)\\ \dot{\xi}&=(1-\beta)y-\beta u(\xi)\end{aligned}\right\}\tag{8.71}$$

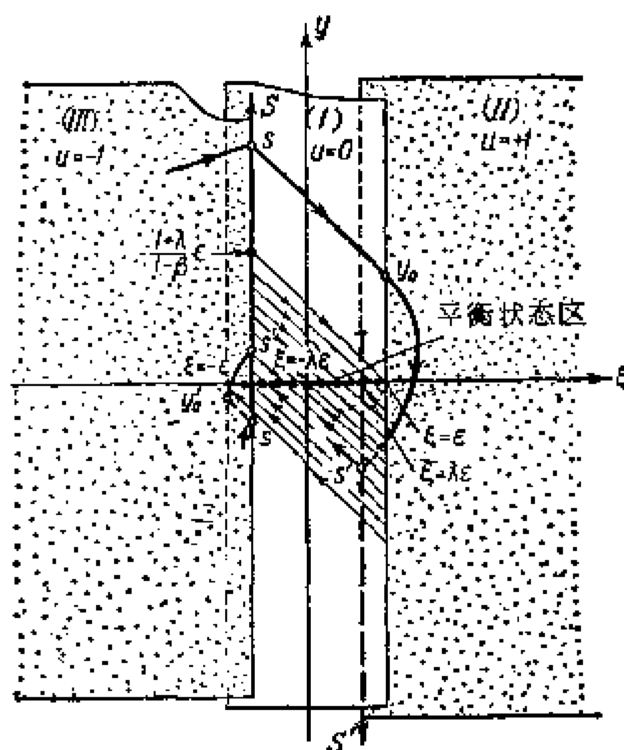


图 428

由于继电元件的特性曲线 $u=u(\xi)$ 具有两个非单值区，系统的相面将为图 428 所示之三叶面，它是由带状平面(I)：$|\xi|<\varepsilon$，其各点的 $u=0$（继电元件位于中立位置），以及与其相迭接的半平面(II)：$\xi>\lambda\varepsilon$ 和(III)：$\xi<-\lambda\varepsilon$ 组成的．后二者相当于继电元件的接通状态（在半平面(II)上 $u=+1$，在半平面(III)上 $u=-1$）．相点由带状平面(I)向半平面(II)和(III)的过渡只发生在前者的边界上，即 $\xi=\pm\varepsilon$ 时，而相反的过渡——则在半平面的边界上(分别在 $\xi=+\lambda\varepsilon$ 和 $\xi=-\lambda\varepsilon$ 上)，而且，相点由相面的一叶过渡到另一叶时，其坐标 ξ, y 连续地变化．

很容易看出，相轨线具有相对原点的对称性，这乃是继电元件

特性曲线 $u=u(\xi)$ 的对称性的直接推论.

在带状平面(I)上，$u=0$（继电元件位于中立位置)，因而运动方程组(8.71)将有如下形式:

$$\left.\begin{array}{l}\dot{y}=-y,\\ \dot{\xi}=(1-\beta)y\\ \text{或}\\ \dfrac{dy}{d\xi}=-\dfrac{1}{1-\beta}.\end{array}\right\}\qquad(8.71a)$$

因此，横轴上位于此带状平面范围内($|\xi|<\varepsilon, y=0, u=0$)的所有点都是平衡状态，而且是稳定的，这是因为在带状平面(I)上，相点沿着直线相轨线

$$\xi+(1-\beta)y=\text{常数}$$

趋向横轴(图 429). 显然，所有相轨线，如其上的点满足不等式

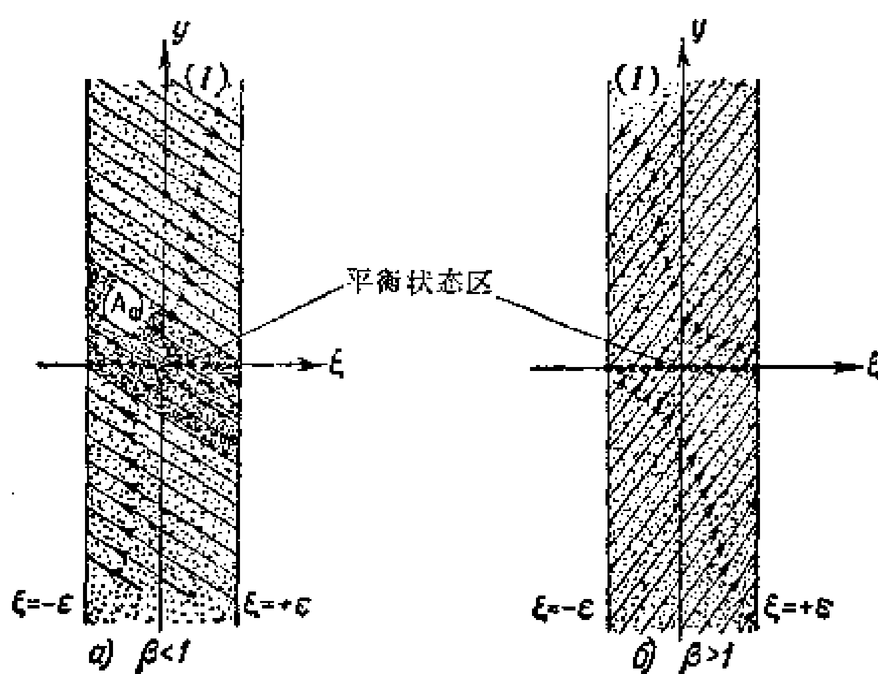


图 429

$$|\xi+(1-\beta)y|<\varepsilon,$$

都将渐近地($t\to+\infty$ 时)趋向这些平衡状态.

在对应于继电元件接通状态 $u=+1$ 的半平面(II)上，系统的运动方程可写成如下形式:

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}+y&=-1,\\ \dot{\xi}&=(1-\beta)y-\beta.\end{aligned}\right\}\tag{8.71b}$$

这里没有平衡状态，所有相轨线（正确些说，是它们在(II)叶外部的延长线）都渐近地趋向相直线 $y=-1$，$\xi=-t+$ 常数. 相点一旦进入(II)叶，它必定沿相应的相轨线运动到边界线 $\xi=+\lambda\varepsilon$，然后并转到(I)叶上. 在图 430 上表示出相平面(II)叶上的相轨线划分（相当于 $\beta<1$ 的情况）. 在(III)叶上（此处 $u=-1$），由于方程组(8.71)的对称性，其相轨线显然与(II)叶上的相轨线相对称.

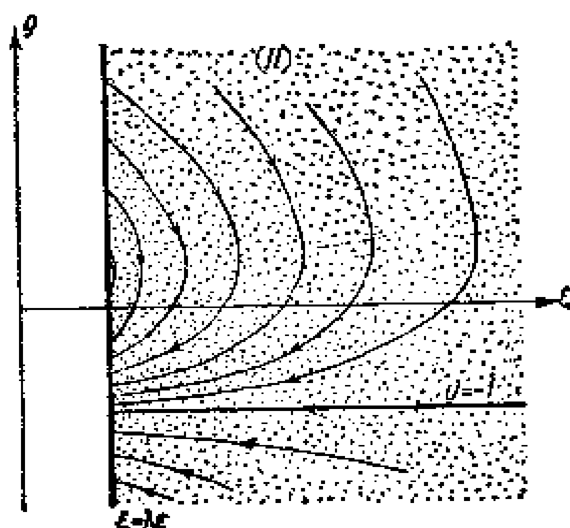


图 430

鉴于我们所研究的这种继电系统的运动性质与差值 $\beta-1$ 的符号关系极大，下面我们将分别研究 $\beta<1$ 和 $\beta>1$ 两种情况[1].

3. $\beta<1$ 时的点变换. 下面我们从最有意义的情况：$\beta<1$ 开始，研究继电系统的动力学及其相面上的轨线划分. 带状平面(I)和(II)叶上的轨线划分已分别表示在图 429a 和 430 上. 显然有两种相轨线，两类系统的运动. 从带状平面(I)上满足不等式 $|\xi+(1-\beta)y|<\varepsilon$ 的点开始的相轨线，渐近地趋向系统的平衡状态，不超出带状平面(I)的边界. 这相当于继电元件总处于关闭状态时系统的运动，最终将建立起某种平衡状态. 所有其余相轨线都从一叶过渡到另一叶（但一定通过带状平面(I)），这相当于继电器不断换接时系统的运动.

---

1) 在临界情况 $\beta=1$ 中，带状平面(I)上的相轨线为铅垂直线，相点渐近地趋向平衡状态：$|\xi|<\varepsilon$，$y=0$，$u=0$. 从(II)和(III)叶开始的相轨线必定到达边界线，然后趋向（$t\to+\infty$ 时）平衡状态：$\xi=\pm\lambda\varepsilon$，$y=0$，$u=0$. 这就是说，当 $\beta=1$ 时，系统的运动是衰减的，最终将建立起平衡状态.

研究第二类相轨线(通过相面上不止一个叶的相轨线)，例如确定极限轨线(t增加时，所有上述轨线都向它趋近的轨线)时，我们仍然象在以前曾研究过的问题中一样，把问题归结为研究直线对直线的某一点变换．为此，在相面上(图 428)画出两条无切半直线 S: $\xi = -\lambda\varepsilon$, $y > -\dfrac{\beta}{1-\beta}$ 和 S': $\xi = +\lambda\varepsilon$, $y < \dfrac{\beta}{1-\beta}$, 通过其上各点的相轨线分别从(III)叶和(II)叶进入带状平面(I)[1]．在这两条半直线上，引入坐标 $s = y$(在半直线 S 上)和 $s = -y$(在半直线 S' 上)，选取的准则是使二半直线上彼此对称的点，对应于坐标 s 的同一值(显然 $s > -\dfrac{\beta}{1-\beta}$)．除保持在带状平面(I)范围内趋向平衡状态的相轨线以外，系统的所有相轨线都将与所造出的这两条半直线 S 和 S' 相交．因此，对每条相轨线之性状的研究，可以归结为对此轨线与这两条半直线的交点序列的研究．在这一序列里，每一后继点 s'，如果存在，都单值地决定于前行点 s，即有：

$$s' = \Pi(s)$$

由于系统的相图(即整个相面)以及它的轨线划分都关于原点对称，因而通过半直线 S 和 S' 上各对称点 s 的轨线也必然彼此对称．因而，它们与半直线的后继交点，也必然具有相同的坐标 s'．上面说的这些，显然使我们有可能不必去区分半直线 S 和 S'(将彼此相对称的各点等同看待)，从而无论所研究轨线原来与哪条半直线(S 或 S')相交，都可以采用统一的点变换 $s' = \Pi(s)$．

为了计算出此点变换的后继函数，我们研究任意一条从(III)叶向带状平面(I)过渡的相轨线——为了确定起见，设其过渡时通过半直线 S 上的 s 点(图 428)．在带状平面(I)内此轨线将是直线

---

1) 根据(8.7)的第二方程，在半直线 S 上：

$$\dot{\xi} = (1-\beta)y + \beta > 0,$$

在半直线 S' 上：

$$\dot{\xi} = (1-\beta)y - \beta < 0.$$

$$\xi + (1-\beta)y = -\lambda\varepsilon + (1-\beta)s, \tag{8.72}$$

因此，当$|-\lambda\varepsilon + (1-\beta)s| < \varepsilon$，即

$$-\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon < s < \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon \tag{8.72a}$$

时，相点在带状平面 (I) 内将渐近地趋向相应的平衡状态，而所研究的这条相轨线与半直线 S' 和 S 将没有后继交点．当

$$s \geqslant \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon \tag{8.72b}$$

时，相点在点

$$\xi = +\varepsilon,\ y = y_0 = s - \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon \geqslant 0$$

处与带状平面(I)的右边界线相交，然后在(II)叶内运动，其相轨线决定于方程组 (8.71b) 及初始条件：$t = 0$ 时 $\xi = +\varepsilon,\ y = y_0$，即：

$$y = -1 + (1 + y_0)e^{-t}$$

$$\xi = \varepsilon - t + (1-\beta)(1+y_0)(1-e^{-t}),$$

最后必定到达此叶的边界线，即半直线 S' 上[1]．相点在(II)叶内的穿越时间以 τ 表示．这样，在 $t = \tau > 0$ 时，$\xi = +\lambda\varepsilon$，$y = -s'$，从而应用关系式 $s = y_0 + \dfrac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$，可得后继函数的参数表示式：

$$\left.\begin{aligned} \text{当 } s \geqslant \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon \text{ 时 } s &= -1 + \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon + \frac{\tau - (1-\lambda)\varepsilon}{(1-\beta)(1-e^{-\tau})}, \\ s' &= +1 - \frac{\tau - (1-\lambda)\varepsilon}{(1-\beta)(e^{\tau}-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{8.73a}$$

最后，当

$$s \leqslant -\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon \tag{8.72c}$$

时(这只有当 $\beta > (1-\lambda)\varepsilon$ 时才可能)，相点沿轨线(8.72)运动，在纵坐标为

$$y_0' = s + \frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon \leqslant 0$$

---

1) 我们选择相点位于带状平面(I)的右边界，即直线 $\xi = +\varepsilon$ 那一瞬时为时间的起点．在这里和以后，我们将理解 t 为新的无量纲时间 $t_{新}$．

的点处，到达带状平面(I)的左边界线，然后在半平面(III)上运动，经过某一时间间隔 τ 后，重新返回半直线 S (在 s' 点)。不难看出，在这种情况下，后继函数将有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} \text{当 } s \leqslant -\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon \text{ 时} \quad s &= +1-\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon-\frac{\tau-(1-\lambda)\varepsilon}{(1-\beta)(1-e^{-\tau})}, \\ s' &= +1-\frac{\tau-(1-\lambda)\varepsilon}{(1-\beta)(e^{\tau}-1)}. \end{aligned}\right\} \quad (8.73\text{b})$$

关系式 (83.7a)和(83.7b) 完全确定了我们关心的半直线 S 和 S' 的点变换 $s'=\Pi(s)$，或为二半直线对自身的变换，或为二半直线彼此间的相互变换 (由系统的相轨线所实现的)：根据区间(8.72a)以外之先行点的坐标 s，可以单值确定变换参数 τ，而 τ 本身又单值地确定后继点的坐标 s' (表示 τ 与 s 和 s' 与 τ 之间关系的函数，不仅是单值的，而且是连续的；今后我们将用 $\tau=f(s)$ 和 $s'=g(\tau)$ 表示它们)。

4. 拉梅尔图. 下面我们着手研究后继函数 $s'=\Pi(s)$ 的参数表示式 (8.73a) 和 (8.73b)，并在其中采用上节曾引入过的函数 $\Psi_1(\tau)$ 和 $\Psi_2(\tau)$ (参看 (8.65) 和图 412)。如果在 (8.65) 中代入 $\alpha=(1-\lambda)\varepsilon \geqslant 0$ (提醒一下，继电元件的回归系数 $-1\leqslant\lambda\leqslant1$)，则后继函数 $s'=\Pi(s)$ 可写成如下形式：

$$s=\left\{\begin{aligned} &-1+\frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon+\frac{\Psi_1(\tau)}{1-\beta} \quad \text{当 } s\geqslant\frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon \text{ 时}, \\ &+1-\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon-\frac{\Psi_1(\tau)}{1-\beta} \quad \text{当 } s\leqslant-\frac{1-\lambda}{1-\beta} \text{ 时} \end{aligned}\right\} \quad (8.73)$$

$$s'=1-\frac{\Psi_2(\tau)}{1-\beta}.$$

将对应于 $s=\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ 和 $s=-\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ 的 τ 值以 τ_0 表示之；显然，τ_0 单值决定于方程

$$\Psi_1(\tau_0)=1-\beta \quad (8.74)$$

或

$$(1-\beta)(1-e^{-\tau_0})=\tau_0-(1-\lambda)\varepsilon$$

而 τ_0 本身又单值地决定后继点坐标的初始值(当 $\tau=\tau_0$ 时)

$$(s')_{\tau=\tau_0} = s_0' = 1 - e^{-\tau_0} = \frac{\tau_0 - (1-\lambda)\varepsilon}{1-\beta}. \qquad (8.74a)$$

此时$(1-\lambda)\varepsilon < \tau_0 < \tau_1$，其中 τ_1——Ψ_2 达极大值时的 τ 值[1]. 那么，由于 Ψ_1 为 τ 的单调增函数，要想获得 $s \geqslant \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ 和 $s \leqslant -\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon$，变换参数 τ 显然必须在 $\tau_0 \leqslant \tau < +\infty$ 区间里变化.

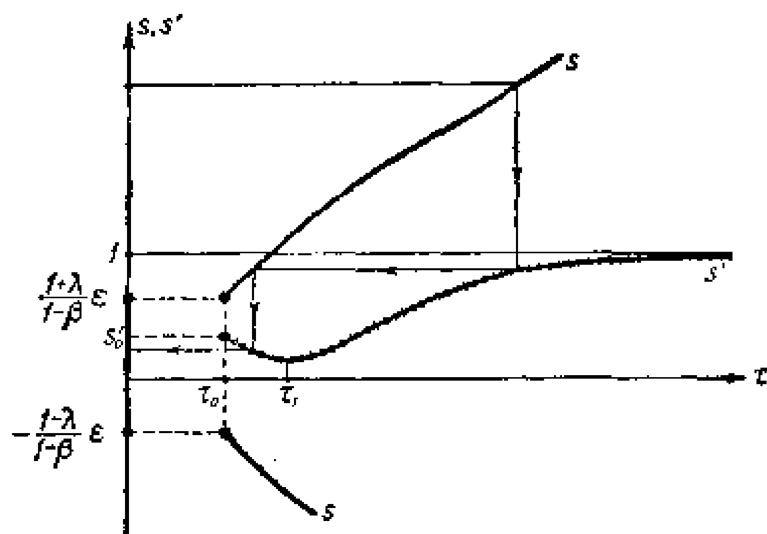


图 431

现在我们来绘制拉梅尔图(图 431—433)，横轴表示变换参数 τ，纵轴表示轨线与半直线 S 和 S' 的前行和后继交点的坐标 s 和 s'. 首先我们看到，由于不等式 $\frac{d\Psi_1}{d\tau} > \left|\frac{d\Psi_2}{d\tau}\right|$[2] 和 $\beta < 1$ 对于任意 $\tau \geqslant \tau_0$ 都有

$$\left|\frac{ds'}{d\tau}\right| < \left|\frac{ds}{d\tau}\right|, \qquad (8.75)$$

---

1) 与前一节相同，τ_1 由方程 $\Psi_1(\tau_1) = 1$ 单值确定，并为 $\alpha = (1-\lambda)\varepsilon$ 的单调增函数(α 很小时，$\tau_1 = \sqrt{2\alpha}$)。相应的最小值

$$(s')_{最小} = 1 - \frac{e^{-\tau_1}}{1-\beta} > -\frac{\beta}{1-\beta}.$$

2) 这是从不等式$\frac{d\Psi_1}{d\tau}>0$，$\frac{d}{d\tau}[\Psi_1 + \Psi_2]>0$ 和$\frac{d}{d\tau}[\Psi_1 - \Psi_2]>0$ 中导出的. 上述不等式在前一节已对任意的 $\tau>0$ 证明过.

图 432

图 433

其次，从关系式(8.73)可以导出

$$\left.\begin{aligned}
&s \leqslant -\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon \text{ 时}, s' - s = \frac{\tau}{1-\beta} \geqslant \frac{\tau_0}{1-\beta} > 0; \\
&s \geqslant \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon \text{ 时}, s'-s=2-\frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon - \frac{1}{1-\beta}[\Psi_1 + \Psi_2]
\end{aligned}\right\}$$

当 τ 由 τ_0 变到 $+\infty$ 时，由于 $\frac{d}{dt}[\Psi_1 + \Psi_2] > 0$，后一差值将由 $s_0' - \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ 单调地减小到 $-\infty$，而当 $\tau \to +\infty$ 时，$s' \to +1$，$s \to +\infty$。因此，在半直线 S 上满足条件 $s \leqslant -\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ 的那一部分上，点变换 $s' = \Pi(s)$ 不可能有不动点。不动点只存在于(而且是唯一的)半直线 $s \geqslant \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ 上，必须满足的条件是 $s_0' \geqslant \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$。这样一来，由于表示式 $s_0' - \frac{1+\lambda}{1-\beta}$ 符号的不同，可能有两种类型的拉梅尔图。

当 $s_0' < \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ 时，由关系式(8.73)决定的曲线 $\tau = f(s)$ 和 $s' = g(\tau)$ 永不相交(图 431)，从而点变换没有不动点。不难看出，在这种情况下，每一后继点 s' 都比前行点 s 更接近区间(8.72a)[1]。因此，任何一条相轨线与半直线 S 和 S' 相交有限次以后，将有一交点，其坐标为

$$-\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon < s < \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon, \tag{8.72a}$$

然后该轨线在带状平面 (I) 的范围内，渐近地趋向某一平衡状态。

---

1) 若引入点 s 到区间(8.72a)的距离

$$R = \begin{cases}
+s^* - \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon \text{ 当 } s \geqslant \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon \text{ 时}, \\
0 \qquad \text{当} -\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon < s < \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon \text{ 时}, \\
-\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon - s \text{ 当 } s \leqslant -\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon \text{ 时},
\end{cases}$$

则后继点到此区间的距离 $R' < R$，而且二距离差一有限值。

* 原书为"$-s$"——译者注。

换句话说，在所研究的情况中，系统具有绝对稳定性，这就是说，在任何初始条件下，都将建立起某种平衡状态.

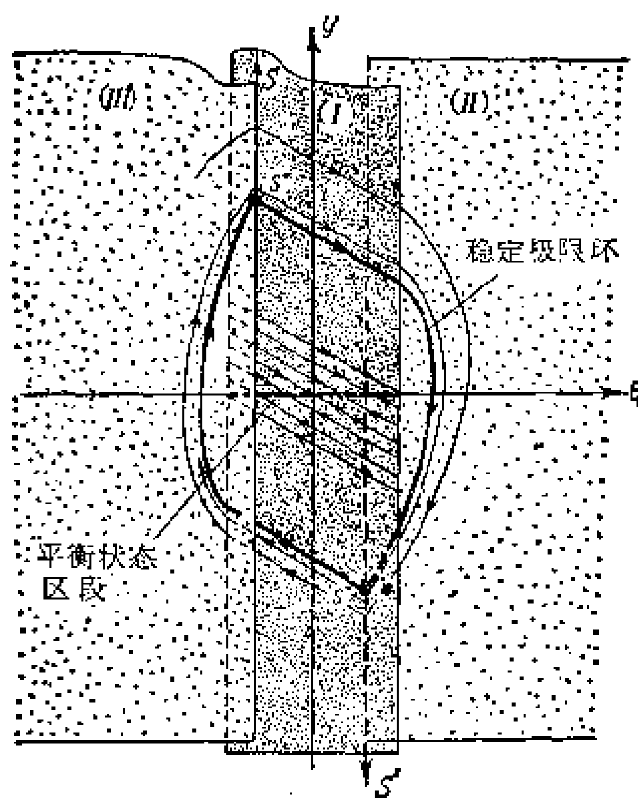


图 434

当 $s_0'>\frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ 时，可以得到另一种拉梅尔图(图 432 和 433). 在这里，曲线 $\tau=f(s)$ 和 $s'=g(\tau)$ 具有唯一的交点，因而点变换 $s'=\Pi(s)$ 具有唯一的，而且是稳定的不动点 $s^*>\frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$, 此不动点对应于相面上的对称极限环（图 434）[1]. 与不动点 s^* 相对应的变换参数 τ^* 决定于方程 $s'=s$ 或

$$[\tau^*-(1-\lambda)\varepsilon]\operatorname{cth}\frac{\tau^*}{2}=2(1-\beta)-(1+\lambda)\varepsilon^{2)}. \quad (8.76)$$

1) 不动点 $s^*>\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ 的存在性，是根据曲线 $\tau=f(s)$ 和 $s'=g(\tau)$ 的连续性，以及差值 $s'-s$ 在 $\tau=\tau_0$ 和 $\tau\to+\infty$ 时具有不同的符号决定的. 唯一性则是根据 $s'-s$ 随 τ 变化的单调性得到的. 而稳定性是不等式(8.75)的推论. 我们可看出，对称极限环与半直线 S 和 S' 各有一个交点.

2) 由于 $\tau^*>\tau_0>(1-\lambda)\varepsilon$，若 $(1+\lambda)\varepsilon>2(1-\beta)$，则不动点 s^* 显然不可能存在.

现在我们来确定，在系统参数 $\beta, \varepsilon, \lambda (0 < \beta < 1,\ \varepsilon > 0,\ -1 \leqslant \lambda \leqslant +1)$ 的空间中，哪一个区域满足极限环的存在条件

$$s_0' = \frac{\tau_0 - (1-\lambda)\varepsilon}{1-\beta} > \frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$$

或

$$\tau_0 > 2\varepsilon. \tag{8.77}$$

显然，在临界情况(也就是说，在 $\beta, \varepsilon, \lambda$ 参数空间的、划分对称极限环存在区和"绝对稳定区"的曲面上)，有

$$\tau_0 = 2\varepsilon,$$

因此，根据(8.74)此边界面在参数空间中的方程将为:

$$(1-\beta)(1-e^{-2\varepsilon}) = 2\varepsilon - (1-\lambda)\varepsilon = (1+\lambda)\varepsilon$$

或

$$\frac{1+\lambda}{1-\beta} = \frac{1-e^{-2\varepsilon}}{\varepsilon}. \tag{8.77a}$$

在图 435 上表示出 ε 及$\dfrac{1+\lambda}{1-\beta}$的参数平面，其中画出了曲线(8.77a)。由于根据同一方程(8.74)，τ 随着 β 的减小而增加(在参数 ε 和 λ 取固定值的条件下)[1]，显然可以断言：在图 435 上的曲线(8.77a)的下方，条件(8.77)满足，也就是说，这里是极限环的存在区，在它

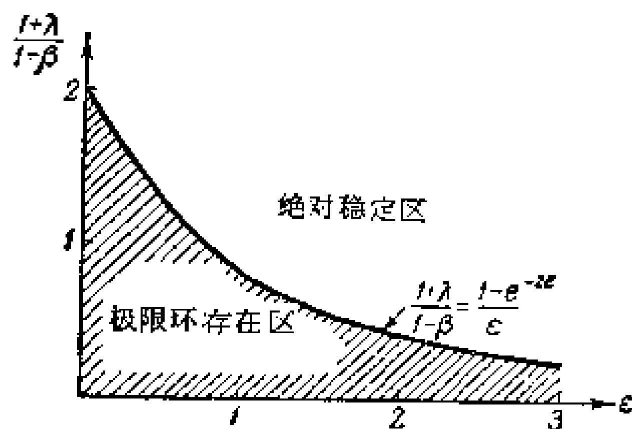


图 435

---

1) 在 ε 和 λ 取固定值的条件下，将(8.74)对 β 微分之，则有

$$\frac{\partial\tau_0}{\partial\beta} = -\frac{1-e^{-\tau_0}}{1-(1-\beta)e^{-\tau_0}} < 0.$$

的上方则是“绝对稳定”区.

5. 相面的轨线划分的结构. 下面我们较详细地来研究情况:

$$\frac{1+\lambda}{1-\beta}<\frac{1-e^{-2\varepsilon}}{\varepsilon}, \tag{8.77b}$$

即相面上除带状平面 (I) 的稳定平衡状态区间($|\xi|<\varepsilon$, $y=0$, $u=0$)以外,尚有对称稳定极限环的情况(图 434). 平衡状态区间和极限环二者在相面上都有各自的吸引区——在此区域内的轨线,分别渐近地($t\to+\infty$ 时)趋向平衡状态或极限环.

这样一来,就出现一个疑问,是否这两种吸引区就包括了全部相面,这就是说,除掉上述两种稳定状态以外,是否还有其它的同样是稳定的状态,在相应的初始条件下系统将向它趋近? 如果不对点变换进行细致的研究,我们目前还不能否定这种和平衡状态及对称极限环不同的其他稳定状态存在的可能性. 在所研究的这种动力学系统中,函数 $s=s(\tau)$ 有双值性,而曲线 $s'=g(\tau)$ 又有下降段($\tau_0\leqslant\tau<\tau_1$ 时),这些特点就预示出可能存在复杂的、一般来说非对称的周期状态,这种状态将不由点变换 $s'=\Pi(s)$ 的不动点来决定,而决定于这一点变换的复合变换

$$s'=\Pi\{\Pi\{\Pi\{\cdots\{\Pi(s)\}\cdots\}\}\}=\Pi^n(s).$$

在拉梅尔图上,与此种复杂周期状态相对应的,将不会是曲线 $\tau=f(s)$ 和 $s'=g(\tau)$ 的交点,而应当是由铅垂和水平线段交替组成的某一闭折线,其顶点位于这两条曲线上. 因此,为了阐明所研究的这种继电系统的一切类型的运动,不能只限于寻求平衡状态和变换 $s'=\Pi(s)$ 的不动点,并研究其稳定性,而必须较细致地研究相面轨线划分的结构,特别是细致研究平衡状态区间和对称极限环的吸引区.

不论条件如何,平衡状态区间的吸引区中都包括区域 A_0: 带状平面(I)上的区域 $|\xi+(1-\beta)y|<\varepsilon$ (图 429a),此区域对应于半直线 S 和 S' 上的区间 $-\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon<s<\frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ (下面将用

(a_0)表示之)．应用逆变换(s' 向 s 的变换)[1],我们可以根据此区间求出其余各区间 (a_1),(a_2),···, 这些区间上的点,借助于轨线(或者说，借助于变换 $s'=\Pi(s)$) 变换为区间(a_0)上的点，从而我们就能够阐明平衡状态区间的吸引区的结构．在这里根据 $(s')_{极小}=(s')_{\tau=\tau_1}$ 和 $\frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ 二者之间的关系不同,可能出现两种情况.

设 $(s')_{极小}\geqslant\frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$．此种情况的拉梅尔图表示在图 432 上(为了确定起见,取 $\tau^*<\tau_1$ 的情况)．可以看出,所有在区间(a_0)以外与半直线 S 和 S' 相交的相轨线，与这两条半直线的后继交点都有 $s'\geqslant(s')_{极小}\geqslant\frac{1+\lambda}{1-\beta}$, 即同样位于区间$(a_0)$的外部,并将渐近地趋向对称极限环．为了证明后一个论断，我们来研究某一轨线与半直线 S 和 S' 的交点所构成的序列

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_k,\ s_{k+1},\ \cdots,$$

其中 $s_{k+1}=\Pi(s_k)$，初始点在区间(a_0)的外部．显然,这一序列将是无限的,对于所有 s_k 都有 $s_k\geqslant\frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ ($k\geqslant1$ 时)[2]，而且根据(8.75)必满足不等式:

$$|s_{k+1}-s^*|<|s_k-s^*|. \tag{8.78}$$

因此,对任何这种序列 $s_0,\ s_1,\ s_2,\cdots$，其极限点都是不动点 s^*，相应的相轨线渐近地($t\to+\infty$ 时)趋向对称极限环．这样一来，平衡状态区间的吸引区由区域 A_0 以及(II)和(III)叶上的不大的弓形区域组成，而相面的全部其余部分就构成了简单对称极限环的吸引区(图 436)．

---

1) 应当指出，此逆变换是多值的，因为每一个 $s'\geqslant(s')_{极小}$的值都对应于一个或两个 τ 值，而每一个 τ 值又对应于两个 s 值，其中一个大于$\frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$，另一个小于$-\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon$．

2) s_0 可以小于$-\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon$．

当 $(s')_{极小}<\frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$[1] 时，平衡状态区间和极限环的吸引区的结构就与上述情况不同，而且较为复杂．为了简单起见，我们只详细研究 $-\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon<(s')_{极小}<\frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ 的情况，其拉梅尔图如图 433 所示（对于 $(s')_{极小}\leqslant-\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ 的情况，可以进行同样的研究，并可得出同样的结论）．在这里，永远有 $\tau^*<\tau_1$，而相轨线与半直线 S 和 S' 的后继交点则不仅能落在区间 (a_0) 的外部，而且能落在内部．

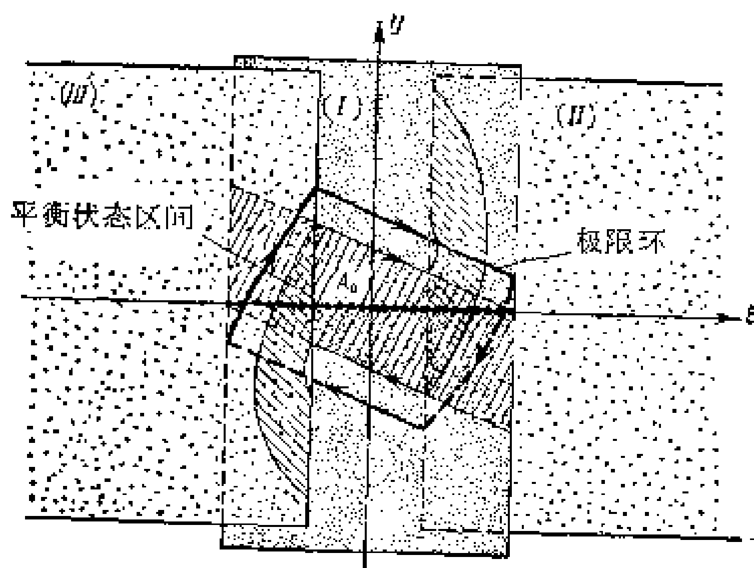


图 436

半直线 $s\geqslant\frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ 上的点，借助于变换 $s'=\Pi(s)$ 可将它从较小的 τ 值变换到点 $\frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$，令其坐标为 $'s_0$．其次，令 (b_0) 表示闭区间 $\frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon\leqslant s\leqslant{}'s_0$[2]．显然，任意轨线与半直线 S 和 S' 的交点序列：

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\cdots,\ s_k,\cdots$$

---

1) 不难证实，此不等式在满足下列不等式的条件下成立，即：

$$\frac{1+\lambda}{1-\beta}<\frac{1-\dfrac{e^{-\beta}}{1-\beta}e^{-2\varepsilon}}{\varepsilon}.$$

2) 在半直线 $s\geqslant\frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ 上，后继点为 $\frac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$ 的点共有两个．点 $'s_0$ 应理解为对应于较小的参数 τ 值的点．显然，根据(8.75)必有 $'s_0>s_0'$，而线段 (b_0) 则包含不动点 s^*．

(其初始点 s_0 位于闭区间(b_0)上)将是无限的(而且所有 s_k 点都将属于这一闭区间),其极限点将为不动点 s^*,这是因为(8.78)对于这一序列是满足的. 这样,闭区间(b_0)就成为不动点 s^* 的吸引区间,而所有在闭区间(b_0)各点上与半直线 S 和 S' 相交的轨线,当 $t \to +\infty$ 时,必趋向对称极限环. 这些轨线上的点也就构成了极限环的吸引区——在图 437 上未画斜线的区域.

其次,进行 $s' = \Pi(s)$ 的反变换,即根据给定的 s' 点求出以 s' 为后继点的那些 s 点,我们从区间(a_0)和(b_0)出发,就将半直线 $s \geqslant -\dfrac{\beta}{1-\beta}$ 分成有限个开区间$(a_1),(a_2),\cdots,(a_m)$和闭区间(b_0),$(b_1),\cdots,(b_{m'})$. 这些区间上的点,借助于轨线可变换成区间(a_0)和(b_0)上的点(图 433)[1]. 这里,由于开区间(a_0)和闭区间(b_0)具有共同的边界点(点 $s = \dfrac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon$),上述的开区间和闭区间就必然相互交替,彼此衔接[2]. 因此可以断言,半直线(S) $\left(s \geqslant -\dfrac{1+\lambda}{1-\beta}\varepsilon\right)$上的任意一点 s,经过有限次变换 $s' = \Pi(s)$ 以后,都将变换成一点,此点或属于开区间(a_0),或属于闭区间(b_0),而相应的相轨线则或向某一平衡状态,或向极限环渐近地趋近,这决定于这条相轨线与半直线 S(或 S')的第一个交点所处的位置(在开区间(a_i)还是在闭区间(b_i)上).

当

$$(s')_{极小} \leqslant -\frac{1-\lambda}{1-\beta}\varepsilon$$

时,也可以用同样方法建立开区间(a_i)和闭区间(b_i),并可得到相同的结果.

---

1) 开区间(a_i)和闭区间(b_i)的建造只需在半直线 $s \geqslant -\dfrac{\beta}{1-\beta}$ 上进行,因为只有这条半直线上的点,才能借助于变换 $s' = \Pi(s)$,变换成半直线 S' 上的点. 其次,由于 $(s')_{极小} \leqslant s < 1$,开区间$(a_i)$和闭区间$(b_i)$的数目将是有限的,而且它们的最后一个将包含具有任意大 s 的诸点.

2) 这就是说,每一开区间(a_i)的边界点为相邻闭区间(b_i)的端点,反过来,每一闭区间(b_i)的端点也是相邻开区间(a_i)的边界点.

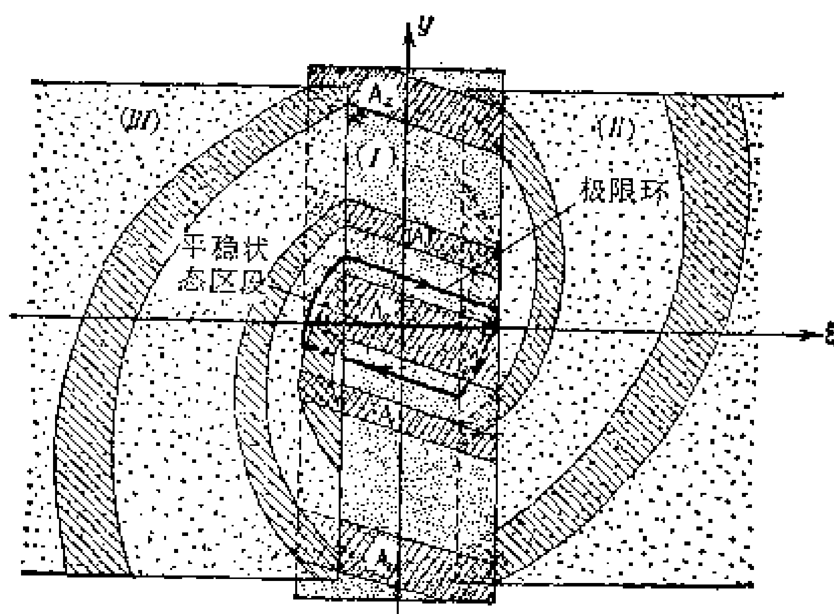


图 437

因此可以认为我们已证明了：如果满足简单对称极限环的存在条件(即条件(8.77b))，则所研究之这种继电系统的相面只是由平衡状态区间和上述极限环的吸引区组成的．换句话说，我们证明了，除平衡状态和对应于简单对称极限环的自振状态以外，在系统中不存在其他任何稳定的定态状态．这就是说，系统或进入某一平衡状态，或在其中建立起自振过程，这决定于初始条件如何——决定于在初始瞬时相点位于哪一个的吸引区．因此，如果条件(8.77b)满足，则所研究的这种继电系统便具有自振的硬激状态．

值得指出的是，平衡状态区间和极限环的吸引区二者之间的边界线，并不是不稳定极限环，象以前研究具有相平面的动力学系统那样．这一边界线乃是通过平衡状态区间的边界点的相轨线．所研究的这种继电系统，所以具有这种不太寻常的相面轨线划分结构，当然是由相面的多叶性引起的．

6. 有强速度校正时系统的动力学． 剩下还要研究的只有 $\beta>1$ 的情况[1]．对于这种情况，带状平面(I)的轨线划分(继电器

1) 提醒一下，这种情况只有在随动系统(图 425)中才能实现，因为在继电自动调节系统中(在具有"恒速"伺服机和硬反馈的系统中；图 427)，系数 $\beta<1$．

处于关闭状态)表示在图 429 上. 和以前一样,相点在此带状平面上,将沿直线轨线

$$\xi + (1-\beta)y = \text{常数}$$

趋向横轴,但在这里,与以前曾研究过的 $\beta < 1$ 情况不同,有

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{1}{\beta - 1} > 0.$$

和以前一样,设 S 和 S' 为(III)和(II)叶的边界线的一部分,通过其上的点,相点将过渡到带状平面(I)上;而 s 为这两条半直线上之点的坐标(在半直线 S: $\xi = -\lambda\varepsilon$, $y < \frac{\beta}{\beta-1}$ 上, $y = +s$, 在半直线 S': $\xi = +\lambda\varepsilon$, $y > -\frac{\beta}{\beta-1}$ 上, $y = -s$). 采用同 $\beta<1$ 情况中相同的方法,不难求出半直线 S 和 S' 对自身的(由系统之相轨线所实现的)点变换的方程:

$$\left.\begin{array}{l} s = \begin{cases} -1 - \dfrac{1+\lambda}{\beta-1}\varepsilon - \dfrac{\tau-(1-\lambda)\varepsilon}{(\beta-1)(1-e^{-\tau})} & \text{当 } s \leqslant -\dfrac{1+\lambda}{\beta-1}\varepsilon \text{ 时} \\ 1 + \dfrac{1-\lambda}{\beta-1}\varepsilon + \dfrac{\tau-(1-\lambda)\varepsilon}{(\beta-1)(1-e^{-\tau})} & \text{当 } s \geqslant \dfrac{1-\lambda}{\beta-1}\varepsilon \text{ 时} \end{cases} \\ \qquad s' = 1 + \dfrac{\tau-(1-\lambda)\varepsilon}{(\beta-1)(e^{\tau}-1)} \end{array}\right\} \tag{8.79}$$

(这里 s——半直线 S 或 S' 上的出发点之坐标, s'——在上述半直线上的后继点之坐标). 在半直线 S 和 S' 上, 坐标满足 $-\frac{1+\lambda}{\beta-1}\varepsilon < s < \frac{1-\lambda}{\beta-1}\varepsilon$ 的点,显然,借助于不越出带状平面(I)范围的相轨线,变换为此带状平面的平衡状态区间上的点. 我们还指出, 在参数表示式(8.79)中, 变换参数 τ——在(II)叶或(III)叶上相点的穿越时间——可取数值 $\tau_0 < \tau < +\infty$, 其中 τ_0, 和以前一样,为方程(8.74)的根.

所研究之 $\beta > 1$ 的情况,其拉梅尔图表示在图 438 上. 曲线 s 与曲线 s' 到处都不相交,这就说明, 变换(8.79)没有不动点, 因

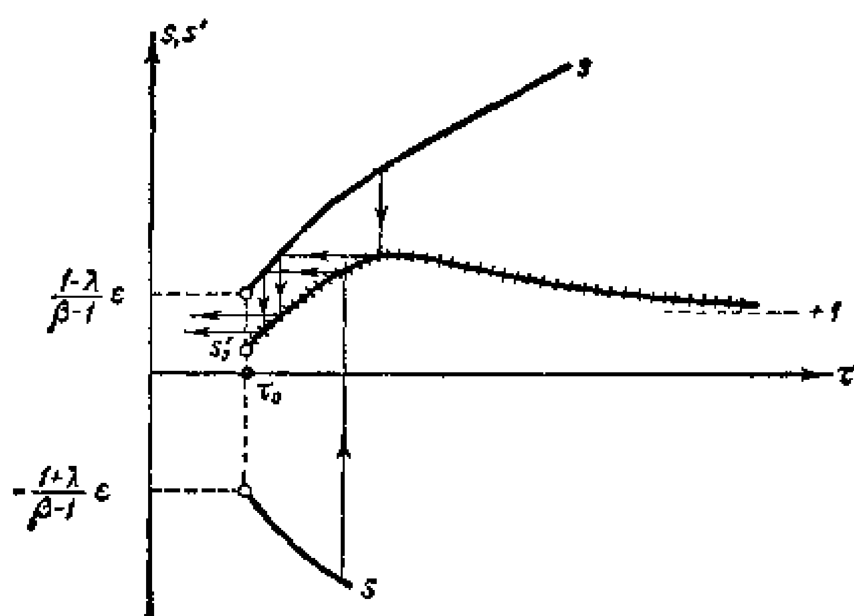


图 438

而在相面上不存在极限环[1]. 由于

$$s\geqslant\frac{1-\lambda}{\beta-1}\varepsilon \text{ 时 } \frac{ds'}{d\tau}<\frac{ds}{d\tau},$$

因而对于任何初始条件，继电系统都将进入某一平衡状态，这是因为所有的"拉梅尔梯线"（参看图 438）经过有限个梯阶以后，都将进入区间

$$-\frac{1+\lambda}{\beta-1}\varepsilon<s<\frac{1-\lambda}{\beta-1}\varepsilon,$$

此区间上的点，上面已经指出过，将变换为平衡状态区间上的点．当 $\beta>1$ 时，系统的相面之轨线划分表示在图 439 上．

---

1) 确实如此，当 $s\geqslant\frac{1-\lambda}{\beta-1}\varepsilon$ 时 $s-s'=\frac{\tau}{\beta-1}\geqslant\frac{\tau_0}{\beta-1}$（由此也可导出，$\frac{ds}{d\tau}-\frac{ds'}{d\tau}=\frac{1}{\beta-1}>0$）；

当 $s\leqslant-\frac{1+\lambda}{\beta-1}\varepsilon$ 时 $s-s'=-\frac{1+\lambda}{\beta-1}\varepsilon-2-\frac{1}{\beta-1}\{\Psi_1+\Psi_2\}$，

根据(8.65a)这乃是单调减函数，而且由于 $(s)_{\tau=\tau_0}-(s')_{\tau=\tau_0}=-\frac{1}{1-\lambda}\{2(1-e^{-\tau_0})+\frac{1+\lambda}{\beta-1}\tau_0\}<0$，当 $s\leqslant-\frac{1+\lambda}{\beta-1}\varepsilon$ 时，曲线 s 也将到处不与曲线 s' 相交．

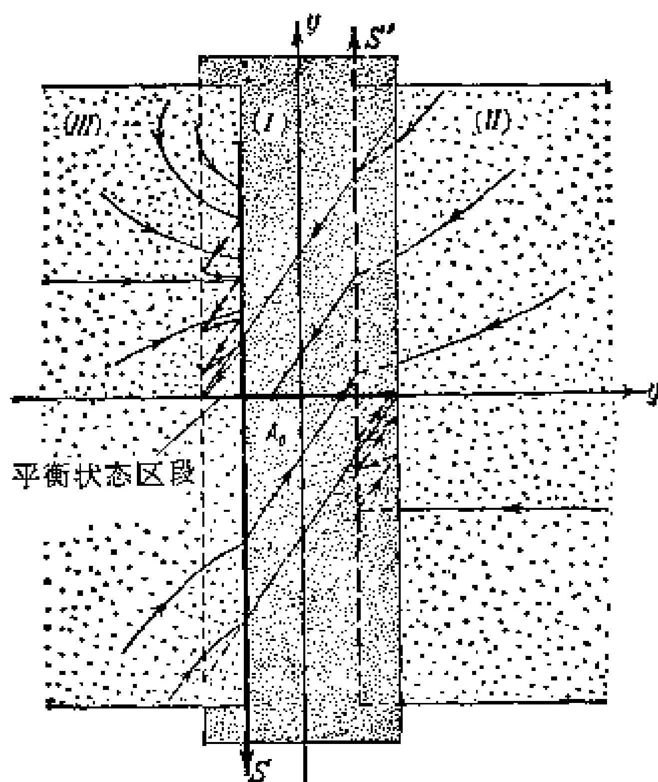


图 439

总结上面的研究，可以断言，在已研究过的这种继电系统中，继电器特性的滞后特点，乃是产生自振的原因．但通过引入足够强的反馈（或足够强的速度校正），后者是可以被镇定的，而且，继电器的死区越宽，用以镇定自振的反馈（或速度校正）值就越小．

§9．有平方阻尼的振动系统

我们再研究一次具有平方阻尼的振动系统，其振动方程为

$$2\ddot{x}+\dot{x}^2\operatorname{sgn}\dot{x}+x=0$$

或方程组

$$\dot{x}=y,\ \ 2\dot{y}=-x-y^2\operatorname{sgn}y \tag{8.80}$$

（参看第三章 §1），并且用建立相应的直线对直线的点变换来证实，其所有相轨线（在相平面 x,y 上），当在 $t\to+\infty$ 时，渐近地缠绕地趋向原点 (0, 0)，这就是说，原点乃是稳定焦点型平衡状

态[1]．所研究的这种系统，乃是分段保守的（而不是分段线性的）系统．从点变换的观点来看，它是很有意义的一种系统，这不仅因为其对应函数具有独特的形状，而且还因为其对应于平衡状态的不动点的稳定性，亦不能用克尼格斯定理来阐明．

重复一下在第三章§1中对这种系统进行研究时曾得出的主要结果．在相平面 x,y 的上部，其中 $y>0$ 且振动方程具有形式：

$$\dot{x}=y,\quad 2\dot{y}=-x-y^2,$$

相轨线为曲线：

$$(y^2+x-1)e^x=C \tag{8.81}$$

（C 为积分常数，且 $C\geqslant -1$；）对应于 $C=0$ 的抛物线 $y^2=1-x$，为来自无穷远的相轨线（对应于 $C>0$）与开始于横轴上位于原点左边各点的相轨线（对应于 $-1<C<0$）间的分隔相轨线；数值 $C=-1$ 对应于孤立奇点 $(0,0)$——系统的平衡状态．而且，所有上半平面的相轨线，都在原点的右方进入横轴（图 440）．

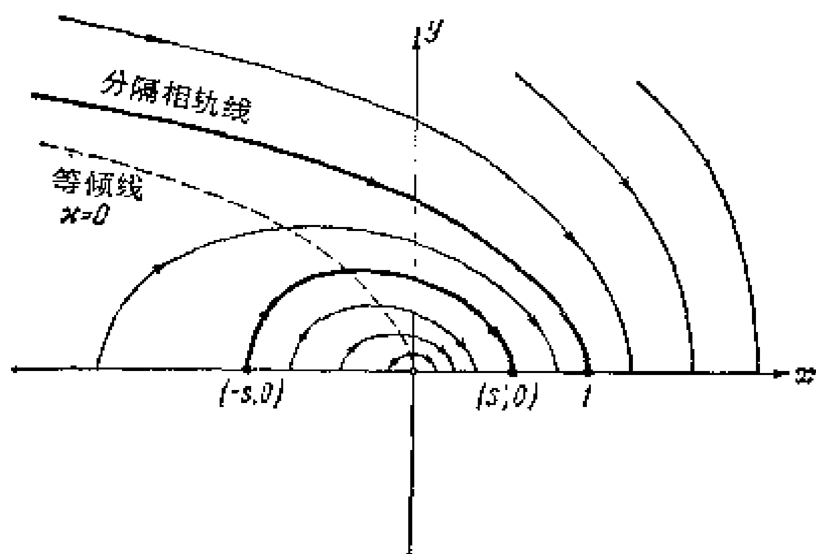


图 440

1) 由方程(8.80)可以导出，(0,0)点乃是系统的唯一平衡状态．我们指出，解决有关此平衡状态的性质（即关于其稳定性）问题，采用将方程(8.80)在(0,0)点的邻域内进行线性化的方法是不可能的．的确，若将(8.80)中的 $y^2\operatorname{sgn}y$——唯一的二阶小项（与 x 和 y 比较）弃去，以便进行线性化，则我们将得出具有中心型奇点 (0,0) 的谐振子的方程，而这恰好是那种用研究线性化方程无法判定原始非线性系统平衡状态的性质的情况．

将 x, y 以 $-x, -y$ 置换以后，方程组(8.80)并不改变自己的形状，因此相平面下部($y<0$)的相轨线与上部的相轨线，必然关于原点对称．例如，所有下半平面的相轨线都在原点的左方进入横轴。

方程组 (8.80) 之相轨线的这些性质，显然使我们有可能将研究相轨线的路径问题，归结为研究某一任意相轨线与横轴的交点序列的点变换 (图 441) ——研究横轴的正负半轴 (图 441 上的半直线 U 和 V)相互间的点变换，此变换是由方程组(8.80)的相轨线所实现的．引入与原点的距离 s 作为 x 的正负半轴 (半直线 U 和 V)上的坐标($s>0$)．此时，横轴上彼此相对称的点将对应于相同的 s 值，x 的负半轴(半直线 U)对正半轴(半直线 V)的点变换，将恒等于 (有相同的对应函数) 半直线 V 对半直线 U 的点变换．因此，在某一任意相轨线与横轴的交点序列

$$s_1, s_2, \cdots, s_k, s_{k+1}, \cdots$$

中，每一个后继点将根据统一的点变换、统一的对应函数

$$s_{k+1}=f(s_k),$$

由前行点决定，而与前行点属于哪条半直线(半直线 U 或 V)无关．

为了计算此点变换的对应函数，我们研究从半直线 U 上的点

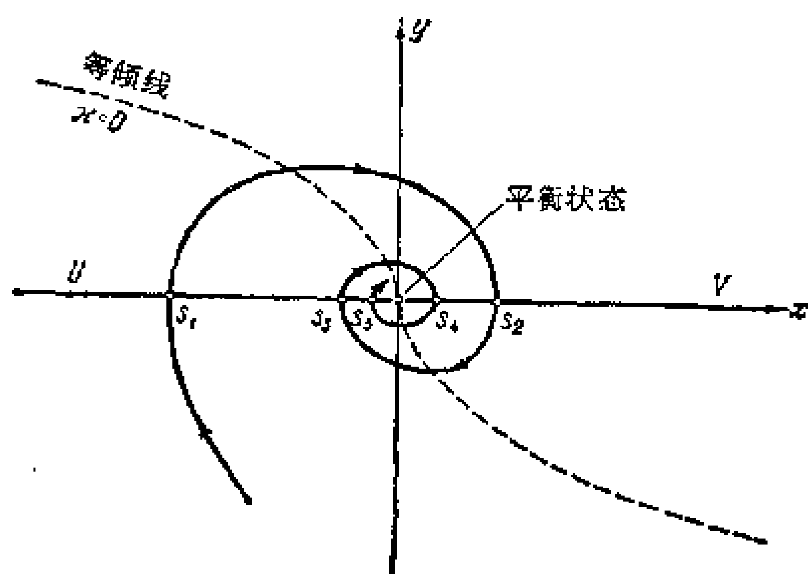


图 441

$(-s, 0)$开始，并在点$(s', 0)$上重新返回横轴(半直线 V)的相轨线(图 441)；这里 s 为半直线 U 的点的坐标，s' 为它在半直线 V 上的后继点的坐标(而且 $s>0$, $0<s'<1$)．根据(8.81)，这些点的坐标将以如下方程彼此联系：

$$-(s+1)e^{-s}=(s'-1)e^{s'}(=C), \qquad (8.82)$$

而且 $-1<C<0$．由于 $\frac{d}{ds'}[(s'-1)e^{s'}]=s'e^{s'}>0$，故而此方程确定一单值连续的对应函数 $s'=f(s)$．为了找出所研究这一点变换的不动点，我们引入参数 $\xi=-C(0<\xi<1)$．这样，方程(8.82)就可以写成参数形式——两个方程的形式：

$$\left.\begin{aligned}(1+s)e^{-s}&=\xi,\\(1-s')e^{s'}&=\xi.\end{aligned}\right\} \qquad (8.82a)$$

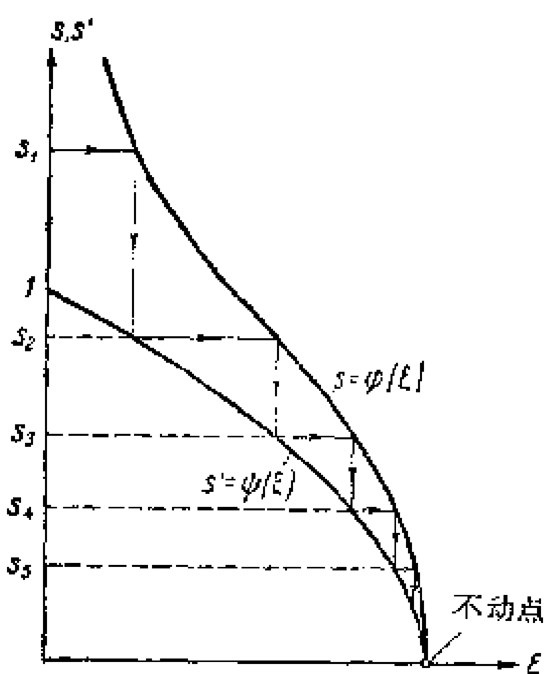


图 442

通过 ξ 表达出 s 和 s'——出发点和后继点的坐标——之间的关系(当然和以前一样，为非显式)：

$$s=\varphi(\xi),\quad s'=\psi(\xi),$$

其中 φ 和 ψ，不难看出，乃是单值连续的可微函数．在一个图(拉梅尔图)上画出这两个函数的图象(图 422)，显然，这两条曲线相交于点 $s=s'=0$, $\xi=1$，即点 $\bar{s}=0$ 为点变换的不动点，它对应于系统的平衡状态．由于

$$\frac{d\xi}{ds}=-se^{-s}<0$$

$$\frac{d\xi}{ds'}=-s'e^{s'}<0,$$

从而当 s 与 s' 取相同值时，有

$$\frac{d\xi}{ds} > \frac{d\xi}{ds'},$$

所以曲线 $s = \varphi(\xi)$ 将位于曲线 $s' = \psi(\xi)$ 的右侧，即对于每一个 $0<\xi<1$ 都有

$$s' = \psi(\xi) < s = \varphi(\xi).$$

这样，所研究的这种点变换的不动点 $\bar{s} = 0$ 是唯一的，此外，点 $\bar{s} = 0$ 还是稳定的，这是因为任一点序列：

$$s_1, s_2, \cdots, s_k, s_{k+1}, \cdots,$$

（其中 $s_{k+1} = f(s_k)$）均向它收敛（参看图 442 上的拉梅尔"梯线"）的缘故[1]. 与此相对应，任一相轨线都将渐近地（$t \to +\infty$ 时）向平衡状态(0,0)趋近，而且与横轴之交点的数目无限增多. 因此方程组(8.80)的所有相轨线都是绕向平衡状态(0, 0)的螺线，即平衡状态(0,0)为稳定焦点.

§10. 蒸 汽 机

作为本章的结束，我们来研究一个自旋转系统的例子——蒸汽机的最简单的动力学模型(具有一个自由度和柱形相面)，其略图表示在图 443 上.

---

1) 由于 $f'(0) = \lim\limits_{s\to 0} f'(s) = 1$，我们就可以应用克尼格斯定理以解析法证明不动点 $s = 0$ 的稳定性. 对于此不动点的稳定性，可根据其唯一性给出如下简单的证明. 研究某一数列：

$$s_1, s_2, \cdots, s_k, s_{k+1}, \cdots,$$

其中 $s_{k+1} = f(s_k)$ 为某一相轨线与横轴之交点的坐标组成的序列. 任一这种序列，都是正数的单调减序列；因此所研究的序列必有极限. 设它等于 $a>0$. 此时有 $\lim\limits_{k\to+\infty} s_k = a$ 和 $\lim\limits_{k\to+\infty} s_{k+1} = a$，但 $s_{k+1} = f(s_k)$，其中 $f(s)$ 为连续函数（对于所有的 $s>0$），因此，根据连续函数的极限定理，必有

$$a = \lim_{k\to+\infty} s_{k+1} = \lim_{k\to+\infty} f(s_k) = f(a),$$

即点 $s = a$ 必然也是变换的不动点，而根据不动点 $\bar{s} = 0$ 的唯一性，这是不可能的. 因此任意序列

$$s_1, s_2, \cdots, s_k, \cdots \to 0,$$

即唯一的不动点 $\bar{s} = 0$ 是稳定的.

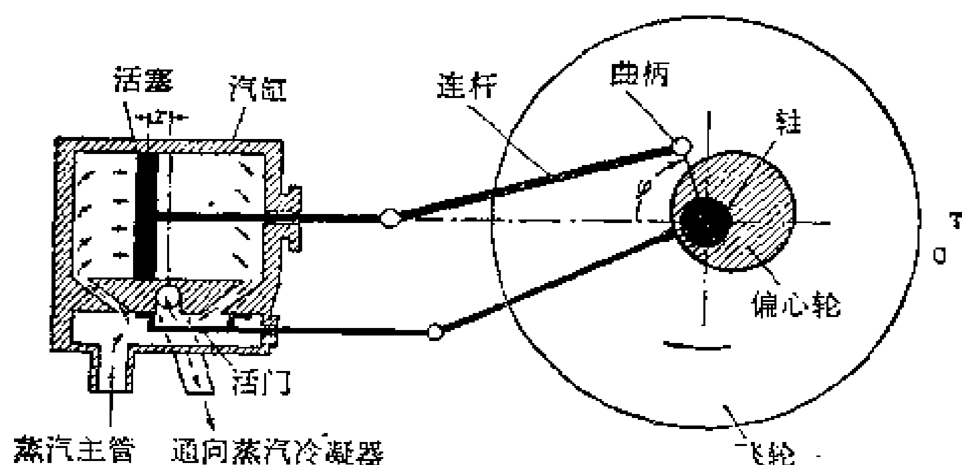


图 443

我们知道，蒸汽机乃是具有"反馈"的系统：通过偏心轮与主轴相联的活门，控制进入汽缸(由于主轴位置不同，或进入左腔，或进入右腔)的蒸汽量，从而使我们有可能从恒定的能源(从具有恒定汽压 P_0 的主管)，获得交变作用力，此作用力作用在活塞上，维持其振动运动和蒸汽机主轴(飞轮)的旋转运动，虽然有阻力存在

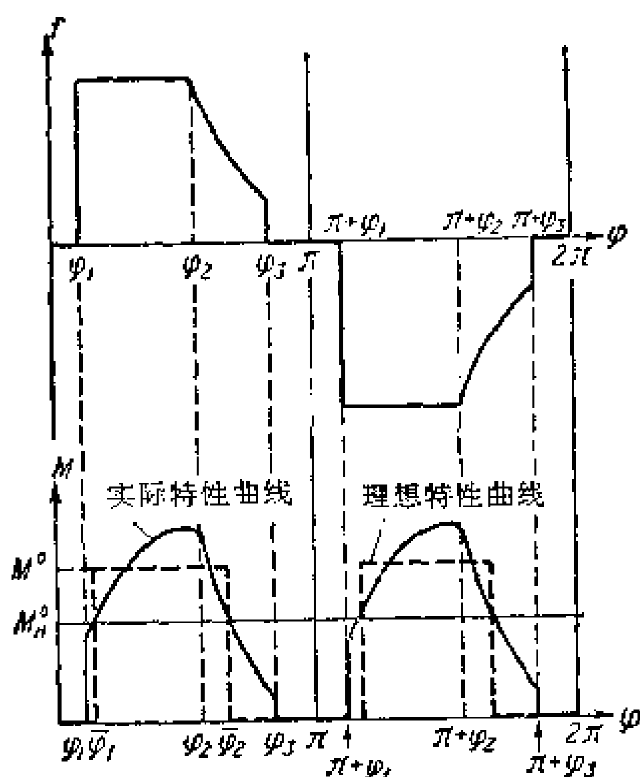


图 444

(例如，来自负载的作用力)[1]. 作用在活塞上的蒸汽压力 f(对于给定的蒸汽主管中的汽压)与活门的位置和活塞的位置有关. 活门(由于所处位置不同)或将左腔或将右腔与蒸汽主管或冷凝器联通，或者将通汽管闭塞. 与活塞位置有关是因为，当通汽管被活门闭塞以后，汽缸腔中的汽压取决于该腔的体积. 为了简化问题起见，我们将忽略作用力 f 同其他量，例如蒸汽机活塞的运动速度[2]间的依赖关系. 由于活塞、兰轴和活门的位置单值地决定于主轴的转角 φ(但不单值决定于活塞的坐标 x)，则：第一，作用力 f 将为角 φ 的某一单值周期(周期为 2π)函数(此函数的图象定性地表示在图 444 上)，第二，为蒸汽机所建立的这种动力学模型(具有一个机械自由度)，其状态单值地决定于主轴的转角 φ 和角速度 $\frac{d\varphi}{dt}$. 与此相对应，此模型的相面将为柱形. [3]

蒸汽机主轴的转动方程(采用上述假设)可写成如下形式：

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2}=M-M_H, \tag{8.83}$$

---

1) 为了在活塞上获得交变的蒸汽压力，以维持蒸汽机主轴的旋转运动，活门的偏心轮必须相对于连杆的曲柄，沿主轴旋转方向，偏转 90° 左右.

2) 严格地说，作用在活塞上的蒸汽压力 f 还与活塞的运动速度有关，因为活塞运动速度越大，蒸汽的容积消耗量就越大，而且由于蒸汽分配装置(活门)的汽门与通道中的压差增大(活门具有不等于零的流体阻力)，汽缸腔中的汽压就必然越小. 但这种依赖关系通常不很大，因而忽略不计.

3) 下面我们来解释 f 与 φ 的关系曲线(图 444). 当 $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$ 时，即蒸汽主管与汽缸左腔相联通时，腔内的汽压保持恒定值 ($=P_0$)，因而作用在活塞上的蒸汽压力 f 亦为恒值. 当 φ 等于某一数值 φ_2 时，蒸汽停止进入左腔，因此，若 φ 继续增大，则由于汽缸左腔体积增大，而蒸汽质量保持不变，必使汽压和作用力 f 减小. 最后，当 $\varphi=\varphi_3$ 时，左腔与冷凝器联通，于是作用力 f 变为零(在整个 $0<\varphi<\pi$ 区间上，右腔与冷凝器联通). 当 $\pi<\varphi<2\pi$ 时，将发生同样的过程，所不同的只是，此时左腔与冷凝器联通，蒸汽由蒸汽主管进入(在 $\pi+\varphi_1<\varphi<\pi+\varphi_2$ 的区间上)右腔. 显然，由于蒸汽机分配装置的对称性，函数 $f=f(\varphi)$ 必满足条件 $f(\pi+\varphi)\equiv-f(\varphi)$.

我们认为函数 $f(\varphi)$ 是从实验中得来的，关于它的推导和研究已不是振动理论的，而是热力学的任务.

还应当指出，既然角 φ、活门位置以及作用力 f 不是活塞坐标 x 的单值函数，那么，就不能拿平面 x, $\frac{dx}{dt}$ 作为所研究的这种动力学系统的相面.

其中 I 为蒸汽机(主要是飞轮)及其负荷，折合在主轴轴线上的惯性矩(下面我们将假定 I 与 φ 无关,即具有恒定值), M 为来自蒸汽机活塞的作用在主轴上的力矩("推动力矩")和 M_H 为蒸汽机所克服的阻力力矩，包括来自负荷的作用在主轴上的力矩在内. 力矩 M 与作用在活塞上的蒸汽压力 f 间有关系式

$$M = f(\varphi)A\sin\varphi$$

(为了简单起见,我们这里研究主轴与曲柄轴线间之距离 A 与连杆长度相比很小的情况)；因此,推动力矩 M 也是角 φ 的单值周期函数,但其周期为 π(图 444). 对于今后的研究具有重要意义的一点是,推动力矩 M(对于所有的 φ)在角 φ 接近 $\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 时达到极大值 $M_{极大}$，在角 $\varphi = 0, \pi, 2\pi$ 的"死点"附近，等于零. 当负荷给定时,阻力力矩 M_H 在大多情况下,可以认为只同主轴的旋转角速度 $\frac{d\varphi}{dt}$ 有关.

1. "恒定"负荷下工作的蒸汽机. 设蒸汽机的负荷是由满足库伦定律(参看第三章 § 2)的"常值"摩擦力造成的,亦即,

$$\frac{d\varphi}{dt} \neq 0 \text{ 时}, \ M_H = M_H^0 \operatorname{sgn} \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \text{ 时}, \begin{cases} M_H = M, \ \text{若} \ M \leqslant M_H^0, \\ M_H = M_H^0, \ \text{若} \ M \geqslant M_H^0, \end{cases} \tag{8.84}$$

其中 M_H^0 为最大静止摩擦力矩,且 $M_H^0 < M_{极大}$[1]. 在这种负荷下,蒸汽机将具有稳定平衡状态,位于"死点"附近. 的确,若令 $\bar{\varphi}_1$ 和 $\bar{\varphi}_2$ 为推动力矩 $M = M_H^0$ (图 444)时主轴的转角,则可得出,当 $0<\varphi<\bar{\varphi}_1$ 时，当 $\bar{\varphi}_2<\varphi<\pi+\bar{\varphi}_1$ 时和当 $\pi+\bar{\varphi}_2<\varphi<2\pi$ 时, $M(\varphi)<M_H^0$;因此,所有状态$(\varphi^*, 0)$,其中 φ^* 为位于上三个区间中任意一个的角，都将是平衡状态,这是因为在这些状态中,根据(8.84)有 $M_H = M(\varphi^*)$,由于 $\frac{d\varphi}{dt} = 0$，因此 $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$ (关于这些

1) 不难看出，当 $M_H^0 > M_{极大}$ 时,蒸汽机的主轴或不转动，或经过有限时间间隔后停下来,时间的长短决定于初始条件. 这种意义不大的情况下面不准备研究.

状态的稳定性，我们以后再进行研究）.

这种情况提示我们，对蒸汽机推动力矩的特性 $M = M(\varphi)$ 可作如下简单的理想化，可以显著地简化对蒸汽机动力学的研究，同时还能保持上述平衡状态．这一理想化在于，将蒸汽机推动力矩的实际特性，用如下不连续分段常数函数来代替，即：

$$M = \begin{cases} 0 \text{ 当 } 0 \leqslant \varphi < \varphi_1,\ \varphi_2 \leqslant \varphi < \pi + \varphi_1 \\ \qquad \pi + \varphi_2 \leqslant \varphi < 2\pi \text{ 时}, \\ M_0 \text{ 当 } \varphi_1 \leqslant \varphi < \varphi_2,\ \pi + \varphi_1 \leqslant \varphi < \pi + \varphi_2 \text{ 时}; \end{cases} \tag{8.85}$$

此函数的图象用虚线表示在图 444 的下图上． 理想推动力矩的“振幅” M_0（M_0 = 常数），我们应这样地选择，使得在主轴转动半周时，力矩（8.85）所做的功等于蒸汽机的功，即：

$$M_0 = \frac{1}{\Theta}\int_0^{\pi} M(\varphi)d\varphi > M_H^0,$$

其中 $\Theta = \varphi_2 - \varphi_1$ 为所谓的“进汽角”，$M(\varphi)$ 为蒸汽机推动力矩的特性． 这样选择 M_0 可以保证蒸汽机与其动力学模型之间保持最佳的能量对应．

很容易立刻看出，如果 $M_0 > \frac{\pi}{\Theta} M_H^0$，则在运动过程中，角速度将不断增大（蒸汽机进入“飞车”），因为在这种情况下，每转动半周推动力矩所做的功（$= \Theta M_0$）都将大于“常值”摩擦力负荷所做的功（$= M_H^0 \cdot \pi$）．如果 $M_0 = \frac{\pi}{\Theta} M_H^0$，则所研究的这种模型将是“拟保守的”：它将具有 $\frac{d\varphi}{dt} > 0$ 的周期运动连续统（这些运动将对应于区域 $\frac{d\varphi}{dt} > 0$ 内的环绕相柱的相轨线）．最后，当 $M_0 < \frac{\pi}{\Theta} M_H^0$ 时，所有运动都将是衰减的，即蒸汽机在任何初始条件下都将停下来．拟保守情形的非粗性是很明显的：由于推动力矩的“振幅” M_0 或最大负荷力矩 M_H^0 发生变化而使等式 $M_0 = \frac{\pi}{\Theta} M_H^0$ 遭到任何微小的破坏，都将使蒸汽机或进入“飞车”，或停止下来．

得出的结果在一定程度上反映了实际蒸汽机的性能，我们知

道，蒸汽机具有极其微小的自调性，亦即，负荷或蒸汽主管中的汽压发生的不太大变化，可使蒸汽机主轴的旋转速度发生显著的变化（正因为如此，在蒸汽机上通常都安装有主轴转速调节器！）.

这样，在"恒定"负荷下工作的蒸汽机，并不是（若采用上述诸假设）自旋转系统. 尽管如此，为了研究蒸汽机的其他自旋转动力学模型的需要，我们仍将对目前研究的这种动力学模型的相柱面的轨线划分，作一简短的分析.

引入新变量：

$$\vartheta = \varphi - \varphi_1 \text{ 和 } t_{新} = \sqrt{\frac{M_H^0}{I}}\,t;$$

此时，对于所研究这种恒定负荷情况，方程(8.83)可写成如下无量纲形式[1]：

$$\dot{\vartheta} = z,\quad \dot{z} = \lambda\Phi(\vartheta) - \Psi(z,\vartheta), \tag{8.83a}$$

其中

$$\lambda = \frac{M_0}{M_H^0} > 1 \ (\text{因为 } M_0 > M_H^0),$$

$\Phi(\vartheta)$ 和 $\Psi(z,\vartheta)$——蒸汽机推动力矩和"恒定"负载力矩的折算理想特性（图 445）：

$$\Phi(\vartheta) = \begin{cases} 1 & \text{当 } 0 \leqslant \vartheta < \Theta \text{ 和 } \pi \leqslant \vartheta < \pi + \Theta \text{ 时}, \\ 0 & \text{当 } \Theta \leqslant \vartheta < \pi \text{ 和 } \pi + \Theta \leqslant \vartheta < 2\pi \text{ 时} \end{cases} \tag{8.85a}$$

（这里 $\Theta = \varphi_2 - \varphi_1$ 为以前曾引入过的"进汽角"）；

$$\Psi(z,\vartheta) = \left\{\begin{array}{ll} \operatorname{sgn} z & \text{当 } z \neq 0 \text{ 而 } \vartheta \text{ 取任意值时}, \\ 1 & \text{当 } z = 0 \text{ 和 } 0 \leqslant \vartheta < \Theta \\ & \text{或 } \pi \leqslant \vartheta < \pi + \Theta \text{ 时}, \\ 0 & \text{当 } z = 0 \text{ 和 } \Theta \leqslant \vartheta < \pi \\ & \text{或 } \pi + \Theta \leqslant \vartheta < 2\pi \text{ 时}. \end{array}\right\} \tag{8.84a}$$

我们指出方程(8.83a)之相柱 ϑ, z 的轨线划分的某些特点：1)在 $z = 0$ 圆上，有两个"静止线段" $\Theta \leqslant \vartheta < \pi$ 和 $\pi + \Theta \leqslant \vartheta < 2\pi$，由**稳定平衡状态**组成（在"静止线段"各点上有 $\dot{\vartheta} = 0$，$\dot{z} = 0$，而

1）在这里和以后，字母上方的圆点表示对于新的无量纲时间 $t_{新}$ 的导数.

轨线，无论在相柱的上半部和下半部，当 t 增加时，都向这些点趋近，这是因为当 ϑ 取上述值时，若 $z>0$ 则 $\dot{z}=-1$，若 $z<0$ 则 $\dot{z}=+1$)；2)在相柱的下半部($z<0$，ϑ 取任意值)上有 $\dot{z}>0$，因此这里的所有相轨线都走向圆 $z=0$，也就是说，或者趋向"静止线段"上的平衡状态，或者转入圆柱的上半部(在圆周 $z=0$ 上的 $\Theta\leqslant\vartheta<\pi$，$\pi+\Theta\leqslant\vartheta<2\pi$ 区间内，即"静止线段"内部，有 $\dot{z}=0$，而在 $0\leqslant\vartheta<\Theta$，$\pi\leqslant\vartheta<\pi+\Theta$ 区间内，即"静止线段"外部，则有 $\dot{z}=\lambda-1>0$)；3)不存在由相柱上半部向下半部过渡(t增加时)的相轨线.

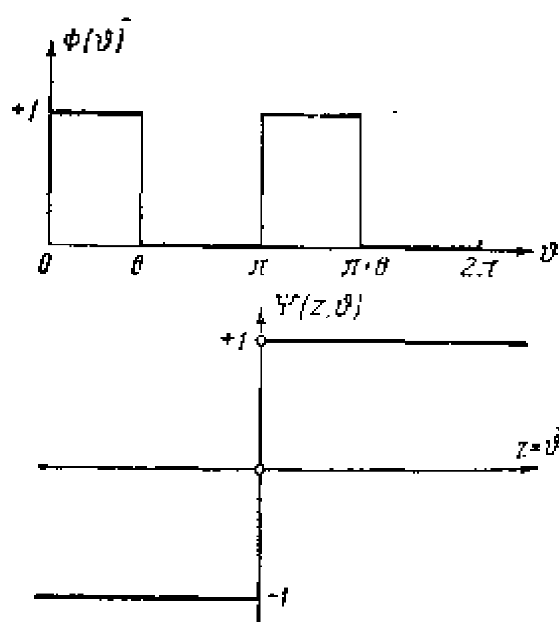


图 445

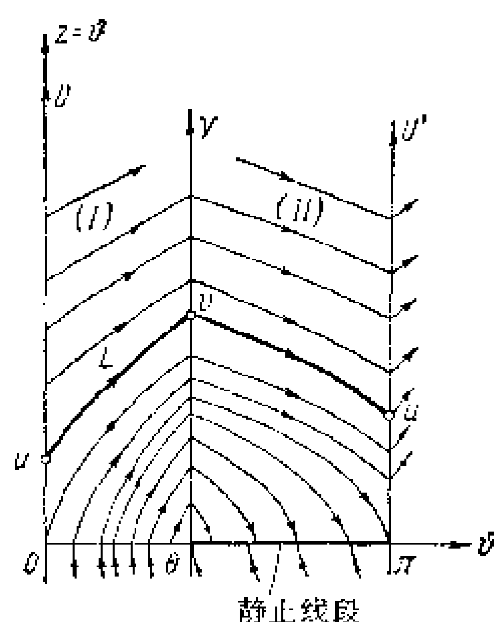


图 446

相柱上半部($z>0$)的轨线确定两个点变换：将半直线 U ($\vartheta=0$, $z=u>0$)上的点变换为半直线 U'($\vartheta=\pi$, $z=u'>0$)上的点的点变换 Π，以及半直线 U' 向半直线 $\vartheta=2\pi$，$z>0$，即半直线 U 的点变换 Π'. 由于推动力矩，因而也就是(8.83)的右端，乃是角 φ 的周期函数，周期等于 π，相柱之 $0\leqslant\vartheta<\pi$ 和 $\pi\leqslant\vartheta<2\pi$ 两部分的轨线划分，必将彼此恒等，从而点变换 Π 和 Π' 也必然相重合($\Pi\equiv\Pi'$). 因此，在某一任意选出的相轨线与半直线 U 和 U'

的交点序列:

$$u_1, u_2, \cdots, u_k, u_{k+1}, \cdots$$

中，每一后继点都可根据同一个点变换(例如变换 Π)由前行点确定，与此点位于哪条半直线上无关:

$$u_{k+1} = \Pi(u_k)^{1)}$$

为了计算点变换 Π 的对应函数，在相圆柱的一部分：$0 \leqslant \vartheta < \pi$, $z > 0$ 上，画出确定此变换的相轨线(8.83a)(图 446)．在区域(I)：$0 \leqslant \vartheta < \Theta$, $z > 0$ 中，运动方程(8.83a)具有如下形式:

$$\dot{\vartheta} = z, \quad \dot{z} = \lambda - 1,$$

由此可得

$$\frac{dz}{d\vartheta} = \frac{\lambda - 1}{z}.$$

将后一方程积分后，可以得出，在区域(I)的相轨线乃是抛物线

$$z^2 - 2(\lambda - 1)\vartheta = \text{常数} \tag{8.86a}$$

的弧．与此相类似，在区域(II)：$\Theta \leqslant \vartheta < \pi$, $z > 0$ 中，

$$\dot{\vartheta} = z, \quad \dot{z} = -1, \quad \frac{dz}{d\vartheta} = -\frac{1}{z},$$

相轨线将是另一些抛物线

$$z^2 + 2\vartheta = \text{常数} \tag{8.86b}$$

的弧．

令 L 为方程组(8.83a)的相轨线，由半直线 U 的某一点 u(即点 $\vartheta = 0$, $z = u > 0$)开始，其方程在 $0 \leqslant \vartheta < \Theta$ 上将为:

$$z^2 = u^2 + 2(\lambda - 1)\vartheta,$$

因此，它将在纵坐标为 v 的点处进入区域(I)的边界——半直线 V ($\vartheta = \Theta$, $z = v > 0$)，其中 v 可由如下关系式确定:

$$v^2 = u^2 + 2(\lambda - 1)\Theta.$$

在区域(II)中，相轨线 L 的方程将为:

$$z^2 = v^2 - 2(\vartheta - \Theta),$$

---

1) 点列 $u_1, u_2, \cdots$ 一般来说，可能是有限的，因为可能出现这种情况：在半直线 U 上有一线段，其上的点借助于相轨线不是变换成半直线 U' 的点，而将变成"静止线段"上的点(半直线 U 上的这一线段的点，在半直线 U' 上没有后继点)．

因此，在相轨线 L 与半直线 U' 的交点上必有:

$$u'^2 = v^2 - 2(\pi - \Theta)^{1)}$$

或

$$u'^2 = u^2 + 2(\lambda\Theta - \pi).$$

此关系式也就确定出(显式)点变换 Π 的对应函数. 此变换乃是半直线 U 的点(纵坐标为 u)向半直线 U' 的点(纵坐标为 u')的变换[2].

在图 447—449 上表示出三种可能情况的拉梅尔图，即：a) $\lambda\Theta > \pi$，б) $\lambda\Theta = \pi$ 和 в) $\lambda\Theta < \pi$（在纵轴上标的是 u^2 和 u'^2，这样就使对应函数的图象成为直线）. 当 $\lambda\Theta > \pi$ 时 $u'^2 > u^2$（图 447），因此，任意轨线与半直线 U 和 U' 之交点的纵坐标所构成的序列，乃是无限增长的，而相轨线则环绕圆柱走向无限远(即蒸汽机进入“飞车”). 当 $\lambda\Theta = \pi$ 时 $u'^2 = u^2$（图 448），于是半直线 U（或 U'）的所有点，都将是变换 Π 的不动点. 因此在这种情况下，系统将是“拟保守系统”：通过半直线 U 的每一点，都有一环绕柱的闭轨线(蒸汽机可以在主轴的任意平均转速下工作；此平均速度的大小决定于初始条件). 应当指出，无论在 $\lambda\Theta > \pi$，还是在

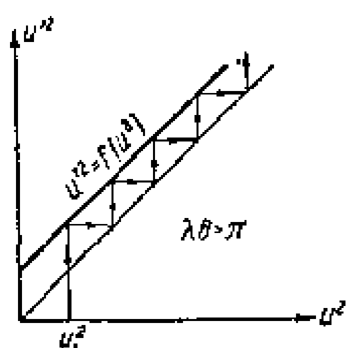


图 447

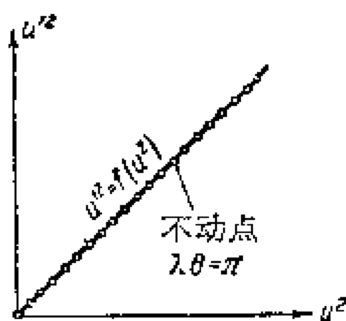


图 448

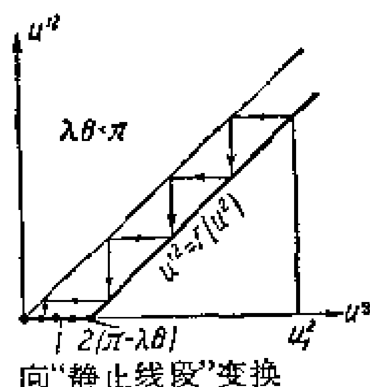


图 449

1) 只有当 $v \geqslant \sqrt{2(\pi - \Theta)}$ 时，从点(Θ, v)出发的轨线才能到达半直线 U'. 在这种情况下，半直线 V 的点 v，才能在半直线 U' 上具有后继点. 如果 $v < \sqrt{2(\pi - \Theta)}$，则从点 (Θ, v) 出发的轨线将落在“静止线段” $\Theta \leqslant \vartheta < \pi$，$z = 0$ 上，从而半直线 V 的点 v，在半直线 U' 上将没有后继点.

2) 当 $\lambda\Theta \geqslant \pi$ 时，半直线 U 的所有点都有后继点(在半直线 U' 上)；但如果 $\lambda\Theta < \pi$，则在半直线 U 上，只有满足 $u^2 \geqslant 2(\pi - \lambda\Theta)$ 的那些点，才能有后继点(在半直线 U' 上).

$\lambda\Theta=\pi$ 的情况中，相柱上都存在具有一定吸引区的"静止线段"，这就是说，在这些情况中，也可以给定一定的初始条件，使蒸汽机停下来．最后，当 $\lambda\Theta<\pi$（图 449），即 $u'^2<u^2$ 时，相轨线与半直线

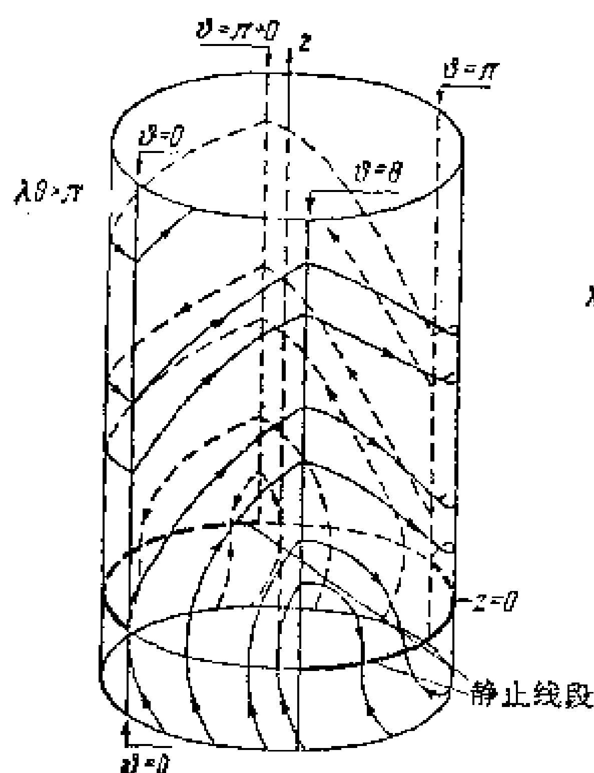


图 450

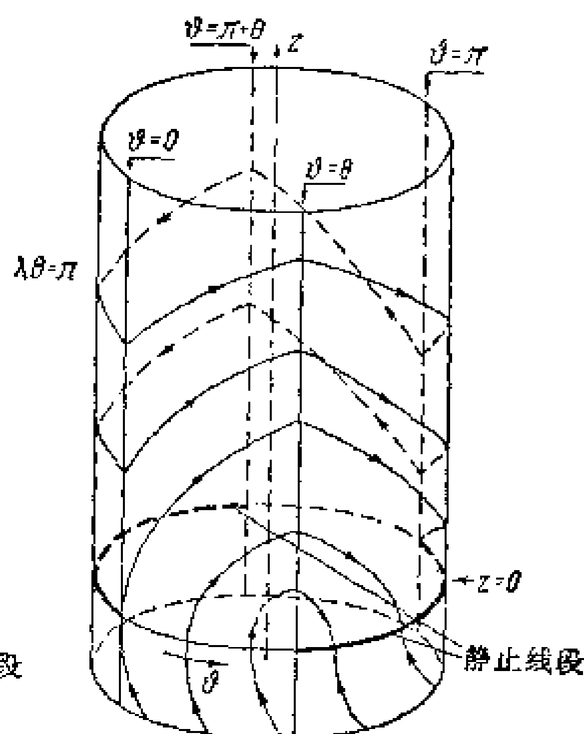


图 451

U 和 U' 的所有交点序列都将是单调减小的，而且是有限的．的确，如果某一轨线与半直线 U 和 U' 的第一个交点的纵坐标以 u_1 表示，则对于第 n 个交点必有 $u_n<\sqrt{2(\pi-\lambda\Theta)}$，其中 $n=E\left[\frac{u_1^2}{2(\pi-\lambda\Theta)}\right]+1$[1]，这说明，此点在点变换 II 中将无后继点，与之相对应的轨线则不再与半直线 U 和 U' 相交，而进入"静止线段"上的某一点．这样，在 $\lambda\Theta<\pi$ 的情况中，所有相轨线都将进入"静止线段"，蒸汽机在任何初始条件下都将停下来．对应于这三种情况的相柱 ϑ, z 的轨线划分表示在图 450—452 上．由于 $\lambda=\frac{M_0}{M_H^0}$，得出的结果显然与上面进行的能量研究的结果相吻合．

1）$E(x)$ 表示 x 的整数部分，即 $E(x)=l$ $(l=0,1,2,\cdots)$，若 $l\leqslant x<l+1$．

这样，蒸汽机不可能在“恒定”负荷下稳定地工作：或停下来，或进入“飞车”．为了在“恒定”负荷下，使蒸汽机获得稳定运行状态，使主轴以某一给定平均转速旋转，且不与初始条件有关，即获得稳定自旋转运行状态，必须在蒸汽机上装配主轴转速调节器．

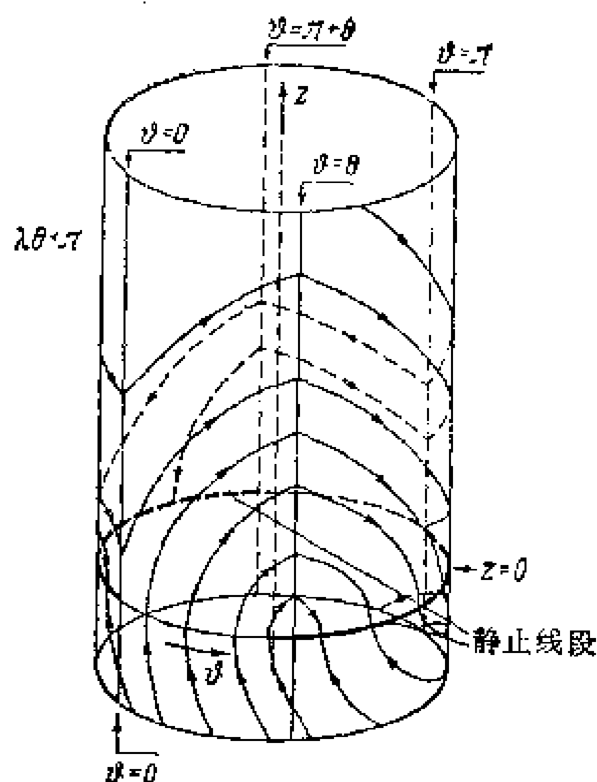


图 452

2. 在“恒定”负荷下工作且装有调节器的蒸汽机． 我们来研究在“恒定”负荷下工作的，装有主轴转速调节器的蒸汽机的动力学．一种应用最广的蒸汽机调节器的结构如下：在蒸汽机主轴上装有主轴转速传感器（转速表）以控制(直接地或者通过一定的伺服系统)蒸汽机活门，减小“进汽角”，从而在蒸汽机主轴转速增加时减小推动力矩的功．如果假定调节器是“无惯性的”，即是瞬时动作的，我们就可以假设“进汽角” Θ 不是常量，而是主轴转速 $\dot{\vartheta}=z$ 的某一函数(为简单计，设它是线性的)：

$$\Theta=\Theta_0-kz,$$

其中 $k>0$ 为调节器传输系数，Θ_0 为 $\dot{\vartheta}=0$ 时的“进汽角”．有关推动力矩和负荷力矩的其他假设保持原样不变．对于装有调节器的蒸汽机所采用的这种动力学模型，其相柱 ϑ, z 的轨线划分，在很多方面与刚刚研究过的划分相类似：在圆周 $z=0$ 上有两个由稳定平衡状态组成的“静止线段” $\Theta_0\leqslant\vartheta<\pi$ 和 $\pi+\Theta\leqslant\vartheta<2\pi$，圆柱下半部的所有轨线都趋向“静止线段”或转入圆柱的上半部，而研究相柱上半部($z>0$)的轨线的走向问题，仍然归结为建立和研究由这些轨线所实现的半直线 $U(\vartheta=0,\ z=u>0)$ 对半直线 $U'(\vartheta=\pi, z=u'>0)$ 的点变换．和前一种情况一样，在相柱的上

半部，区域(I)中(推动力矩 $M=M_0$，即 $\Phi(\vartheta)=1$)，相轨线为抛物线(8.86a)，区域(II)中(推动力矩$M=0$)相轨线为抛物线(8.86b)。

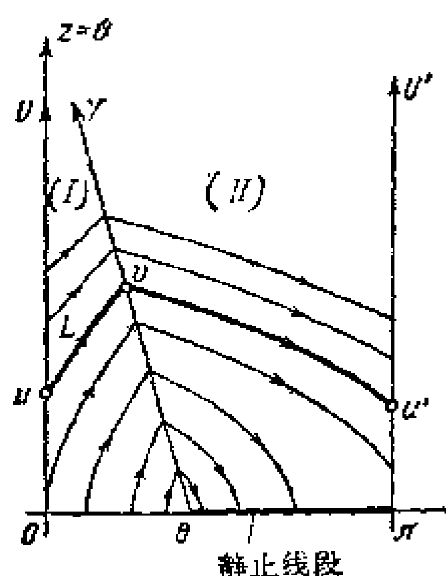


图 453

但此时区域(I)和(II)的边界线已不再是母线 $\vartheta=\Theta=$ 常数，而是倾斜线段 $V\left(\vartheta=\Theta_0-kz,\ 0<z\leqslant\dfrac{\Theta_0}{k}\right)$ (图 453)，这一情况将显著改变我们所要研究之这种点变换的对应函数。

为了计算对应函数，我们研究从半直线U上某一任意点 u 出发的轨线 L. 如果 $u<\dfrac{\Theta_0}{k}$，则轨线 L 将首先进入区域(I)$\left(0<\vartheta<\Theta_0-kz,\ 0<z<\dfrac{\Theta_0}{k}\right)$，其方程为：

$$z^2=u^2+2(\lambda-1)\vartheta,$$

因而它必然到达区域 (I) 的边界线，落于线段V上的某点，后者的纵坐标 v 由方程

$$v^2=u^2+2(\lambda-1)(\Theta_0-kv) \tag{8.87a}$$

所决定。然后，轨线 L 进入区域(II)，其方程为

$$z^2=v^2-2(\vartheta-\Theta_0+kv),$$

因此，它必然到达半直线 U，落于纵坐标为 u' 的点，且

$$u'^2=v^2-2(\pi-\Theta_0+kv). \tag{8.87b}$$

得出的关系式(8.87a)和(8.87b)就对 $u<\dfrac{\Theta_0}{k}$ 的情况确定出(以参数形式——通过参数 v)半直线U对半直线 U' 的点变换：

$$\left.\begin{aligned}u^2&=v^2-2(\lambda-1)(\Theta_0-kv),\\ u'^2&=v^2-2(\pi-\Theta_0+kv).\end{aligned}\right\} \tag{8.87}$$

当然，在半直线U上的点，只有当它们满足下述条件时才能够变换

成半直线 U' 上的点，这个条件为：$u'^2=v^2-2(\pi-\Theta_0+kv)\geqslant 0$，即

$$v\geqslant v_0=k+\sqrt{k^2+2(\pi-\Theta_0)}>k;$$

在半直线 U 上，相当于 $v<v_0$ 的点，将变换成"静止线段"的点.

如果 $u\geqslant\frac{\Theta_0}{k}$，则轨线 L 立即进入区域(II)，其方程为：

$$z^2=u^2-2\vartheta,$$

因此，此轨线与半直线 U' 的交点的纵坐标 u'（或者说，对应于 $u\geqslant\frac{\Theta_0}{k}$ 的对应函数）将决定于方程

$$u'^2=u^2-2\pi.$$

很明显，当 $u\geqslant\frac{\Theta_0}{k}$ 时，所研究的点变换没有不动点，半直线 U 和 U' 上每一个坐标为 $u\geqslant\frac{\Theta_0}{k}$ 的点，经过有限次变换以后，将变换成座标为 $u<\frac{\Theta_0}{k}$ 的点. 因此下面绘制拉梅尔图时，可只限于考虑 u 的由 0 到 $\frac{\Theta_0}{k}$ 的变化区间.

曲线 (8.87) 是双曲线，而且在拉梅尔图上的我们所关心的象限内(u, $u'>0$, $v>0$)，这些双曲线或者没有交点（图 454）或相交于一点，此点相当于点变换的不动点（图 455）. 对于不动点（$u=u'=\bar{u}$, $v=\bar{v}$）我们有：

$$\bar{v}^2-2(\lambda-1)(\Theta_0-k\bar{v})=\bar{v}^2-2(\pi-\Theta_0+k\bar{v}),$$

即

$$\Theta_0-k\bar{v}=\frac{\pi}{\lambda}\ \text{或}\ \bar{v}=\frac{1}{k}\left(\Theta_0-\frac{\pi}{\lambda}\right);$$

$\bar{v}$ 的这一数值对应于：

$$\bar{u}^2=\bar{v}^2-2(\lambda-1)(\Theta_0-k\bar{v})=$$

$$=\frac{1}{k^2}\left(\Theta_0-\frac{\pi}{\lambda}\right)^2-2(\lambda-1)\frac{\pi}{\lambda}.$$

由于在不动点(如果存在）上有 $\bar{v}>0$ 和 $\bar{u}^2>0$，因而它的存在条件将为不等式：

$$\lambda\Theta_0>\pi\ \text{和}\ k^2<\frac{(\lambda\Theta_0-\pi)^2}{2\pi\lambda(\lambda-1)}.\tag{8.88}$$

此不动点是稳定的，因为在其上（根据明显的不等式：$\bar{v} > v_0 > k > 0$）

$$\frac{du'}{dv} = 2\bar{v} - 2k > 0, \quad \frac{du}{dv} = 2\bar{v} + 2k(\lambda - 1) > \frac{du'}{dv}$$

因而

$$0 < \frac{du'}{du} < 1^{1)}.$$

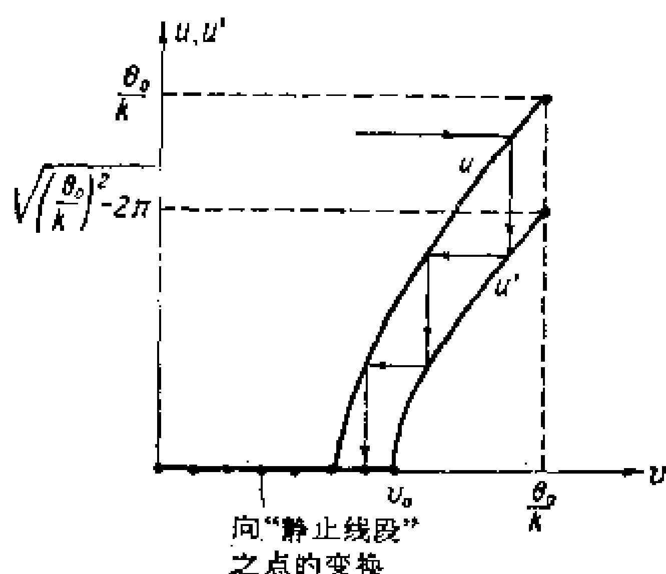


图 454

这样，如果（8.88）不满足，则拉梅尔图如图454所示，在蒸汽机的相柱ϑ，z上，所有轨线都走向"静止线段"，即无论初始条件如何，蒸汽机将停止下来。

如果条件(8.88)满足，则轨线与半直线U和U'的所有交点序列，都将收敛于唯一的稳定不动点$\bar{u}$（图455）。这显然说明，相柱上存在有唯一的稳定极限环，环绕圆柱，对应于蒸汽机的**自旋转状态**，于是，所有轨线，只要与半直线U或U'相交，即便只有一次，都将渐近地趋向此极限环（图457）[2]。此外，在相柱上，还存在有进入"静止线段"的轨线（这

1）在 $k<0$，即调节器连接错误的情况中，只要条件(8.88)满足，仍将有不动点存在，但一定是不稳定的，因为当 $k<0$ 时有：

$$0<\frac{du}{dv}<\frac{du'}{dv} \text{ 或 } \frac{du'}{du}>1.$$

2）自旋转运动的周期可用下法计算．根据(8.83)的第二方程，在区域(I)中有 $\dot{z}=\lambda-1$，在区域(II)中有 $\dot{z}=-1$．因此，沿极限环运动的相点，其在区域(I)中的穿越时间为 $\tau_1=\frac{\bar{v}-\bar{u}}{\lambda-1}$，在区域(II)中的为 $\tau_2=\bar{v}-\bar{u}$，即蒸汽机主轴之旋转周期（采用无量纲时间单位）等于：

$$\tau = 2(\tau_1+\tau_2) = \frac{2\lambda}{\lambda-1}(\bar{v}-\bar{u})$$

$$= \frac{2\lambda}{\lambda-1}\left[\frac{1}{k}\left(\Theta_0-\frac{\pi}{\lambda}\right)-\sqrt{\frac{1}{k^2}\left(\Theta_0-\frac{\pi}{\lambda}\right)^2-2(\lambda-1)\frac{\pi}{\lambda}}\right].$$

些轨线不与半直线 U 和 U' 相交)．因此，当条件(8.88)满足时，我们所得到的将是蒸汽机自旋转运行状态的**硬激状态**：蒸汽机中将建立起自旋转运行状态（机器主轴具有与初始条件无关的旋转周期)，如果初始条件的选择得使相点于 $t=0$ 时，位于“静止线段”

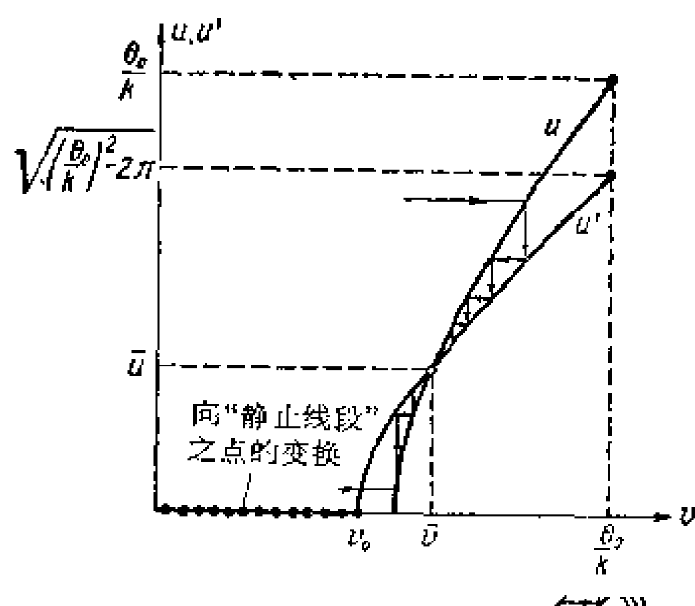


图 455

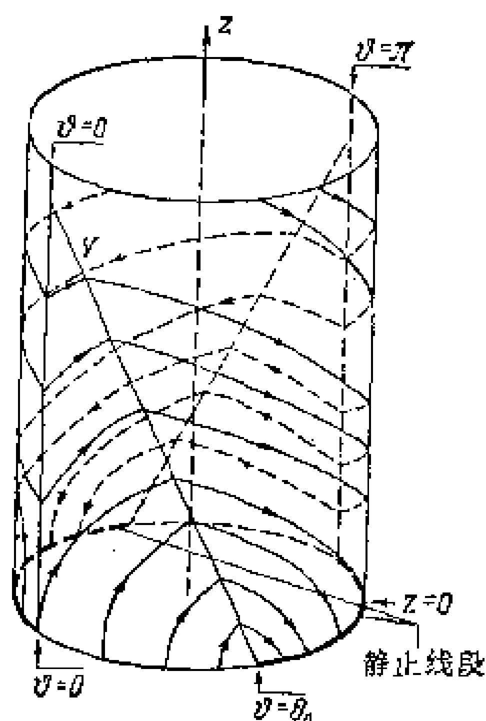


图 456

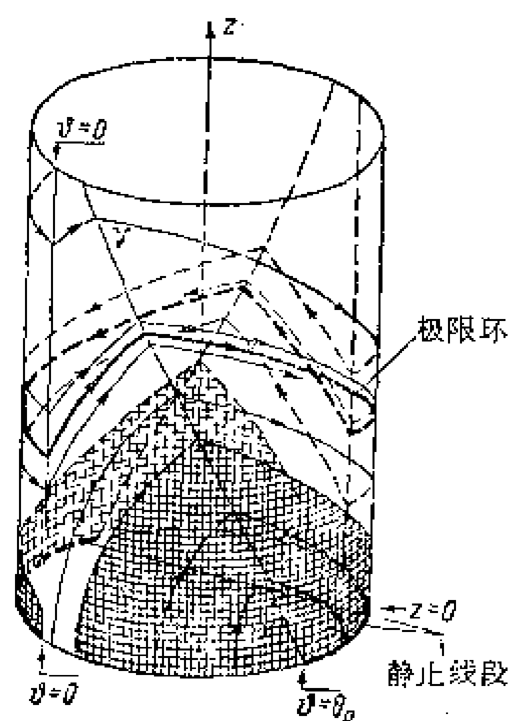


图 457

的吸引区之外部("静止线段"的吸引区,是由进入"静止线段"的所有轨线上的点构成的,其边界线为趋向$(\Theta, 0)$和$(\pi+\Theta_0, 0)$二点之轨线;这些区域在图 457 上画有格线).

这样,适当选择主轴转速调节器,能镇定蒸汽机的工作:这种调节器使"恒定"负荷的蒸汽机的稳定工作成为可能.对蒸汽机的工作能起到类似的镇定作用的还有这样的负荷,其力矩随主轴转速的增加而增大.这种负荷使主轴的转速不可能无限增大,否则,负荷加给蒸汽机的力矩所做之功(每转动一周),也必然要无限地增大.因此,如果负荷随主轴转速的增加而增大,则蒸汽机不必安装任何调节器,就能稳定地工作.

3. 在与转速有关的负荷下工作的蒸汽机. 下面我们从负荷是由干摩擦和粘摩擦力所造成的这一假设出发,来研究蒸汽机的动力学,即假设负荷力矩为:

$$M_H=\begin{cases} M_H^0\operatorname{sgn}\dfrac{d\varphi}{dt}+H\dfrac{d\varphi}{dt} & \text{当 } \dfrac{d\varphi}{dt}\neq 0 \text{ 时}, \\ M, \text{ 若 } \dfrac{d\varphi}{dt}=0 \text{ 和 } M\leqslant M_H^0, \\ M_H^0, \text{ 若 } \dfrac{d\varphi}{dt}=0, \text{ 但 } M>M_H^0, \end{cases}$$

其中 M_H^0 为最大静止摩擦力矩,H 为表征负荷力矩随主轴转速增加而增大的系数 $(H>0)$.例如,轮船的蒸汽机就是在这种负荷下工作的.

在这种负荷下,蒸汽机主轴的旋转方程(采用在本节第一小节中曾引入的变量)具有如下形式:

$$\dot{\vartheta}=z,\ \dot{z}=\lambda\Phi(\vartheta)-\Psi(z,\vartheta)-hz, \tag{8.89}$$

其中 $\Phi(\vartheta)$ 和 $\Psi(z,\vartheta)$ 为由关系式(8.85a)和(8.84a)确定的函数,

$$\lambda=\frac{M}{M_H^0}>1 \text{ 和 } h=\frac{H}{\sqrt{M_H^0 I}}>0,$$

而"进汽角" Θ 则仍旧看作是恒定的.

在系统相柱 ϑ, z 上的 $0\leqslant\vartheta<\pi$ 带面上,方程(8.89)的轨线的划分表示在图 458 上;$\pi\leqslant\vartheta<2\pi$ 带面的轨线划分与 $0\leqslant\vartheta<\pi$

带面的划分完全一样，因为(8.89)第二个方程的右端乃是蒸汽机主轴转动角 ϑ 的周期函数，且周期为 π. 和以前一样，在圆周 $z=0$ 上有两条"静止线段"：$\Theta \leqslant \vartheta < \pi$ 和 $\pi+\Theta \leqslant \vartheta < 2\pi$，由稳定平衡状态组成；相柱下半部的轨线或进入"静止线段"，或转入柱的上半部；此外，在系统的相柱上，不存在由上半部转入下半部的相轨线. 因此，同本节第一小节中一样，研究这种在随转速的增加而增大的负荷下工作的蒸汽机（特别是寻求其周期运动问题），就可归结为研究半直线 $U(\vartheta=0, z=u>0)$ 对半直线 $U'(\vartheta=\pi, z=u'>0)$ 的点变换，此变换是由相柱上半部的系统的轨线所实现的.

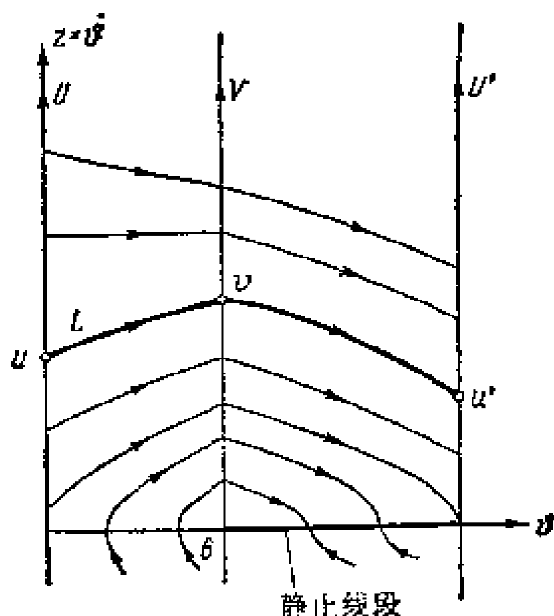


图 458

为了计算此点变换的对应函数，我们来研究通过半直线 U 上任意点 u 的相轨线 L（图 458）. 在区域（I）：$0 \leqslant \vartheta < \Theta$, $z>0$ 中，将方程组(8.89)积分之，得出此相轨线在区域(I)内的方程：

$$z = a + (u-a)e^{-ht},$$

$$\vartheta = at + \frac{1}{h}(u-a)(1-e^{-ht}),$$

其中

$$a = \frac{\lambda-1}{h} > 0.$$

此轨线必与区域(I)的右边界线——半直线 $V(\vartheta=\Theta, z=v>0)$——相交，因为在区域(I)内有 $\dot{\vartheta}=z>0$，并且在圆周 $z=0$ 的 $0 \leqslant \vartheta < \Theta$ 这段弧上 $\dot{z}>0$. 如果将相点沿轨线 L 在区域(I)中运动所需之穿越时间以 τ_1 表示之，则此穿越时间以及轨线 L 与半直线 V 的交点坐标 v，显然可用如下方程组来确定：

$$\Theta = \frac{a}{h}\tau_1 + \frac{1}{h}(u - a)(1 - e^{-\tau_1}),$$

$$v = a + (u - a)e^{-\tau_1}.$$

从得到的方程中解出 u 和 v，我们将求出半直线 U 对半直线 U' 的点变换 Π_1（此变换是由区域（I）中的轨线实现的）． 的对应函数（以参数形式）如下：

$$u = a\left[1 + \frac{\alpha - \tau_1}{1 - e^{-\tau_1}}\right], \qquad v = a\left[1 + \frac{\alpha - \tau_1}{e^{\tau_1} - 1}\right] \quad (8.90)$$

其中

$$\alpha = \frac{h\Theta}{a} = \frac{h^2\Theta}{\lambda - 1}.$$

半直线 U 的点 $u = 0$，对应于等于 τ_1^0 的 τ_1 值，并决定于方程

$$\tau_1^0 - 1 + e^{-\tau_1^0} = \alpha \quad (8.90a)$$

（显然 $\tau_1^0 > \alpha$），其在半直线 V 上的后继点坐标将是：

$$v = v_0' = a(1 - e^{-\tau_1^0}) = a(\tau_1^0 - \alpha) \quad (8.90b)$$

（显然，$0 < v_0' < a$）．其次，由于

$$\frac{du}{d\tau_1} = a\frac{-(1-e^{-\tau_1}) - (\alpha - \tau_1)e^{-\tau_1}}{(1 - e^{-\tau_1})^2} = -\frac{v}{1 - e^{-\tau_1}} < 0,$$

$$\frac{dv}{d\tau_1} = a\frac{-(e^{\tau_1} - 1) - (\alpha - \tau_1)e^{\tau_1}}{(e^{\tau_1} - 1)^2} = -\frac{u}{e^{\tau_1} - 1} < 0,$$

以及

$$\frac{du}{dv} = \frac{du}{d\tau_1} \div \frac{dv}{d\tau_1} = \frac{v}{u}e^{\tau_1} > 0, \quad (8.90c)$$

故而 u 和 v 均为参数 τ_1 的单调减函数；因此，坐标值 u 从 0 到 $+\infty$ 的集合，对应于参数值 τ 由 τ_1^0 到 0，以及后继点坐标值 v 由 v_0' 到 $+\infty$ 的集合．还应指出，当 $u = 0$（和 $v = v_0'$），$u - v = a(\alpha - \tau_1)$ 时，$\frac{du}{dv} = +\infty$，从而当 $\tau_1 = \alpha$（这些点属于区域(I)的直线轨线 $z = a$)时 $u = v = a$，当 $\alpha < \tau_1 < \tau_1^0$ 时 $u < v < a$，当 $0 < \tau_1 < \alpha$ 时 $u > v > a$，以及当 $\tau_1 \to +0(u, v \to +\infty)$ 时 $u \to v + a\alpha$．变换 Π_1 的对应函数(8.90)的图象表示在图 459 上．

相轨线 L 与半直线 V 相交后转入区域(II)：$\Theta \leqslant \vartheta < \pi, z > 0$，

在这里其方程为:

$$z = -b + (v + b)e^{-ht},$$

$$\vartheta = \Theta - bt + \frac{1}{h}(v + b)(1 - e^{-ht})$$

($b = \frac{1}{h}$; 此外, 我们重新选择了时间的起点,使 $t = 0$ 时 $\vartheta = \Theta$ 和 $z = v$). 如果轨线 L 与半直线 U' 相交, 则此点的坐标由如下方程组确定:

$$\pi = \Theta - \frac{b}{h}\tau_2 + \frac{1}{h}(v + b)(1 - e^{-\tau_2}),$$

$$u' = -b + (v + b)e^{-\tau_2};$$

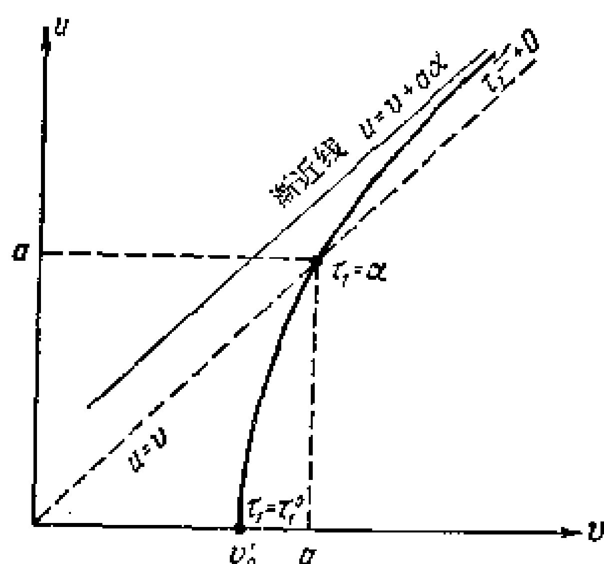


图 459

这里 $\tau_2 = ht_2$, 其中 t_2 为相点沿轨线 L_2 在区域(II)内由半直线 V 运动到半直线 U' 所需之穿越时间. 由上述方程中解出 u' 和 v, 我们将就得到半直线 V 对半直线 U' 的点变换 Π_2 (由区域(II)的轨线所实现的)的对应函数(同样以参数形式):

$$u' = b\left[-1 + \frac{\beta + \tau_2}{e^{\tau_2} - 1}\right], \quad v = b\left[-1 + \frac{\beta + \tau_2}{1 - e^{-\tau_2}}\right], \quad (8.91)$$

其中

$$\beta = \frac{h(\pi - \Theta)}{b} = h^2(\pi - \Theta).$$

将对应于 $u'=0$ 的 τ_2 值以 τ_2^0 表示之，其大小可用方程

$$e^{\tau_2^0}-1-\tau_2^0=\beta \tag{8.91a}$$

确定；此参数值 $\tau_2=\tau_2^0$ 对应于半直线 V 上的坐标为

$$v=v_0''=b(e^{\tau_2^0}-1)=b(\beta+\tau_2^0) \tag{8.91b}$$

的点．显然，在半直线 V 上，只有 $v\geqslant v_0''$ 的点，才能借助于区域(II)的轨线变换为半直线 $U'(u'\geqslant 0)$ 上的点．半直线 V 上，坐标为 $0<v<v_0''$ 的点，将变换为"静止线段"上的点，因为从半直线 V 上的这些点出发的轨线，不与半直线 U' 相交，而落到"静止线段"上．

将(8.91)微分后，可得：

$$\frac{du'}{d\tau_2}=-\frac{v}{e^{\tau_2}-1}<0,\ \frac{dv}{d\tau_2}=-\frac{u}{1-e^{-\tau_2}}<0,$$

和

$$\frac{du'}{dv}=\frac{v}{u'}e^{-\tau_2}>0, \tag{8.91c}$$

即 u 和 v 均为参数 τ_2 的单调减函数，因而，半直线 V 上借助于区域(II)的轨线可变换为半直线 U' 之点的集合：$v\geqslant v_0''$，对应于变换参数值 τ_2 的集合：$0<\tau_2\leqslant\tau_2^0$．由于 $u'-v=-b(\beta+\tau_2)$，故对于任意的 $0<\tau_2\leqslant\tau_2^0$，都有 $u'<v-b\beta$（当 $\tau_2\to+0$ 时 $u'\to v-b\beta$，且 $v\to+\infty$）．点变换 Π_2 的对应函数(8.91)的图象表示在图 460 上．

我们所关心的"全"变换 Π，即半直线 U 对半直线 U' 的变换，乃是求得的变换 Π_1 和 Π_2 二者之乘积：

$$\Pi=\Pi_1\cdot\Pi_2$$

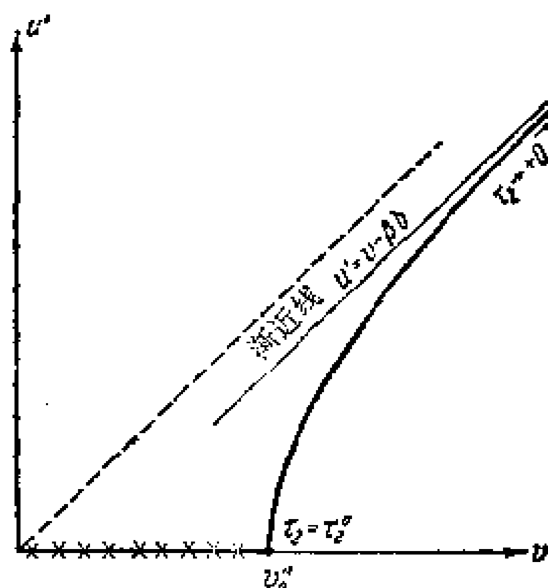
此点变换的不动点（$u'=u=\bar{u}$，$v=\bar{v}$，$\tau_1=\bar{\tau}_1$，$\tau_2=\bar{\tau}_2$）对应于环绕相柱的极限环（即对应于蒸汽机工作的自旋转运行状态），显然可用如下超越方程组确定：

$$\left.\begin{aligned}a\left[1+\frac{\alpha-\bar{\tau}_1}{1-e^{-\bar{\tau}_1}}\right]&=b\left[-1+\frac{\beta+\bar{\tau}_2}{e^{\bar{\tau}_2}-1}\right],\\ a\left[1+\frac{\alpha-\bar{\tau}_1}{e^{\bar{\tau}_1}-1}\right]&=b\left[-1+\frac{\beta+\bar{\tau}_2}{1-e^{-\bar{\tau}_2}}\right]\end{aligned}\right\} \tag{8.92}$$

(显然，$a<\tau_1\leqslant\tau_1^0$ 和 $0<\tau_2\leqslant\tau_2^0$)．根据(8.90c)和(8.91c)，在不动点上：

$$0<\frac{du'}{du}=\frac{du'^*}{dv}\div\frac{du}{dv}=e^{-(\tau_1+\tau_2)}<1, \qquad (8.92a)$$

因此，不动点如果存在，乃是稳定的和唯一的[1]．



变换到"静止线段"上的点

图 460

由于系统参数 h,λ,Θ 的数值不同，可能出现两种性质上不同的情况．如果系统参数所取的数值使得 $v_0'<v_0''$，则点变换 Π 没有不动点(图461)[2]．系统之轨线与半直线 U 和 U' 的所有交点序列都是有限的，而且这些序列的最后点都变换成"静止线段"的

---

* 原书为 $\frac{dv'}{dv}$——译者注．

1) 不动点的稳定性，可直接由克尼格斯定理中导出，其唯一性则可以从如下分析中导出：如果点变换 Π 具有若干不动点，则最低限度，对于其中一个点(根据 v 的函数 u 和 u'，以及其导数 $\frac{du}{dv}$ 和 $\frac{du'}{dv}$ 的连续性)必有不等式

$$\frac{du'}{dv}>\frac{du}{dv}>0,$$

而根据(8.92a)这是不可能的．

2) 由于 $v_0'<v_0''$ 时，不论 $v=v_0''$ 或 $v\to+\infty$，都有 $u'<v$，因此对应函数(8.90)和(8.91)的图象，如果画在一个图上(拉梅尔图)，则或者完全不相交(此时变换 Π 没有不动点)，或者具有偶数个交点(即变换 Π 具有偶数不动点)．根据上面已证明的，后者是不可能的．

图 461

图 462

图 463

点．因此，在这种情况下，系统的所有轨线都将进入“静止线段”，即蒸汽机在任何初始条件下都将停止下来．

如果 $v_0' > v_0''$，则点变换 Π 具有唯一的稳定不动点，轨线与半直线 U 和 U' 的所有交点序列(图 462)，都将趋向此不动点[1]． 因此，在相柱上必有唯一的稳定极限环，环绕圆柱，而且所有与半直线 U 和 U' 相交的轨线都渐近地($t \to +\infty$ 时)趋向此极限环．由于在相柱上，除此而外，尚有由“静止线段”组成的稳定平衡状

1) 在这里，由于 $v = v_0'$ 时 $u' > u$，但 $v \to +\infty$ 时仍然有 $u' < u$，因而根据对应函数(8.90)和(8.91)的连续性，这些函数的图象，如果画在同一个图上(参看图 462)，至少必有一个交点，即变换 Π 至少有一个不定点．上面已根据不等式(8.92)，证明了此不动点的稳定性和唯一性．

态，因此蒸汽机之自旋转运行状态的建立具有硬激性质．对应于这种情况的相柱的轨线划分，表示在图 463 上．蒸汽机主轴自旋转运动的定常周期显然等于(采用无量纲时间单位)

$$\tau = 2(\bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2),$$

其中 $\bar{\tau}_1$ 和 $\bar{\tau}_2$——方程组(8.92)的根，它们决定变换 Π 的不动点．

这样，蒸汽机之自旋转运行状态的存在条件就可归结为不等式

$$v_0' > v_0''$$

或根据(8.90b)和(8.91b)，归结为

$$(\lambda - 1)(1 - e^{-\tau_1^0}) > e^{\tau_2^0} - 1. \tag{8.93}$$

我们所研究的这种蒸汽机的动力学模型，具有三个独立参数：λ, Θ 和 h，它们分别表示蒸汽机的推动力矩，“进汽角”和负荷的粘摩擦系数．通过它们也可表示出上面曾引入的参数 a，α，b 和 β：

$$a = \frac{\lambda - 1}{h},\ \alpha = \frac{h^2\Theta}{\lambda - 1},\ b = \frac{1}{h}, \beta = h^2(\pi - \Theta).$$

以此为根据，就可以取三维参数空间 λ，Θ，h（正确些说，取其一

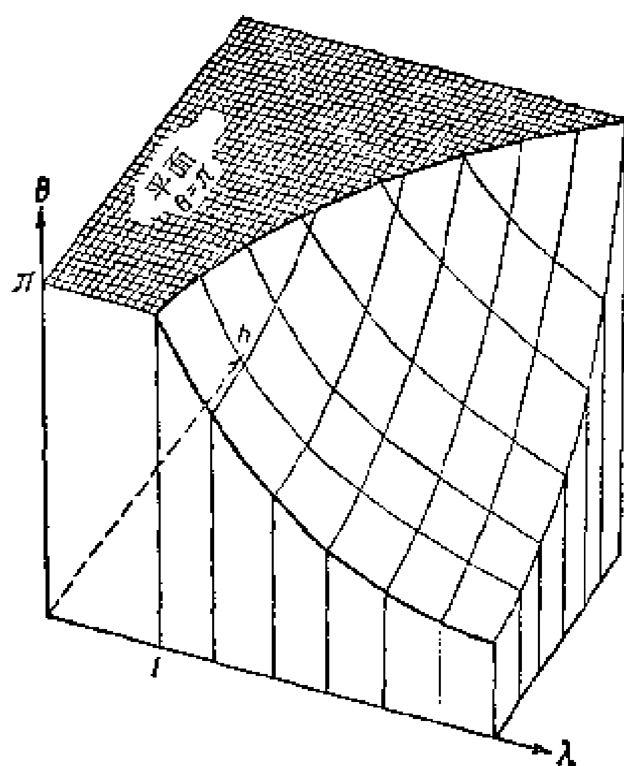


图 464

部分：$\lambda > 1$，$0 < \Theta < \pi$，$h > 0$)，并研究如何将此空间划分成蒸汽机自旋转运行状态(硬激)的存在区，以及任何初始条件下都会出现的蒸汽机的停止区，前者满足条件(8.93)，而后者则不满足此条件．这两个区域之分界面的方程可写成

$$(\lambda - 1)(1 - e^{-\tau_1^0}) = e^{\tau_2^0} - 1$$

和方程(8.90a)及(8.91a)：

$$\frac{h^2\Theta}{\lambda - 1} = \tau_1^0 - 1 + e^{-\tau_1^0},$$

$$h^2(\pi - \Theta) = e^{\tau_2^0} - 1 - \tau_2^0,$$

的形式．或写成参数形式：

$$\left.\begin{aligned} &\lambda - 1 = \frac{e^{\tau_2^0} - 1}{1 - e^{-\tau_1^0}}, \\ &\frac{\pi}{\Theta} = 1 + \frac{1}{\lambda - 1}\frac{e^{\tau_2^0} - 1 - \tau_2^0}{\tau_1^0 - 1 + e^{-\tau_1^0}}, \\ &h^2 = \frac{1}{\pi}[e^{\tau_2^0} - 1 - \tau_2^0 + (\lambda - 1)(\tau_1^0 - 1 + e^{-\tau_1^0})]. \end{aligned}\right\} \quad (8.94)$$

利用方程组(8.94)，使我们有可能较简单地画出分界面与平面族 $\lambda =$ 常数的截线[1]．此分界面表示在图 464 上．由于 Θ 增加时(其它参数 λ 和 h 固定不变) α 和 τ_1^0 增大，β 和 τ_2^0 减小，因此在分界面的上方将满足条件(8.93)，即分界面上方为蒸汽机的自旋状态的存在区．

1) 如果给出某一参数值 $\lambda > 1$，和一组 τ_1^0 值，则(8.94)的第一方程将确定出相应的一组 τ_2^0 值，而其余两个方程则确定相应的 Θ 和 h，即分界面与选定之平面 $\lambda =$ 常数的交线上的点的坐标．

第九章　似谐振子非线性系统[1)]

§1. 引　　言

下面我们开始阐述自治的似保守动力学系统（具有一个自由度）的定量研究方法．在这里，我们只限于研究最简单的情况，具体地说，就是似线性保守系统（似谐振子系统）．此种系统的运动方程可写成二阶方程[2)]：

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}) \tag{9.1}$$

若引入 $y = \dot{x}$，则化为两个一阶方程：

---

1) §1 和 §3 由热列佐夫改写；§3 的第 2 小节，§4 和 §7 的第 1 小节是他新写的．

2) 似谐振子系统的运动方程，如采用普通变量，则可写为如下形式：

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} + \omega_0^2 v = \mu F\left(v, \frac{dv}{d\tau}, \mu\right) \tag{α}$$

其中 τ 为时间，ω_0 为圆频率，v 为因变量，例如电压或者电流，μ 为所谓的小参数，我们将设它不具有量纲，并由它决定所研究之系统与线性保守系统的接近程度．若引人无量纲自变量 $t = \omega_0\tau$ 和无量纲因变量 $x = \frac{v}{v_0}$，其中 v_0 为某一物理量，它具有与 v 相同的量纲（例如，饱和电压或饱和电流），则方程(α)可写为如下形式：

$$\ddot{x} + x = \mu \frac{1}{v_0\omega_0^2} F(v_0 x, v_0\omega_0\dot{x}; \mu).$$

或令

$$\frac{1}{v_0\omega_0^2} F(v_0 x, v_0\omega_0\dot{x}; \mu) = f(x, \dot{x}; \mu),$$

则得

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}; \mu). \tag{β}$$

应当指出，把似线性保守系统的方程变换成(β)这种极便于进行理论研究的形式，常常可采用另外的方法：例如，在引人小参数的同时，就将方程变成无量纲形式，等等．

为了简化推理过程，正文中仅对于方程(β)中 $f(x,\dot{x};\mu)$ 与 μ 无关的这一特殊情况，进行了理论研究．如果 $f(x, \dot{x}; \mu)$ 为 μ 的多项式，其系数本身又是 x 和 $\dot{x}$ 的多项式，则与方程(9.2)第一次近似有关的所有公式，例如公式(9.13a)和(9.14a)，对于方程(β)将仍然适用，只是需要将其中的 $f(\xi, \eta)$ 以 $f(\xi, \eta; 0)$ 代替就可以了．

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \mu f(x, y). \tag{9.2}$$

这里 μ 为无量纲正参数，今后我们将设它是足够小的．如 $f(x, y)$ 给定，则此参数的大小就决定所研究系统与谐振子的接近程度．

似谐振子系统的典型例子（当然是在一定条件下的）有：栅极（图 465，a）或屏极电路（图 465，б）中具有振动回路，并采用固定偏压的电子管振荡器．此种振荡器的振动方程（忽略屏极反应，栅流和寄生参数，包括管内电容和安装电容在内），我们知道，可以写成如下形式：

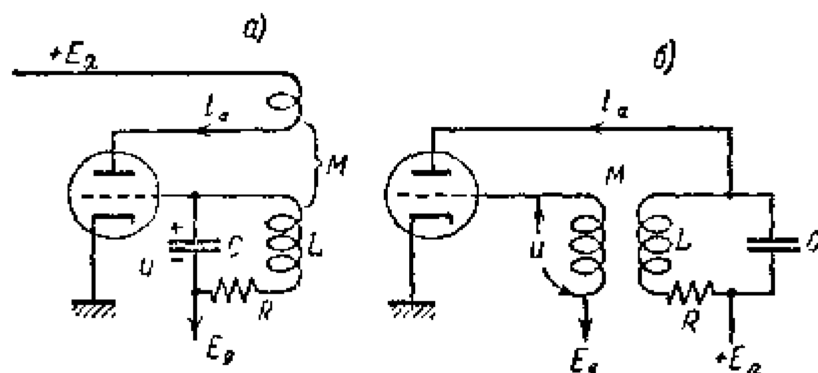


图 465

$$LC\frac{d^2u}{dt^2} + [RC - MS(E_g + u)]\frac{du}{dt} + u = 0^{1)}.$$

此方程，若采用变量变换 $t_{新} = \omega_0 t_{旧}$，$x = \dfrac{u}{u_0}$，其中 $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$，$u_0$ 为某一恒定电压（新变量 $t_{新}$ 和 x 均为无量纲变量），则化为方程：

$$\ddot{x} + x = \mu[-1 + \alpha s(x)]\dot{x}, \tag{9.3}$$

---

1) 对于栅极电路中具有振动回路的电子管振荡器，我们曾在上册第一章 §6 中导出过此方程（参看方程(1.36)）．电子管振荡器中，如振荡回路包含在屏极电路中（图 465，б），则其方程：

$$LC\frac{d^2i}{dt^2} + RC\frac{di}{dt} + i = i_a(E_g + u), \quad u = -M\frac{di}{dt}$$

（参看上册第三章 §4）也同样可以归结为这种方程，方法是将其中第一方程微分并代入

$$\frac{di}{dt} = -\frac{u}{M}.$$

其中 $\mu = \omega_0 RC$ 为振荡回路的衰减系数，$\alpha = \frac{MS_0}{RC}(S_0 = S(E_g)$ 为电子管特性工作点处的互导），$s(x) = \frac{S(E_g + u_0 x)}{S_0}$ 为电子管的折算无量纲互导（$s(x)$的量级为1）．显然，当

$$\mu \leqslant 1, \mu\alpha = \omega_0 MS_0 \ll 1$$

时，方程(9.3)接近于谐振子的方程，亦即，若振荡回路的衰减系数以及振荡器中的反馈量都是足够小的量时[1)]，我们可以把电子管发生器视作似谐振子系统．

为了求解 μ 足够小的方程(9.1)，已经建立了一系列的渐近（近似）方法，本章只阐述其中两个：缓变振幅法（范德波尔法[186]）和庞卡莱法[184,185]．应用第一个方法可以求出系统(9.1)之周期运动以及周期运动或平衡状态的建立过程的渐近解（参数 μ 越小，越准确）．第二方法（庞卡莱法）则使我们能够以参数 μ 的幂级数形式求出方程(9.1)的周期解（即原则上可以达到任意的准确度，只要这些级数是收敛的）[2)]．

---

1) 如果振荡器之振荡回路的衰减系数不小，则需采用其它方法将振荡器的振动方程变换为(9.1)形式．引入 $S_1(x) = S(E_g + u_0 x) - S_0 = S_1^0\varphi(x)$——特性的互导与平衡状态上的互导值间的偏差，这一偏差当然是由于电子管特性的非线性引起的（S_1^0 我们可以理解为对应于某一固定值 x_0 的 $S_1(x_0)$ 值，x_0 在我们所关心的 x 值区间内确定 $S_1(x)$ 之值的量级）．此时，电子管振荡器的方程可以写成如下形式：

$$\ddot{x} + x = \omega_0[-RC + MS_0 + MS_1^0\varphi(x)]\dot{x}.$$

此方程接近于谐振子方程的条件已不同于前者，而是

$$\omega_0|MS_0 - RC| \ll 1 \text{ 和 } \omega_0 MS_1^0 \ll 1,$$

即必须在振荡器自激边界附近，而且电子管特性的非线性程度必须很小．若令 $\mu = \omega_0(MS_0 - RC)$ 和 $\beta = \frac{MS_1^0}{MS_0 - RC}$，则可将振荡器方程化为

$$\ddot{x} + x = \mu[1 + \beta\varphi(x)]\dot{x},$$

即方程(9.1)的形式．

2) 范德波尔法和庞卡莱法也适用于如下形式的非自治方程，即：

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}, t),$$

其中 μ 为足够小的正参数．此外，这两种方法还推广到具有任意自由度的似保守系统（自治的或非自治的）[107,41]．

研究似保守动力学系统的其它方法（例如，"平均倾度"法[18,136,178,73,74]，谐波平衡法[78,79,46,47,7]以及其它方法[118]）都要求振动接近于正弦形，实质上可以说是本章所述各种方法的变形．

§2. 范德波尔法

在参数 μ 足够小的条件下研究方程组(9.2)，可以采用如下所述研究非线性系统的近似方法，并称之为"缓变振幅法"或范德波尔法[186,187,190,35,36]. 方法的实质在于，研究一些按一定规则建立的辅助方程，即所谓范德波尔短方程来代替方程(9.2). 应用这些方程可以比较简单地求出原始方程的近似解(参数 μ 越小，就越加准确). 例如，寻求方程组(9.2)的周期解问题(寻求相平面 x, y 上的极限环问题)就可以归结为寻求短方程的平衡状态问题，而后者却简单得多. 应当指出，范德波尔法在考虑非线性系统的特点、最独特的性质这个意义上来讲，是研究非线性系统的有力方法，这是因为短方程，和原始方程一样，也是非线性的.

下面我们来建立方程组(9.2)的短方程.

首先应当指出，当 $\mu = 0$ 时方程组(9.2)变为普通的谐振子方程；我们知道，它的解(可参看上册第一章§1和§2)具有如下形式:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t + b\sin t, \\ y &= -a\sin t + b\cos t \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

或

$$\left.\begin{aligned} x &= K\cos(t + \vartheta), \\ y &= -K\sin(t + \vartheta) \end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

(a 和 b 或 K 和 ϑ 均为积分常数)，其相轨线则为以原点为心的圆周，相点沿此相轨线以恒定角速度 $\omega = 1$ 运动.

下面在 μ 足够小($0 < \mu \leqslant 1$)的条件下寻求方程组(9.2)的解时，此解我们仍取(9.4)或(9.5)的形式，当然此时必须认为 a 和 b (或 K 和 ϑ)已不再是常数，而是某种暂时还是未知的时间函数(以后我们将会看到，它们将是时间的缓变函数). 将变量 x, y 置换成 a, b (或 K, ϑ)——置换成"范德波尔变量"——在几何意义上可以解释为从相平面 x, y 向另一平面(范德波尔变量平面)的变换，此平面以恒定角速度 $\omega = 1$ 相对平面 x, y 逆时针旋转(围绕原点)；

在此旋转平面上 a 和 b 构成直角坐标，K 和 ϑ 构成极坐标(图466)；根据(9.4)和(9.5) a, b 和 K, ϑ 以如下关系式彼此联系：

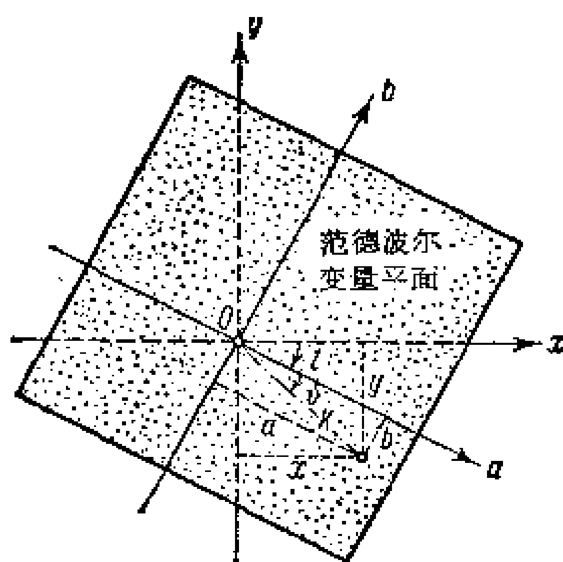


图 466

$$a = K\cos\vartheta,\ \ b = -K\sin\vartheta^{1)} \tag{9.6}$$

方程(9.2)，如采用变量 a, b, 则有如下形式：

$$\frac{da}{dt}\cos t + \frac{db}{dt}\sin t = 0,$$

$$-\frac{da}{dt}\sin t + \frac{db}{dt}\cos t = \mu f(a\cos t + b\sin t, -a\sin t + b\cos t)$$

或

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= -\mu f(a\cos t + b\sin t, -a\sin t + b\cos t)\sin t,\\ \frac{db}{dt} &= \mu f(a\cos t + b\sin t, -a\sin t + b\sin t)\cos t.\end{aligned}\right\} \tag{9.7}$$

若将所得方程右端看成是 a, b 和 t 三个变量的函数（t的周期函数，其周期为 2π），并按 t 将其展开成富里埃级数(富氏系数为 a 和 b 的函数)，则有：

---

1) 由(9.6)可知，极角 ϑ 的正方向为顺时针旋转方向。

还应当指出，当 $\mu = 0$ 时，相点在相平面 x、y 上沿圆相轨线运动时，相对于旋转平面则静止不动，亦即，$\mu = 0$ 时范德波尔变量平面上的每一点都是平衡状态。

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=\mu\left\{\frac{\varphi_0(a,b)}{2}+\varphi_1(a,b)\cos t+\bar{\varphi}_1(a,b)\sin t\right.\\&\left.\quad+\varphi_2(a,b)\cos 2t+\bar{\varphi}_2(a,b)\sin 2t+\cdots\right\},\\\frac{db}{dt}&=\mu\left\{\frac{\psi_0(a,b)}{2}+\psi_1(a,b)\cos t+\bar{\psi}_1(a,b)\sin t\right.\\&\left.\quad+\psi_2(a,b)\cos 2t+\bar{\psi}_2(a,b)\sin 2t+\cdots\right\},\end{aligned}\right\}\tag{9.7a}$$

其中 $\varphi_i(a,b)$, $\bar{\varphi}_i(a,b)$, $\psi_i(a,b)$ 和 $\bar{\Psi}_i(a,b)$ 分别为函数

$$-\mu f(a\cos t+b\sin t,-a\sin t+b\cos t)\sin t$$

以及

$$+\mu f(a\cos t+b\sin t,-a\sin t+b\cos t)\cos t$$

的富氏系数(当 a 和 b 取固定值时).

方程组(9.7)(或(9.7a)), 是转换成缓变变量 a, b $\left(\frac{da}{dt}\text{ 和 }\frac{db}{dt}\right.$ 与 μ 同阶$\left.\right)$ 后的方程组(9.2). 由于变量变换公式(9.4)中显含时间,因而尽管原始方程组是自治的,但新的方程组就已不再是自治方程组了. 从包含缓变变量的方程组 (9.7a) 出发, 我们可以建立近似的范德波尔短方程:

$$\frac{da}{dt}=\mu\frac{\varphi_0(a,b)}{2},\quad\frac{db}{dt}=\mu\frac{\psi_0(a,b)}{2},\tag{9.8}$$

方法是弃去右端的所有"振荡"项,或者说,将方程组(9.7)(或(9.7a))的右端按显含的时间进行平均.

所得短方程组 (9.8) 的解,在 μ 足够小的条件下, 近似地表示"完整"方程组(9.7)的解,而后者,我们已经指出过, 则与原始方程组(9.2)等价. 因此,如果找到短方程组的解 $a=a_0(t),b=b_0(t)$, 则可借助于变量变换公式(9.4)得出方程组(9.2)的近似解(参数 μ 越小,准确程度越高):

$$\left.\begin{aligned}x_0(t)&=a_0(t)\cos t+b_0(t)\sin t,\\y_0(t)&=-a_0(t)\sin t+b_0(t)\cos t.\end{aligned}\right\}\tag{9.9}$$

例如, 短方程组 $a_0(t)\equiv$ 常数, $b_0(t)\equiv$ 常数的平衡状态对应于(近似地)方程组(9.2)的正弦周期解,其周期为 2π.

关于短方程组的近似性质的证明,我们留待下一节进行,现在

先对这些性质本身加以研究(在平面 a, b 上如何建立相轨线). 短方程组(9.7),与原始方程组(9.2)一样,是自治方程组,并可用普通方法进行研究. 此种研究在极坐标 K, ϑ 上进行特别方便,因为在此种坐标中,短方程组含有可分离的变量.

为了导出以极坐标表示的短方程组,我们利用(9.5)将原始方程组(9.2)中的变量 x, y 以范德波尔变量 K, ϑ 进行置换[1]:

$$\frac{dK}{dt}\cos(t+\vartheta) - K\frac{d\vartheta}{dt}\sin(t-\vartheta) = 0,$$

$$-\frac{dK}{dt}\sin(t+\vartheta) - K\frac{d\vartheta}{dt}\cos(t+\vartheta)$$

$$= \mu f[K\cos(t+\vartheta), -K\sin(t+\vartheta)]$$

或从中解出 $\frac{dK}{dt}$ 和 $\frac{d\vartheta}{dt}$,可得:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= -\mu f[K\cos(t+\vartheta), -K\sin(t+\vartheta)]\sin(t-\vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= -\frac{\mu}{K} f[K\cos(t+\vartheta), -K\sin(t+\vartheta)]\cos(t+\vartheta). \end{aligned}\right\} \quad (9.10)$$

将所得方程组的右端按显含的时间 t (或按 $u = t + \vartheta$, 其结果一样,因为右端的 t 只以 $t + \vartheta$ 的形式出现)进行平均后, 可得 K 和 ϑ 的短方程组:

$$\frac{dK}{dt} = \mu\Phi(K), \frac{d\vartheta}{dt} = \mu\Psi(K), \qquad (9.11)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \Phi(K) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f[K\cos u, -K\sin u]\sin u\,du, \\ \Psi(K) &= -\frac{1}{2\pi K}\int_0^{2\pi} f[K\cos u, -K\sin u]\cos u\,du, \end{aligned}\right\} \quad (9.12)$$

它们是周期函数(周期为 2π)

$$-f[K\cos u, -K\sin u]\sin u \text{ 及 } -\frac{1}{K}\int[K\cos u, -K\sin u]\cos u$$

---

1) 以变量 K, ϑ 表示的短方程当然可以采用变量置换(9.6)由短方程(9.8)导出.

按 u 所取之平均值．这些平均值只与K有关[1]．

下面我们来研究短方程组，并在范德波尔变量平面上建立相轨线．

首先从(9.11)中的第一个方程开始(此方程可以离开第二方程独立研究)：

$$\frac{dK}{dt}=\mu\Phi(K);\tag{9.11a}$$

我们已经看到，此类方程的定性图象，完全决定于平衡状态在相应的相直线上的位置和性质．

这些平衡状态的坐标乃是方程

$$\Phi(K)=0\tag{9.13}$$

或

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(K\cos u,-K\sin t)\sin u\,du=0\tag{9.13a}$$

的根．平衡状态 $K=K_i$，如满足条件

$$\Phi'(K_i)<0\tag{9.14}$$

或条件[2]

---

1) 确实如此，以K和ϑ表示的短方程组，其右边——方程组(9.9)按显含的时间 t 展开成富里埃级数的自由项——分别等于：

$$\Phi=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f[K\cos(\xi+\vartheta),-K\sin(\xi+\vartheta)]\sin(\xi+\vartheta)d\xi,$$

和

$$\Psi=-\frac{1}{2\pi K}\int_0^{2\pi}f[K\cos(\xi+\vartheta),-K\sin(\xi+\vartheta)]\cos(\xi+\vartheta)d\xi$$

(积分时令K和ϑ为固定值)，然后设 $u=\xi+\vartheta$，并考虑到被积函数为 u 的周期函数(周期为 2π)即可得出(9.12)．

应当指出，对于 $\ddot{x}+x=\mu f(x,\dot{x},t)$ 形式的非自治系统，也可用同样方法求出短方程组，即首先变换成缓变变量，然后将所得方程的右端按显含的时间 t 进行平均，所得短方程也是自治的，但是这时即便对极坐标K和ϑ，其中的量变也是不可分离的．

2) 确实如此，

$$\begin{aligned}\Phi'(K)&=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f'_x\cos u\sin u\,du+\frac{1}{2\pi}\int f'_y\sin^2u\,du\\&=-\frac{1}{2\pi K}\int_0^{2\pi}[f'_xK\sin u+f'_yK\cos u]\cos u\,du+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f'_y\,du\\&=\frac{1}{2\pi K}\int_0^{2\pi}\frac{d}{du}\{f\cos u\}du+\frac{1}{2\pi K}\int_0^{2\pi}f\sin u\,du\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f'_y\,du=\frac{1}{2\pi K}\int_0^{2\pi}f\sin u\,du+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f'_y\,du,\end{aligned}$$

由此，根据(9.13)，可得：

$$\Phi'(K_i)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f'_y(K_i\cos u,-K_i\sin u)du.$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'_y(K_i\cos u, -K_i\sin u)du < 0, \qquad (9.14a)$$

是稳定的；若

$$\Phi'(K_i) > 0,$$

则是不稳定的.

其它运动，正象我们知道的，或者当 $t\to+\infty$ 和 $t\to-\infty$ 时都渐近地趋向平衡状态，或者当 $t\to+\infty$ 时渐近地趋向平衡状态，当 $t\to-\infty$ 时走向无穷远，等等.

对于这些运动，正象在所有这类情况中一样，总可以求出其解析表达式来[1].

确实如此，从(9.11a)，我们有：

$$\mu(t-t_0) = \int_{K_0}^{K} \frac{dK}{\Phi(K)},$$

其中 K_0 为 $t=t_0$ 时 K 所取的值，由此可解出 K：

$$K = K\{\mu(t-t_0)\}.$$

现在转入研究(9.11)的第二个方程：

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \mu\Psi(K). \qquad (9.11b)$$

这里应当区分两种情形. 其一为实际中经常遇到的，此时

$$\Psi(K)\equiv 0$$

或

$$\frac{1}{2\pi K}\int_0^{2\pi} f(K\cos u, -K\sin u)\cos u du \equiv 0.$$

在这种情况下，第二个方程可直接积分：

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0 \text{ 及 } \vartheta = \text{常数} = \vartheta_0,$$

从而很容易看出范德波尔变量平面上的相轨线的图象. 所有积分曲线都是通过原点的直线，其倾角取所有的值 $\vartheta_0=$ 常数. 每一条直线上的运动都相同，并由方程(9.11a)所确定. 在以(9.13)的根 $K=K_i$ 为半径之圆周上，每一点都是短方程组的平衡状态. 在图

1) 关于这些解析式中所含的积分，实际上是否能计算的问题，我们现在不作研究.

467 上表示出范德波尔变量平面(a, b 平面)上之相轨线的图象的一个特例,其中方程(9.11a)有三个平衡状态.

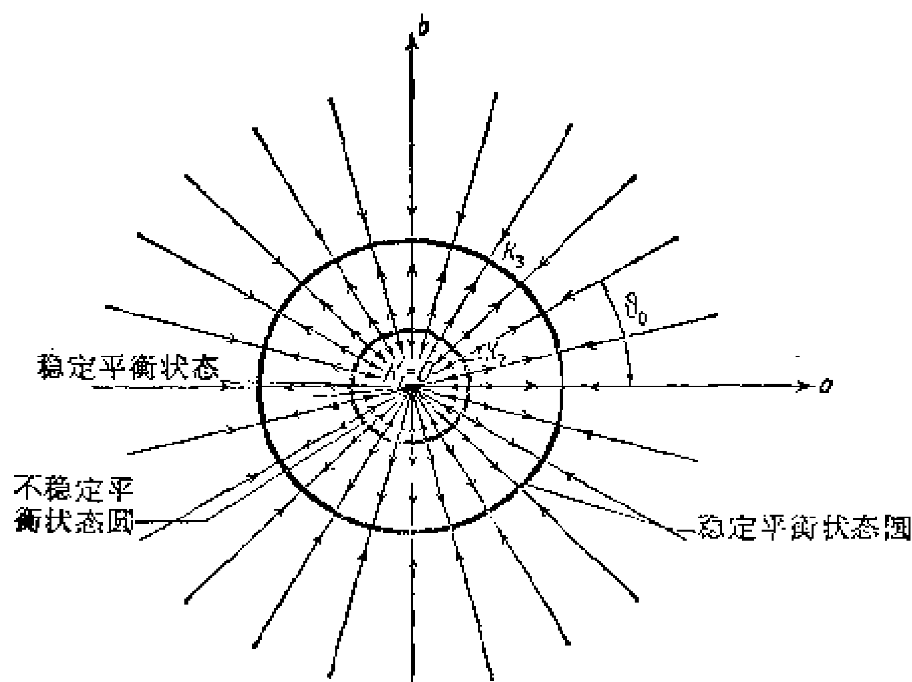


图 467

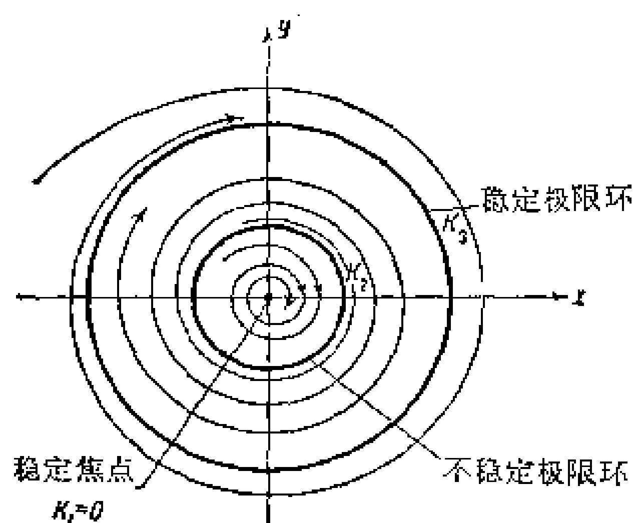


图 468

现在如果借助于变换公式(9.4)或(9.5)由旋转平面 a, b 变换到静止平面 x, y 上,则不难看出,平面 a, b 上由平衡状态组成的圆,对应于平面 x, y 上的圆形极限环,且半径亦为 K_i(图 468). 相点在任一半径为 K_i 的圆形极限环上的运动,遵循如下规律:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t + b\sin t = K_i \sin(t+\vartheta_0), \\ y &= -a\sin t + b\cos t = -K_i \sin(t+\vartheta_0), \end{aligned}\right\} \quad (9.15)$$

其中 ϑ_0 为任意值. 在平面 x, y 上沿给定极限环运动时初始相位 ϑ_0 的任意性，是由短方程的平衡状态在平面 a, b 上构成完整的圆周这一情况所决定的.

很容易看出，如果在平面 a, b 上的平衡状态是稳定的，则与之相对应的极限环必是轨道稳定的，反之亦然. 在平面 a, b 上呈直线线段的其它相轨线，在平面 x, y 上则变换成螺线，一般来说，或在 $t \to +\infty$ 时，或在 $t \to -\infty$ 时绕向极限环.

现在转入第二种情况，即 $\Psi(K) \neq 0$ 的情况. 设方程 $\Psi(K) = 0$ 有若干个根，并设其为 $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \cdots, \bar{K}_m$. 我们并假定 $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \cdots \bar{K}_m$ 中任何一个都不与以前曾提到过的 $K_1, K_2, \cdots, K_n$ 相重合.

此时，如返回到方程组 (9.11)，则很容易作出结论：方程组 (9.11a) 在相平面 a, b 上的平衡状态对应于圆形极限环，其半径仍旧是 $K_1, K_2, \cdots, K_n$. 相点在平面 a, b 上沿半径为 K_i 的某一极限环的运动必满足方程：

$$K = K_i = \text{常数}, \quad \vartheta = \mu\Psi(K_i)t + \vartheta_0.$$

或

$$\begin{aligned} a &= K_i \cos\{\mu\Psi(K_i)t + \vartheta_0\}, \\ b &= -K_i \sin\{\mu\Psi(K_i)t + \vartheta_0\}. \end{aligned}$$

所研究的这一极限环是否稳定，取决于方程组(9.11a)的相应平衡状态是否稳定，而其旋转方向则决定于 $\Psi(K_i)$ 的符号.

其它相轨线则是螺线，或当 $t \to +\infty$，或当 $t \to -\infty$ 时，绕向极限环(或平衡状态)(图 469). 如果我们将第二种情况也转到静止坐标上去研究，则将得到和第一种情况中在此平面上得到的完全类似的图象. 我们仍将得出一系列以 $K_1, K_2, \cdots, K_n$ 为半径的极限环. 沿其中任一 $K = K_i$ 的极限环之运动由如下方程组确定[1]:

---

1) 应当指出，对于此解来说，只在准确到 μ 阶量的条件下，$\frac{dx}{dt}$ 才等于 y.

$$\left.\begin{aligned} x &= K_j \cos\{[1+\mu\Psi(K_j)]t+\vartheta_0\}, \\ y &= -K_j \sin\{[1+\mu\Psi(K_j)]t+\vartheta_0\}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.15a)$$

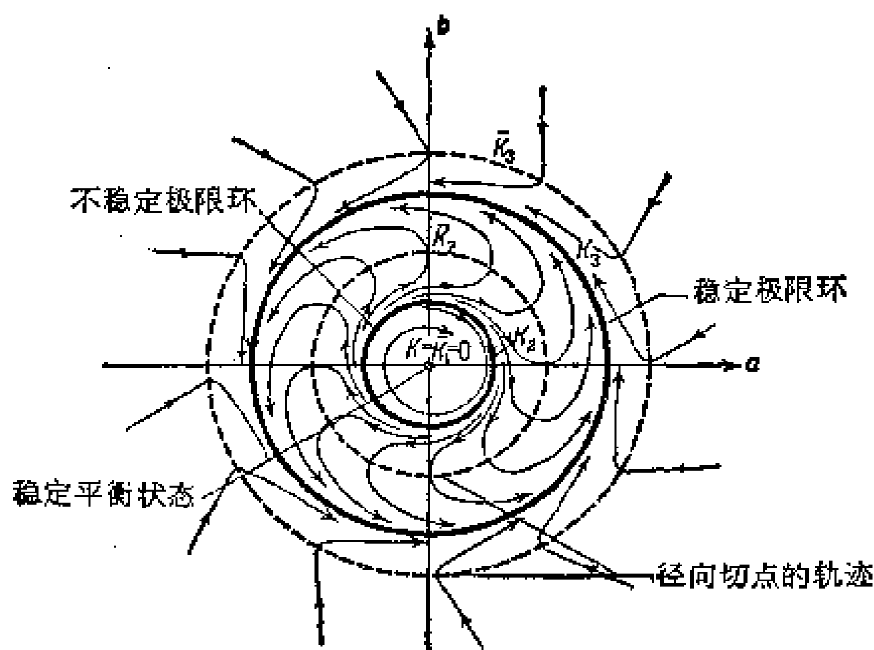


图 469

此情况与第一种情况的区别仅在于，这里有一定的频率校正量 $\Delta\omega=\mu\Psi(K_j)$，如采取对于 μ 的一次近似，则此校正量对应于周期校正量 $\tau=-2\pi\mu\Psi(K_j)$（即相对校正量 $\frac{\tau}{2\pi}=-\mu\Psi(K_j)$）。其它相轨线都是螺线，一般来讲，缓慢地绕向极限环或平衡状态 $x=0$，$y=0$，如果后者存在而且稳定的话。

上面我们在基本相平面 x，y 上，解释了研究短方程（方程(9.8)，或方程(9.11)亦是一样）时得到的结果。现在就出现一个问题：这些结果究竟在何种程度上，能反映原始方程组(9.2)之解的性质？

可以证明（一般来讲，这也正是范德波尔法的根据的所在），借助于短方程的解所得到的相平面的相轨线划分，在 μ 足够小的条件下，能够近似地表示原始方程组(9.2)的相轨线的图象。这个论断可以更严格地叙述如下。那就是，就极限环而论，我们可以证明，当 μ 足够小时，方程(9.2)确有接近于半径为 K_i 之圆的极限环

（如果方程 $\Phi(K)=0$ 仅有单根 K_i，且 μ 越小，以上结果越精确），此外就不再有其他极限环了；如果 $\Phi'(K_i)<0$[1]，则这些对应于周期似谐运动的极限环是稳定的．

至于和建立过程相对应的解，则我们将遵循满得斯塔姆和 H. Д. 帕帕列克西（Папалекси）[90] 来证明，如果 μ 足够小，则在任意大的时间间隔 $\frac{D}{\mu}$ 内（D 为任意大的正数），短方程的解与原始方程组(9.2)的解（初始条件相同）间的差可以任意的小．

§3. 范德波尔法的理论根据

1. 研究建立过程时应用范德波尔法的根据[90,149]． 为了证明上节之末的后一论断，即关于用短方程之解得到的表示式(9.9)之近似性质的论断，显然，我们只要证明以下定理就够了：

若 $a=a(t)$，$b=b(t)$ 为"完整"方程组：

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=\mu\left\{\frac{\varphi_0(a,b)}{2}+\sum_j\left[\varphi_j(a,b)\cos jt+\bar{\varphi}_j(a,b)\sin jt\right]\right\},\\ \frac{db}{dt}&=\mu\left\{\frac{\psi_0(a,b)}{2}+\sum_j\left[\psi_j(a,b)\cos jt+\bar{\psi}_j(a,b)\sin jt\right]\right\}\end{aligned}\right\}\quad(9.7a)$$

的解．$a=a_0(t)$，$b=b_0(t)$ 为短方程组：

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=\mu\frac{\varphi_0(a,b)}{2},\\ \frac{db}{dt}&=\mu\frac{\psi_0(a,b)}{2}\end{aligned}\right\}\quad(9.8)$$

的解，且此这两组解满足相同的初始条件：$t=t_0$ 时 $a(t_0)=a_0(t_0)$，$b(t_0)=b_0(t_0)$；则根据给定的 D 和 ε（ε 可以任意小，D 可以任意大），总可以找到这样的足够小的 μ，使得

$$|a(t)-a_0(t)|<\varepsilon,\quad |b(t)-b_0(t)|<\varepsilon$$

1）在本章 §5 中讲到庞卡莱法时，我们将以参数 μ 的幂级数形式得出自振周期的表达式，而且其中与 μ 成正比之项的系数将是 $-2\pi\Psi(K_i)$．

当*

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{D}{\mu}.$$

首先我们指出，短方程组(9.8)借助于时间变换 $\tau = \mu t$（这里 τ 为所谓"缓慢"时间)可化为如下形式：

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{\varphi_0(a, b)}{2}, \quad \frac{db}{d\tau} = \frac{\psi_0(a, b)}{2};$$

因此，其解只决定于"缓变"时间 τ 和某一 $\tau = \tau_0$ 时的初始条件. 所以，给定出初始值 $a_0(t_0)$, $b_0(t_0)$ 和"缓慢"时间间隔 D, 同时在平面 a, b 上也就给定出短方程的有限相轨线弧 $a = a_0(t)$, $b = b_0(t)$ $\left(t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{D}{\mu}\right)$, 后者与 μ 无关. 这样一来，我们所提出的这一定理将肯定：短方程组的解在此短方程之相轨线的任何一段弧上(在 a, b 的有限变化区间内)，都具有上述近似性质.

为简化推导过程起见，我们只准备对一个一阶方程的情况证明上述定理. 设此方程为：

$$\frac{da}{dt} = \mu F(a, t) \tag{9.16}$$

其短方程为：

$$\frac{da}{dt} = \mu f(a), \tag{9.17}$$

这里 $F(a, t)$ 为显含时间 t 的周期函数(周期为 2π)，而

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(a, \xi)d\xi$$

为其按 t 的平均值(a 可为任意固定值). 我们指出，函数 $F(a, t)$ 可以写成：

$$F(a, t) = f(a) + \varphi(a, t) \tag{9.18}$$

其中，显然 $\varphi(a, t)$ 为 t 的周期函数，且其按 t 的平均值(a 取任意固定值)等于零；这样，对于任意 a 和 t 都将有：

$$\int_t^{t+2\pi} \varphi(a, \xi)d\xi \equiv 0. \tag{9.19}$$

---

* 原书为"或"——译者注.

对于我们所关心的二阶系统（9.7a）（或以缓变变量所表示的任意阶系统）情况的证明，与下面将要进行的证明，在思路上无任何区别。

我们将研究"完整"方程(9.16)的解 $a = a(t)$ 和短方程(9.17)的解 $a = a_0(t)$，并假定两个解都满足同一初始条件：

$$t = t_0 \text{ 时}, \quad a(t_0) = a_0(t_0) = \eta.$$

下面我们将假设，在 a 的某一变化区间

$$|a - \eta| < A \tag{9.20}$$

中，对于任意 t，函数 $f(a)$ 和 $F(a, t)$（或 $f(a)$ 和 $\varphi(a, t)$）都连续，有界，且满足李普希兹（Lipschilz）条件，即存在有这样的正数 M，P，Q 和 B，使得对于任意位于(9.20)区间内的 a，a'，a'' 和任意 t 都满足不等式[1]：

$$\left.\begin{aligned}&|f(a)| < M, |\varphi(a, t)| < P,\\&|\varphi(a'', t) - \varphi(a', t')| < Q|a'' - a'|,\\&|F(a'', t) - F(a', t)| < B|a'' - a'|.\end{aligned}\right\} \tag{9.21}$$

需要指出，如果在（9.20）区间上函数 $f(a)$ 和 $F(a, t)$ 对于 a 的导数是连续而有界的，则根据拉格朗日的函数有限增量定理，可以看出(9.21)中最后两个不等式必然是满足的。

我们必须证明：根据任意给定的正数 ε 和 D（ε 任意小），总可以选择出这样的足够小的 μ，使得对于所有满足条件

$$0 \leqslant \mu(t - t_0) \leqslant D$$

的 t，下不等式都成立：

$$|a(t) - a_0(t)| < \varepsilon.$$

对正数 D 只加以一个限制：D 必须这样选择，使得解 $a_0(t)$ 对于任意 μ 和所有满足不等式 $0 \leqslant \mu(t - t_0) \leqslant D$ 的 t，都不超出所选出的区间(9.20)，即使得：

$$0 \leqslant \mu(t - t_0) \leqslant D \text{ 时}$$

有

$$|a_0(t) - \eta| < A. \tag{9.22}$$

1）对这些数值不须加任何限制，因为 $\varphi(a, t)$ 是 t 的连续周期函数。

这样的D总是可以选出的，因为解 $a_0(t)$ 只是 $\mu(t-t_0)$ 的函数. 必须指出，这样地给定初始值 η 和缓慢时间间隔 D，也就是在短方程的相轨线 $a=a_0(t)$ 上给定出某一有限长度的线段；由此可见，我们所要证明的就是：解 $a_0(t)$ 在短方程的相轨线的整个这一线段上，即变量 a 有限变化时，可以近似地表示解 $a(t)$（当 μ 充分小时）.

为了证明我们所提出的定理，我们将以 $a_0(t)$ 作为零次近似，用逐次逼近法寻求方程 (9.16) 的解. 将 $a_0(t)$ 代入方程 (9.16) 右端，积分后可得一次近似：

$$a_1(t)=\eta+\mu\int_{t_0}^{t}F[a_0(t),\ t]\,dt. \tag{9.23}$$

用同样方法可求出二次近似：

$$a_2(t)=\eta+\mu\int_{t_0}^{t}F[a_1(t),t]\,dt, \tag{9.24}$$

如此类推，则 n 阶近似将为：

$$a_n(t)=\eta+\mu\int_{t_0}^{t}F[a_{n-1}(t),\ t]\,dt. \tag{9.25}$$

我们知道，如满足条件(9.21)，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n(t)$ 存在，且它就是方程(9.16)的满足初始条件：$a(t_0)=\eta$ 的唯一解 $a(t)$[1].

下面我们来逐次地对 a_n-a_0 进行估值. 对于一次近似我们有：

$$\begin{aligned}a_1(t)&=\eta+\mu\int_{t_0}^{t}F[a_0(t),\ t]\,dt\\&=\eta+\mu\int_{t_0}^{t}f_0[a_0(t)]\,dt+\mu\int_{t_0}^{t}\varphi[a_0(t),\ t]\,dt.\end{aligned}$$

但

$$\eta+\mu\int_{t_0}^{t}f[a_0(t)]\,dt\equiv a_0(t),$$

因此

$$a_1(t)-a_0(t)=\mu\int_{t_0}^{t}\varphi[a_0(t),\ t]\,dt.$$

下面我们来证实所得表示式右端的积分是有界的. 令N为比值

1) 逐次逼近法以及关于函数 $a_n(t)$ 当 $n\to\infty$ 时趋向方程(9.16)的解这一论断的证明，可以在[113]中找到.

$\frac{t-t_0}{2\pi}$ 的整数部分,即完全位于积分区间 $[t_0, t]$ 内的被积函数(以显含时间 t 为自变量)的周期数.

此时,根据(9.19)将有:

$$\int_{t_0}^{t}\varphi[a_0(t),t]dt = \sum_{k=0}^{N-1}\int_{t_0+2\pi k}^{t_0+2\pi(k+1)}\varphi[a_0(t),t]dt + \int_{t_0+2\pi N}^{t}\varphi[a_0(t),t]dt$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\int_{t_0+2\pi k}^{t_0+2\pi(k+1)}\{\varphi[a_0(t),t]-\varphi[a_0(t_0+2\pi k),t]\}dt + \int_{t_0+2\pi N}^{t}\varphi[a_0(t),t]dt.$$

应用不等式(9.21)及拉格朗日的函数有限增量定理可得:

$$|\varphi[a_0(t),t]-\varphi[a_0(t_0+2\pi k),t]| < Q|a_0(t)-a_0(t_0+2\pi k)| < \mu MQ|t-(t_0+2\pi k)|,$$

因此,

$$\left|\int_{t_0+2\pi k}^{t_0+2\pi(k+1)}\{\varphi_0[a_0(t),t]-\varphi[a_0(t_0+2\pi k),t]\}dt\right| < \mu MQ\int_{t_0+2\pi k}^{t_0+2\pi(k+1)}[t-(t_0+2\pi k)]dt = 2\pi^2\mu MQ,$$

而

$$\left|\int_{t_0}^{t}\varphi[a_0(t),t]dt\right| < 2\pi^2 MQD + 2\pi P,$$

因为 $\mu N \leqslant D$ 和 $\left|\int_{t_0+2\pi N}^{t}\varphi[a_0(t),t]dt\right| < 2\pi P.$

这样一来,将有

$$|a_1(t)-a_0(t)| < \mu S \tag{9.26}$$

其中

$$S = 2\pi^2 MQD + 2\pi P,$$

即此差值的量级为 μ.

为了估值 $a_2(t)-a_0(t)$, 我们指出

$$|a_2(t)-a_0(t)| \leqslant |a_2-a_1| + |a_1-a_0|,$$

但

$$a_2 - a_1 = \mu\int_{t_0}^{t}[F(a_1,t)-F(a_0,t)]dt.$$

应用(9.21)中最后一个不等式,将有:

$$|a_2(t)-a_1(t)|<\mu B\int_{t_0}^{t}|a_1-a_0|dt$$
$$<\mu^2BS|t-t_0|\leqslant\mu BSD;$$

因此我们有:

$$|a_2(t)-a_0(t)|<\mu S(1+BD). \tag{9.27}$$

其次,

$$|a_3(t)-a_0(t)|\leqslant|a_3-a_2|+|a_2-a_1|+|a_1-a_0|,$$

但

$$|a_3-a_2|=\mu\left|\int_{t_0}^{t}[F(a_2,t)-F(a_1,t)]dt\right|$$
$$<\mu B\int_{t_0}^{t}|a_2-a_1|dt<\mu^2B^2S\frac{|t-t_0|^2}{1\cdot 2}\leqslant\mu S\frac{(BD)^2}{1\cdot 2},$$

由此可得

$$|a_3-a_0|<\mu S\left[1+BD+\frac{(BD)^2}{1\cdot 2}\right]. \tag{9.28}$$

如此继续推导下去,我们将得出:

$$|a_n-a_{n-1}|<\mu S\frac{(BD)^{n-1}}{(n-1)!},$$
$$|a_n-a_0|<\mu S\left[1+BD+\frac{(BD)^2}{1\cdot 2}+\cdots\frac{(BD)^{n-1}}{(n-1)!}\right]<\mu Se^{BD}. \tag{9.29}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n(t)$ 为方程(9.16)的解,因此我们将有:

$$|a-a_0|\leqslant\mu Se^{BD}. \tag{9.30}$$

然而,所有我们做过的这些估值,例如对不等式(9.21)的应用,只有在保证所有函数 $a_i(t)$ 都位于上述边界内部,即有:当

$$0\leqslant\mu(t-t_0)\leqslant D$$

时

$$|a_i(t)-\eta|<A \tag{9.31}$$

成立的情况下,才是合理的。

我们来看一下这一条件是否满足. 显然,根据不等式(9.22)必存在有这样的数 $\alpha(\alpha>0)$[1],使得对于所有满足

$$0\leqslant\mu(t-t_0)\leqslant D$$

的 t 都有:

$$|a_0(t)-\eta|\leqslant A-\alpha. \tag{9.32}$$

---

1) 只要给出 D 并选择出 A 就可决定 α, μ 的选择不影响 α。

再研究 $a_1(t)$，则根据(9.26)将有(对同一些 t 值):

$$|\dot{a}_1(t) - \eta| \leqslant |a_1 - a_0| + |a_0 - \eta| < |\mu S + A - \alpha|,$$

由此可以导出，为了使 $a_1(t)$ 满足不等式(9.31)，只需使 $\mu S < \alpha$ 即可。

其次，

$$|a_2(t) - \eta| \leqslant |a_2 - a_0| + |a_0 - \eta|$$
$$< |\mu S(1 + BD) + A - \alpha|,$$

即：为使 $|a_2 - \eta|$ 小于 A，只需令

$$\mu S(1 + BD) < \alpha.$$

这样一直推演下去，则不难看出，只要 $\mu S e^{BD} < \alpha$，则上面所做的估值都是合理的。

显然，不论 ε 如何小，总可以指出这样的 μ，使得对于所有满足不等式 $\mu(t - t_0) \leqslant D$ 的 t 我们都能得到：

$$\mu S e^{BD} < \alpha \tag{9.33}$$

和

$$|a(t) - a_0(t)| < \mu S e^{BD} < \varepsilon.$$

为此目的，我们只需要在选择 μ 时使它小于 $\frac{\alpha}{Se^{BD}}$，$\frac{\varepsilon}{Se^{BD}}$中最小的一个就可以了。

这样就证明了我们提出来的定理。

若对方程组右端的性质采取类似的假设，则可以用同样的方法对二阶方程组(9.2)证明本小节开始时所提出的定理。如果由缓变变量 a，b 转到变量 x，y，则显然可以作如下论断：

设在某一区域 A 内(例如，以原点为圆心 R 为半径的圆内)方程组

$$\dot{x} = y,\quad \dot{y} = -x + \mu f(x, y) \tag{9.2}$$

中的函数 $f(x, y)$ 为连续、有界，且满足李普希兹条件(或其对于 x 和 y 的导数连续有界)[1]；设近似解

---

1) 对于需要转换成缓变变量的方程组(方程组(9.7)或(9.10))来说，这些条件可以保证其右端的连续性和有界性，并保证其满足李普希兹条件。

$$\left.\begin{aligned} x_0(t)&=a_0(t)\cos t+b_0(t)\sin t=K_0(t)\cos[t+\vartheta_0(t)],\\ y_0(t)&=-a_0(t)\sin t+b_0(t)\cos t=-K_0(t)\sin[t+\vartheta_0(t)]\end{aligned}\right\}\quad(9.9)$$

($a_0(t)$, $b_0(t)$ 或 $K_0(t)$, $\vartheta_0(t)$ 为短方程组(9.8)或(9.11)的解)和方程组(9.2)的解 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 满足相同的初始条件：

$$t=t_0 \text{ 时 } x(t_0)=x_0(t_0),\ y(t_0)=y_0(t_0);$$

此时，根据任意给定的正数 ε 和 D[1]，总可以求出这样的足够小的 μ，使得对于所有满足条件

$$0\leqslant\mu(t-t_0)\leqslant D$$

的 t（即缓变变量 a, b 或 K, ϑ 有限变化时）都有：

$$|x(t)-x_0(t)|<\varepsilon,\quad |y(t)-y_0(t)|<\varepsilon.$$

2. 研究定态状态振动时应用范德波尔法的根据. 现在我们来证明，如果方程 $\Phi(K)=0$ 具有单根 $K_i(\Phi'(K_i)\neq 0)$，则根据任意给定的任意小正数 ε，总可以找到这样的小参数值 μ，使得方程组(9.2)在圆 $x^2+y^2=K_i^2$ 的 ε 邻域内具有极限环，而且若 $\Phi'(K_i)<0$ 此极限环稳定，若 $\Phi'(K_i)>0$ 则不稳定.

为了证明此论断，下面我们将假设 $\Phi(K)$ 具有连续导数（至少

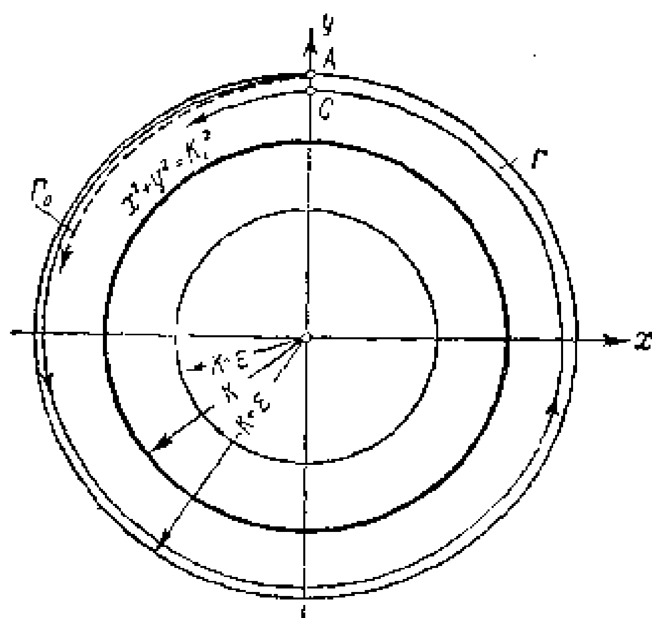


图 470

1) ε 可为任意小，而 D 的值则应保证(9.9)的近似解在 $0\leqslant\mu(t-t_0)\leqslant D$ 区间上不超出区域 A.

在根 K_i 的某一邻域内)。如果方程组(9.2)中的函数 $f(x, y)$ 具有连续导数,则此假设显然成立(参看公式(9.14a)及与其有关的脚注)。

为了确定起见,假设对于方程 $\Phi(K)=0$ 的单根 K_i 有 $\Phi'(K_i) < 0$[1]。此时 $K = K_i$ 则是第一个短方程

$$\frac{dK}{dt} = \mu\Phi(K) \tag{9.11a}$$

的稳定平衡状态,而在相平面 x, y 上则存在有短方程组的稳定极限环——以 K_i 为半径的圆。在此圆周附近取一任意的足够小的 ε 邻域(图 470),使其中,即在 $K_i - \varepsilon \leqslant K \leqslant K_i + \varepsilon$ 区间上,有:

$$\Phi'(K) \leqslant -\beta, \tag{9.34}$$

此处 β 为某一正数;这一要求永远可以作到,因为 $\Phi'(K)$ 为连续函数,且 $\Phi'(K_i) < 0$。

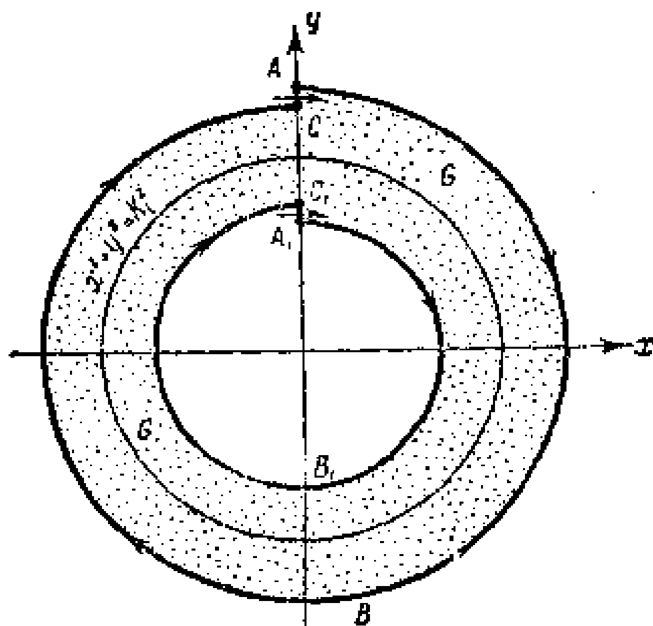


图 471

研究相平面 x, y 上方程组(9.2)的相轨线 Γ:

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

以及短方程组的相轨线 Γ_0:

---

1) $\Phi'(K_i)>0$ 的情况将用以 $-t$ 置换 t 的方法在以后加以证明。$\Phi'(K_i)=0$ 的情况不可能出现,因为 K_i 是方程 $\Phi(K) = 0$ 的单根。

$$\left.\begin{aligned} x_0(t) &= K_0(t)\cos[t+\vartheta_0(t)], \\ y_0(t) &= -K_0(t)\sin[t+\vartheta_0(t)], \end{aligned}\right\} \tag{9.9}$$

并设此二相轨线通过(设于 $t=0$ 时)同一点 $A(0, K_i+\varepsilon)$(这里与以前一样，$K_0(t)$，$\vartheta_0(t)$ 为短方程组(9.11)的解)。相轨线 Γ_0 为一螺线，当 $t\to+\infty$ 时绕向圆 $x^2+y^2=K_i^2$，因为根据(9.34)当 $K_i \leqslant K \leqslant K_i+\varepsilon$ 时有

$$\Phi(K) \leqslant -\beta(K-K_i) < 0, \tag{9.34a}$$

因此，$K_0(t)$ 单调地减小，并当 $t\to+\infty$ 时趋向于 K_i。我们将选择这样一段缓慢时间间隔 D，使得 $t=\frac{D}{\mu}$ 时 $K_0(t)-K_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$，并使相轨线 Γ_0 经过时间间隔 $\frac{D}{\mu}$ 后围绕原点的旋转多于一周[1]。

根据本节第一小节中提出的定理，必存在这样的$\mu=\mu(\varepsilon, D)$，使得相点$[x(t), y(t)]$在全部时间间隔 $0\leqslant t\leqslant \frac{D}{\mu}$ 内，不超出点$[x_0(t), y_0(t)]$的 $\frac{\varepsilon}{2}$ 邻域。在方程组(9.2)中，我们就取这样的 μ 的数值。当 μ 取此数值时，相轨线 Γ 上的点$\left[x\left(\frac{D}{\mu}\right), y\left(\frac{D}{\mu}\right)\right]$显然将位于圆 $x^2+y^2=K_i^2$ 的给定 ε 邻域的内部，而相轨线 Γ 本身则必将在时间间隔 $0\leqslant t\leqslant\frac{D}{\mu}$ 内围绕原点旋转一周以上。由于 Γ 是自治系统(9.2)的相轨线、不可能自交，因此它和 y 轴的第一个交点($t>0$ 时)——点 C——的纵坐标将是

$$y_C < K_i + \varepsilon,$$

因此，通过闭曲线 $ABCA$（图 471），(此曲线由相轨线 Γ 的弧

---

1) 根据(9.34a)，当 $K_i\leqslant K\leqslant K_i+\varepsilon$ 时

$$\frac{dK}{dt} = \mu\Phi(K) \leqslant -\mu\beta(K-K_i),$$

即对于相轨线 Γ_0，有：

$$0 < K_0(t) - K_i \leqslant \varepsilon e^{-\mu\beta t}.$$

因此我们所必须的缓慢时间间隔 D 可取为 $D=\frac{1}{\beta}\ln 2$。在此时间内螺线 Γ_0 的旋转圈数，若适当选择足够小的 μ，则可以是任意的。

ABC 和 y 轴线段 CA 组成)系统(9.2)的相轨线只能进入(t 增长时)此曲线所围绕的区域内部[1]。

用完全相同的方法可以画出另一闭曲线 $A_1B_1C_1A_1$，由系统(9.2)的相轨线的弧 $A_1B_1C_1$（通过 $A_1(0, -K_i-\varepsilon)$）及 y 轴线段 C_1A_1 组成；通过此曲线，系统(9.2)的相轨线只能进入(也当 t 增加时)位于此曲线外部的区域。

这样一来，在相平面 x, y 上就造出环形区域 G，以曲线 $ABCA$ 和 $A_1B_1C_1A_1$ 为其边界。方程组(9.2)的相轨线不可能越出此区域(t 增加时)。由于在此区域内没有系统(9.2)的平衡状态[2]，故根据二阶微分方程定性论的定理（参看第六章 § 2）在此区域，即圆 $x^2+y^2=K_i^2$ 的 ε 邻域内，必存在方程组(9.2)(若选取上述 μ 值)的稳定极限环。

关于方程组(9.2)在圆 $x^2+y^2=K_i^2$（其中 K_i 为方程 $\Phi(K)=0$ 的根，且 $\Phi'(K_i)>0$）的邻域内，当 μ 足够小时，具有不稳定极限环的证明，将 t 以 $-t$ 代替，就可归结为上述证明。这这样，就证明了本节小节 2* 中所提出的定理[3]。

在本小节的结尾，我们来证明，当 μ 足够小时在圆 $x^2+y^2=K_i^2$ 的小邻域外部，方程组(9.2)没有极限环。换句话说，我们将证明，确定出方程 $\Phi(K)=0$ 的根 K_i（设所有根均为单根），就从而找到方程组(9.2)(μ 足够小)的所有极限环。更确切些说，我们将证明如下论断：

若 $0<R_1\leqslant K\leqslant R_2$ 时 $\Phi(K)\neq 0$，则必存在这样的足够

---

1) 方程组(9.2)的相轨线不可能与同一方程组的相轨线 Γ 的弧 ABC 相交，而在 y 轴线段 CA 上，$\dot{x}=y>0$。

2) 当 μ 足够小时，方程组(9.2)的唯一平衡状态位于 x 轴上接近原点的地方；其横坐标决定于如下方程：

$$-x+\mu f(x, 0)=0.$$

3) 在证明此定理时我们应用了适用于二阶自治系统的极限环的存在定理。对任意自由度系统的类似论断的证明可在 H. H. 波哥留包夫(Боголюбов)的著作中找到[35,36]。

* 原书为 §2——译者注。

小的参数值 μ_0*，使得对满足条件

$$0 < \mu \leqslant \mu_0,$$

的所有 μ，方程组(9.2) 在环形区域 R：

$$R_1^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R_2^2$$

内没有极限环.

为确定起见，设当 $R_1 \leqslant K \leqslant R_2$ 时 $\Phi(K) > 0$. 此时，由于函数 $\Phi(K)$ 的连续性(这是很明显的，因为 $f(x, y)$ 为连续函数)必存在有这样的正数 ε 和 Φ_0，使得当 $R_1 \leqslant K \leqslant R_2 + \varepsilon$ 时，有

$$\Phi(K) > \Phi_0 > 0. \tag{9.35}$$

我们来研究方程组(9.2)在相平面 x, y 上的相轨线 γ：

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

及短方程组的相轨线 γ_0：

$$\left.\begin{aligned} x_0(t) &= K_0(t)\cos[t + \vartheta_0(t)], \\ y_0(t) &= -K_0(t)\sin[t + \vartheta_0(t)], \end{aligned}\right\}$$

且此二相轨线均从圆 $x^2 + y^2 = R_1^2$ 上的某一点(图 472)开始(设 $t = 0$ 时). 对于第一短方程在线段 $R_1 \leqslant K \leqslant R_2 + \varepsilon$ 上的解 $K = K_0(t)$，显然有：

$$\frac{dK}{dt} > \mu\Phi_0 > 0,$$

即在 $K_0(t)$ 的同一变化区间上(且 $t > 0$)，对于相轨线 γ_0 有：

$$K_0(t) > R_1 + \mu\Phi_0 t.$$

因此，

$$当\quad t = \frac{R_2 + \varepsilon - R_1}{\mu\Phi_0} = \frac{D}{\mu} 时，K_0\left(\frac{D}{\mu}\right) > R_2 + \varepsilon,$$

即相轨线 γ_0 经过时间间隔 $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{D}{\mu}$，穿过环形区域 R，并越出圆 $x^2 + y^2 = (R_2 + \varepsilon)^2$ 的范围.

但根据本节第一小节中曾证明过的定理，必存在有这样的 $\mu_0 = \mu_0(\varepsilon, D)$，使得对于任意的 $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 和任意的 $0 \leqslant t \leqslant$

---

* 原书为"存在足够小的参数值 $\mu: 0 < \mu \leqslant \mu_0$，使得方程组(9.2)…"——译者注.

$\frac{D}{\mu}$，方程组(9.2)的相点$[x(t),\ y(t)]$沿相轨线γ运动时，都不可能越出点$[x_0(t),\ y_0(t)]$的ε邻域*. 因此，经过时间间隔$0 \leqslant t \leqslant \frac{D}{\mu}$，不仅相轨线$\gamma_0$而且方程组(9.2)的相轨线$\gamma$也必将穿过区域$R$，越出其边界.

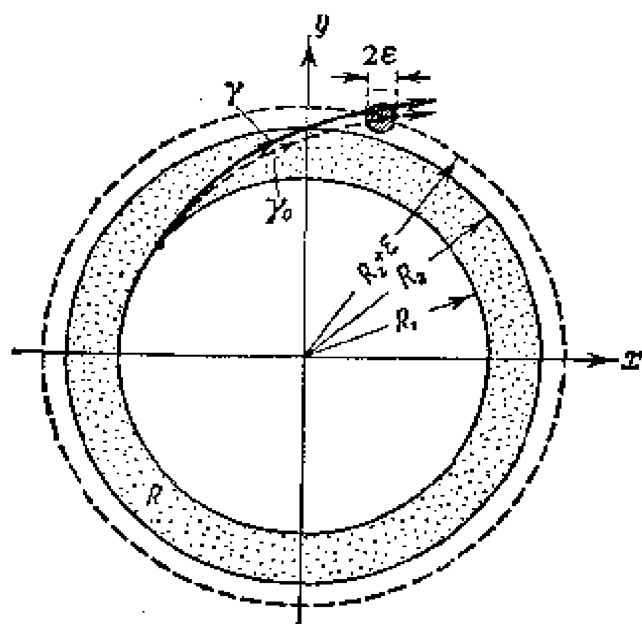


图 472

由于环形区域R不含有方程组(9.2)(μ取足够小值)的平衡状态，故其中如有方程组(9.2)的闭相轨线(极限环)，则它必是环绕圆周$x^2 + y^2 = R_1^2$的. 但方程组(9.2)绝不可能有这样的极限环，因为若此种极限环存在，则必将与同一方程组(9.2)的相轨线γ相交，而这是不可能的[1].

这样，我们就证明了：当μ足够小时，方程组(9.2)具有接近于圆$x^2 + y^2 = K_i^2$的极限环，其中K_i为方程$\Phi(K)=0$的单根，此外则没有其它极限环[2].

---

* 图中小圆的直径2ε原书为"ε"——译者注.

1) 对于当$R_1 \leqslant K \leqslant R_2$时，$\Phi(K)<0$的情况，其证明方法完全相同，只是在这种情况下，相轨线γ和γ_0的初始点应选择在圆周$x^2 + y^2 = R_1^2$上.

2) 我们对粗系统(9.2)(即方程$\Phi(K) = 0$的一切根都是单根的情况)，证明了这一论断.

到这里我们结束对范德波尔法之理论根据的阐述，并开始应用这一方法研究某些自振系统.

§ 4. 范德波尔法的应用

下面我们应用范德波尔法，来研究屏极或栅极电路中含有振荡回路的电子管振荡器(图 465)，并和往常一样，忽略屏极反应及栅流.

若设振荡回路的衰减系数

$$\omega_0 RC \ll 1,$$

则电子管振荡器的方程将化为（参看本章 § 1）如下所示的似谐振子的方程:

$$\ddot{x} + x = \mu[-1 + \alpha s(x)]\dot{x}, \qquad (9.3)$$

其中 $x = \frac{u}{u_0}$(u_0 为某一电压比例尺)，$\mu = \omega_0 RC \ll 1$，$\alpha = \frac{MS_0}{RC}$ 为振荡器激励系数，$s(x) = \frac{S(E_g + u_0 x)}{S_0}$ 为振荡器电子管的折算无量纲互导.

此方程之短方程(8.11)显然可写成如下形式:

$$\frac{dK}{dt} = \mu\Phi(K), \frac{d\vartheta}{dt} = \mu\Psi(K),$$

其中基于被积函数为偶函数，

$$\Phi(K) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[-1 + \alpha s(K\cos\xi)]K\sin^2\xi d\xi$$

$$= \frac{K}{\pi}\int_0^{\pi}[-1 + \alpha s(K\cos\xi)]\sin^2\xi d\xi,$$

而基于被积函数为奇函数，

$$\Psi(K) = \frac{1}{2\pi K}\int_{-\pi}^{+\pi}[-1 + \alpha s(K\cos\xi)]K\sin\xi\cos\xi d\xi \equiv 0. \qquad (9.36)$$

由此可见，无论电子管的特性如何，都有 $\Psi(K) \equiv 0$，而自振的周期（准确到 μ^2 阶项）则与振荡器振荡回路的固有振动周期相同($R = 0$ 时).

1. 软状态下的电子管振荡器. 以三次多项式来逼近电子管特性:

$$i_a = f(E_g + u) = i_{a0} + S_0 u + S_1 u^2 - S_2 u^3. \qquad (9.37)$$

此时,特性的互导则为:

$$S(E_g + u) = \frac{di_a}{du_g} = S_0 + 2S_1 u - 3S_2 u^2 \text{[1]}.$$

设 $u = u_0 x$. 我们将这样来选取电压比例尺 u_0,使得 x^2 的系数等于 1, 即: $u_0 = \sqrt{\frac{S_0}{3S_2}}$. 这样一来,无量纲互导 $s(x)$ 即可化为:

$$s(x) = 1 + \beta_1 x - x^2,$$

其中

$$\beta_1 = \frac{2S_1}{S_0} u_0^*.$$

如果电子管特性是对称的,并以多项式 $i_a = i_{a0} + S_0 u - S_2 u^3$ 来逼近,则电压 u_0 具有特性的"饱和电压"的物理意义: $u = \pm u_0$ 时 $S_0 = 0$. 显然此多项式只有在 $|u| < u_0$, 即 $|x| \leqslant 1$ 时,才能近似地表示实际的特性.

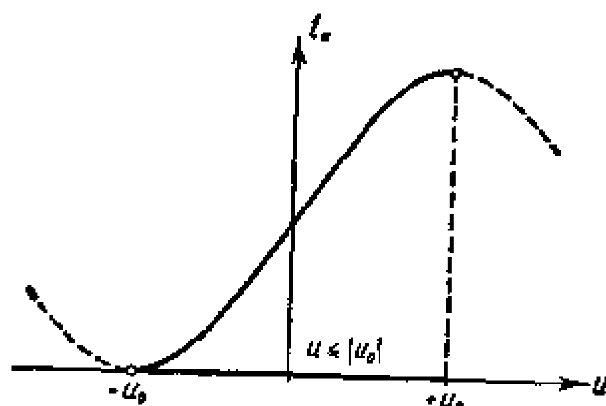


图 473

这样,若将电子管特性以多项式(9.37)来逼近,则电子管振荡器(当 $\omega_0 RC \ll 1$ 时)之方程可化为如下形式:

---

1) 在平衡状态处特性曲线的互导 $S_0 > 0$; 此外我们还假设 $S_2 > 0$. 后者可保证当 $|u|$ 增加时 ($|u|$ 足够大) 互导 $S(E_g + u)$ 减小,这正是实际电子管所具有的特点.

$$\ddot{x}+x=\mu[-1+\alpha(1+\beta_1 x-x^2)]\dot{x}, \qquad (9.38)$$

根据(9.11)和(9.12)，其短方程，若采用极坐标范德波尔变量K和ϑ，则可化为[1]:

$$\frac{dK}{dt}=\mu\frac{K}{2}\left[\alpha-1-\alpha\frac{K^2}{4}\right], \frac{d\vartheta}{dt}=0. \qquad (9.39)$$

在平面 x, y 上的极限环，其半径(零次近似)由方程

$$\Phi(K)\equiv\frac{K}{2}\left[\alpha-1-\alpha\frac{K^2}{4}\right]=0 \qquad (9.40)$$

确定．这里可能出现两种情况．若 $\alpha<1$，即$MS_0<RC$（不满足振荡器的自激条件)，则方程(9.40)具有唯一的实根 $K=0$，它对应于电子管振荡器的平衡状态(0,0)．此平衡状态是稳定的，因为当 $\alpha<1$ 时

$$\Phi'(0)=\frac{\alpha-1}{2}<0.$$

不难看出，所有其它相轨线都是螺线，且当 $t\to+\infty$ 时渐近地趋向位于原点的平衡状态．这样一来，在相平面 x, y 上我们将得出衰减振动所特有的图象（图 474, a)——无论初始条件如何，振荡器中的振动都将衰减，并建立起平衡状态．

当 $\alpha>1(MS_0>RC)$，即满足自激条件时，方程(9.40)将具有两个使我们感兴趣的根：

$$K=0 \text{ 和 } K=2\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}=K_0,$$

---

1) 函数 $\Phi(K)$——第一短方程的右端——可以将函数

$$[-1+\alpha(1+\beta_1 K\cos\xi-K^2\cos^2\xi)]K\sin^2\xi,$$

按ξ取平均值求得，即：

$$\Phi(K)=K[(\alpha-1)\overline{\sin^2\xi}+\alpha\beta_1 K\overline{\cos\xi\sin^2\xi}-\alpha K^2\overline{\cos^2\xi\sin^2\xi}]$$

(这里和以后，画在上面的横线表示相应函数按ξ所取之平均值)．

由于

$$\overline{\sin^2\xi}=\frac{1}{2}, \overline{\cos\xi\sin^2\xi}=\overline{\sin\xi\cos^2\xi}=0, \overline{\cos^2\xi\sin^2\xi}=\frac{1}{4}\overline{\sin^2 2\xi}=\frac{1}{8},$$

故

$$\Phi(K)=\frac{K}{2}\left[\alpha-1-\frac{\alpha}{4}K^2\right].$$

其中第一个根对应于不稳定平衡状态(0,0)，因为此时

$$\Phi'(0)=\frac{\alpha-1}{2}>0.$$

第二个根对应于半径为

$$K_0=2\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}=2\sqrt{\frac{MS_0-RC}{MS_0}} \tag{9.41}$$

的极限环，而且是稳定的，因为

$$\Phi'(K_0)=-\frac{\alpha K_0^2}{4}<0.$$

其余相轨线可分为两类：其一为 $t\to+\infty$ 时由外部绕向极限环，$t\to-\infty$ 时走向无限远的相轨线；其二为 $t\to+\infty$ 时由内部绕向极限环，$t\to-\infty$ 时趋向平衡状态的相轨线。我们得出最简单的软状态下的自振系统所特有的相图(图 474, б)——不论初始条件如何，相点都渐近地($t\to+\infty$ 时)趋向极限环，这相当于在振荡器中似正弦周期振动(自振)的建立过程。

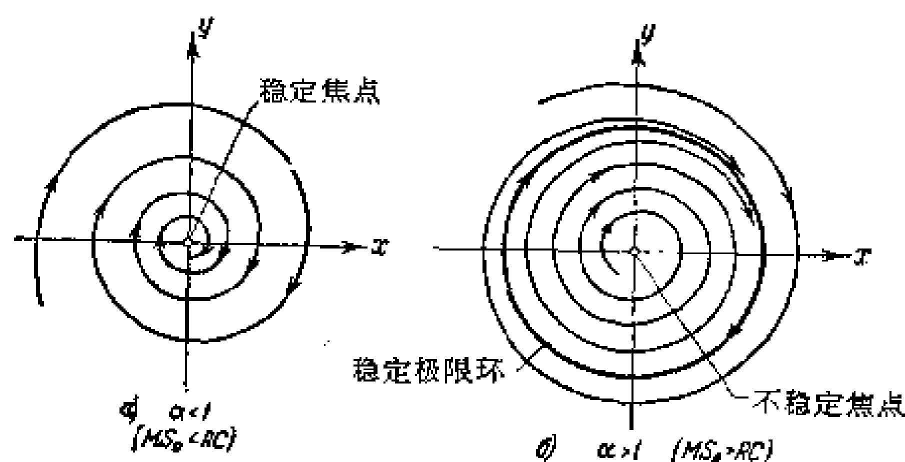


图 474

自振振幅决定于极限环的半径 K_0，若采用有量纲单位，则显然等于

$$U_0=u_0K_0=2\sqrt{\frac{MS_0-RC}{3MS_2}};$$

自振周期(准确到 μ^2 阶项)等于 2π (采用无量纲单位)，因为 $\Psi(K)$

$\equiv 0$，若采用普通单位，则为

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

如果从某一参数值 $\alpha > 1$ 开始连续减小此参数值（例如减小反馈系数M），则极限环的半径也将连续地减小，并当 $\alpha \to 1$ 时趋向零. 当 $\alpha = 1$ 时，极限环消失，与不稳定焦点相汇合，并把自己的稳定性传给焦点；我们看到，$\alpha = 1$ 乃是参数 α 的分枝值[1]. 如果将 α 连续地由 $\alpha < 1$ 变到 $\alpha > 1$，则 α 通过 $\alpha = 1$ 时出现自振，其振幅由零开始连续地增大[2]. 当 α 向相反方向变化时，振动振幅逐渐连续地减小，达到零，自振消失，于是振荡器就变为衰减振动系统（图 475）. 自振的这种发生的方式称为**自振的软激**（在这里是由于 α 的变化引起的），它与硬激不同，在后一情况中，尽管我们连续缓慢改变参数，但自振总是突然出现的，而且其振幅也立刻就达到有限值.



图 475

现在我们应用短方程来寻求用以描述振动建立过程的近似解析式（我们将假定 $\alpha > 1$）. 将方程组(9.39)积分后，可得[3]：

$$K = \frac{K_0}{\sqrt{1 + Ce^{-\mu(\alpha-1)t}}}, \quad \vartheta = \vartheta_0 = \text{常数}$$

（这里 C 为任意常数、决定于 K 的初始值，例如，当 $t = 0$ 时的 K 值；不难看出，$-1 < C \leqslant +\infty$）. 由此，若转换为变量 x，y 则得[4]：

---

1) 对于所研究之情况的分枝值理论，将以一般形式在本章 §10 中给出.

2) 这里必须假设参数的变化足够缓慢.

3) 方程组(9.39)中的第一方程，作变换 $z = K^{-2}$ 后，可化为线性方程：

$$\frac{dz}{dt} + \mu(\alpha - 1)z = \frac{\mu\alpha}{4},$$

由此可得

$$K^{-2} = K_0^{-2} + Ce^{-\mu(\alpha-1)t}.$$

4) 显然，$\mu(\alpha - 1) = \omega_0(MS_0 - RC)$ 越小，即振荡器离自激阀值越近，自振的建立就越缓慢.

$$
\left.\begin{aligned}
x(t) &= \frac{K_0\cos(t+\vartheta_0)}{\sqrt{1+Ce^{-\mu(\alpha-1)t}}},\\
y(t) &= -\frac{K_0\sin(t+\vartheta_0)}{\sqrt{1+Ce^{-\mu(\alpha-1)t}}}.
\end{aligned}\right\} \tag{9.42}
$$

可以说，这就是方程组(9.38)的通解的近似表示式，因为这里有两个任意常数：C和ϑ_0(我们指出，$C=0$对应于极限环，$C=\infty$——平衡状态)．这里我们应注意到如下情况：对于特性所采用的表示式(9.37)中含有的二次项，在通解的零次近似的表示式中却完全没有出现(它的影响只表现在其后的近似中)．这是一个共同特点，它不仅对于二次项，而且对于特线中的任意偶次项都是如此．如果将特性以任意多项式来逼近，则其诸偶次项将对零次近似不发生任何影响．其所以如此是因为正弦和余弦的偶次幂的展开式中只含有偶倍角的正弦和余弦，因此它们的展开式中就不含有基频(共振频率)．

2. 以五次多项式逼近其特性的电子管振荡器． 我们来重新研究上述电子管振荡器，但取另外一种更加准确的表示式来逼近电子管的特性，即设：

$$
i_a = i_{a0} + S_0u + S_1u^2 + S_2u^3 + S_3u^4 - S_4u^5. \tag{9.43}
$$

此时，对于特性的互导我们将有：

$$
S(E_g+u) = \frac{di_a}{dt} = S_0 + 2S_1u + 3S_2u^2 + 4S_3u^3 - 5S_4u^4\,{}^{1)}.
$$

设$u=u_0x$，其中$u_0=\sqrt[4]{\dfrac{S_0}{5S_4}}$，可以得出折算互导：

$$
s(x) = \frac{S(E_g+u_0x)}{S_0} = 1 + \beta_1x + \beta x^2 + \beta_3x^3 - x^4\,{}^{2)},
$$

从而使我们有可能将电子管振荡器的方程写成如下形式：

---

1) S_0，$S_4>0$，其它系数的符号可以任意．条件$S_4>0$可保证$|u|$增加时互导S减小(当$|u|$足够大时)，下面我们将会看到，这对于稳定自振的存在是必要的．当电子管特性已给定时，系数i_{a0}，S_0，S_1，S_2，S_3和S_4，显然与栅偏压E_g有关．

2) $\beta_1=\dfrac{2S_1u_0}{S_0}$，$\beta=\dfrac{3S_2u_0^2}{S_0}$，$\beta_3=\dfrac{4S_3u_0^3}{S_0}$．

$$\ddot{x}+x=\mu[-1+\alpha(1+\beta_1 x+\beta x^2+\beta_3 x^3-x^4)]\dot{x}. \quad (9.44)$$

根据(9.11)和(9.12),短方程组将为:

$$\frac{dK}{dt}=\mu\Phi(K), \frac{d\vartheta}{dt}=0, \quad (9.45)$$

其中

$$\Phi(K)=\frac{\alpha K}{2}\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}+\frac{\beta K^2}{4}-\frac{K^4}{8}\right]^{1)}.$$

方程 $\Phi(K)=0$ 永远具有有根 $K=0$, 这说明原点永远是平衡状态。由于

$$\Phi'(0)=\frac{\alpha-1}{2},$$

故 $\alpha<1$ 时此平衡状态稳定, $\alpha>1$ ($MS_0>RC$ 时, 此时振荡器中发生自激)时则不稳定。方程 $\Phi(K)=0$ 的其它异于零并表示极限环半径的根,显然为双二次方程

$$\frac{K^4}{8}-\frac{\beta K^2}{4}-\frac{\alpha-1}{\alpha}=0 \quad (9.46)$$

的根,它不可能有两个以上的正根。

为了图解此方程, 在画出的图上(图 476)以横轴表示 $\gamma=\frac{\alpha-1}{\alpha}$,纵轴表示 $\rho=K_i^2$ (极限环半径的平方)。在此图上不难看出,由方程(9.46)所决定的曲线:

$$\gamma=\frac{\alpha-1}{\alpha}=\frac{K^4}{8}-\frac{\beta K^2}{4}=\frac{\rho^2}{8}-\frac{\beta\rho}{4} \quad (9.46a)$$

---

1) $\Phi(K)=K[(\alpha-1)\overline{\sin^2\xi}+\alpha\beta_1 K\overline{\cos\xi\sin^2\xi}+\alpha\beta K^2\overline{\cos^2\xi\sin^2\xi}+$
$+\alpha\beta_3 K\overline{\cos^3\xi\sin^2\xi}^{*}-\alpha K^4\overline{\cos^4\xi\sin^2\xi}]$,

由此,若代入

$$\overline{\sin^2\xi}=\frac{1}{2}, \ \overline{\cos\xi\sin^2\xi}=\overline{\sin\xi\cos^2\xi}=0,$$

$$\overline{\cos^2\xi\sin^2\xi}=\frac{1}{8}, \ \overline{\cos^3\xi\sin^2\xi}=\overline{\sin^3\xi\cos^2\xi}=0,$$

$$\overline{\cos^4\xi\sin^2\xi}=\overline{\sin^4\xi\cos^2\xi}=\frac{1}{2}\overline{[\cos^4\xi\sin^2\xi+\sin^4\xi\cos^2\xi]}=$$

$$=\frac{1}{2}\overline{\cos^2\xi\sin^2\xi}=\frac{1}{16},$$

则可得出(9.45)。

* 原书为 $\overline{\cos^3\xi\sin^3\xi}$——译者注。

为一抛物线，其轴线与 γ 轴平行．由于系数 β 的符号的不同（或者说表示式 (9.43) 中系数 S_2 的符号不同）我们可以得到两种情况．若 $\beta<0$（图 476,a)，则 γ 为 ρ 的单调增函数（$\rho>0$ 时），方程(9.46) 在 $\gamma<0$（即 $\alpha<1$）时没有正根，$\gamma>0$（即 $\alpha>1$）时具有唯一的正根 K_1．若 $\beta>0$（图 476, б），则抛物线(9.46a)与 ρ 轴交

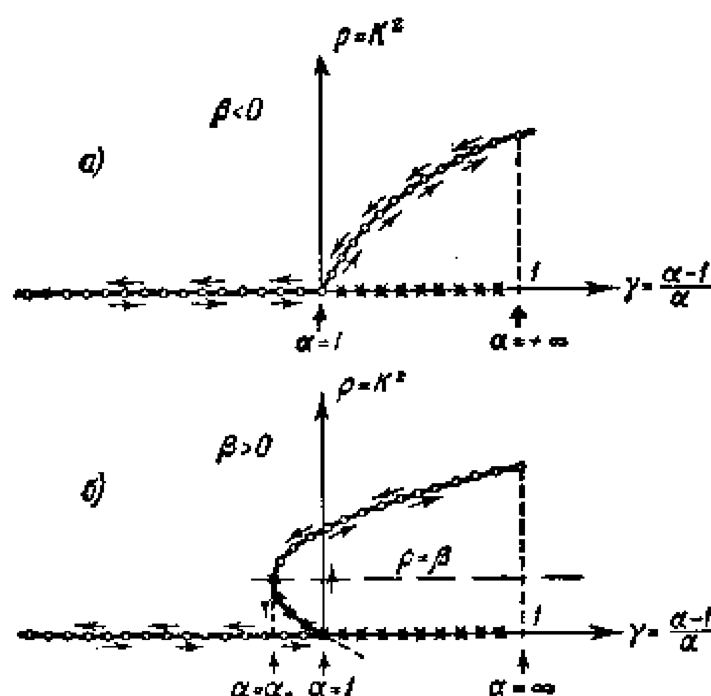


图 476

于两点：点 $\rho=0$ 和点 $\rho=2\beta$；在点 $\rho=\beta$，$\gamma=-\frac{\beta^2}{8}$ 上，抛物线具有铅垂的切线，整个抛物线都在此切线的右方．因此，若 $\beta>0$，则方程(9.46)当 $\gamma<-\frac{\beta^2}{8}\left(\text{即}\ \alpha<\alpha_0=\frac{1}{1+\beta^2/8}\right)$ 时没有正根，$-\frac{\beta^2}{8}<\gamma<0(\alpha_0<\alpha<1)$ 时有两个正根 K_1 和 K_2，以及在 $\gamma>0(\alpha>1)$ 时有一个正根．

由于对(9.46)的根 K_i 有：

$$\Phi'(K_i)=-\frac{\alpha K_i^2}{2}(K_i^2-\beta), \tag{9.47}$$

故 $\beta<0$ 时，只有在 $\alpha>1$ 条件下才能存在的唯一的极限环是稳定的．这样一来，当 $\beta<0$ 时我们所得出的相平面 x,y 的相轨

线划分，从定性方面来看，与以前采用三次多项式来逼近电子管特性的情况（图 451）完全一样，是软激振动（参数 α 变化时）所特有的图象。

若 $\beta > 0$（即 $S_2 > 0$），则得出另外一种图象．在这里，只有半径为

$$K_i > \sqrt{\beta}$$

的极限环才是稳定的，这就是说，抛物线（9.46a）位于轴 $\rho = \beta$ 上方的部分（在图 476，б 中用小圆圈表示）对应于稳定极限环，而位于抛物线轴与横轴之间的抛物线弧则对应于不稳定极限环．这样

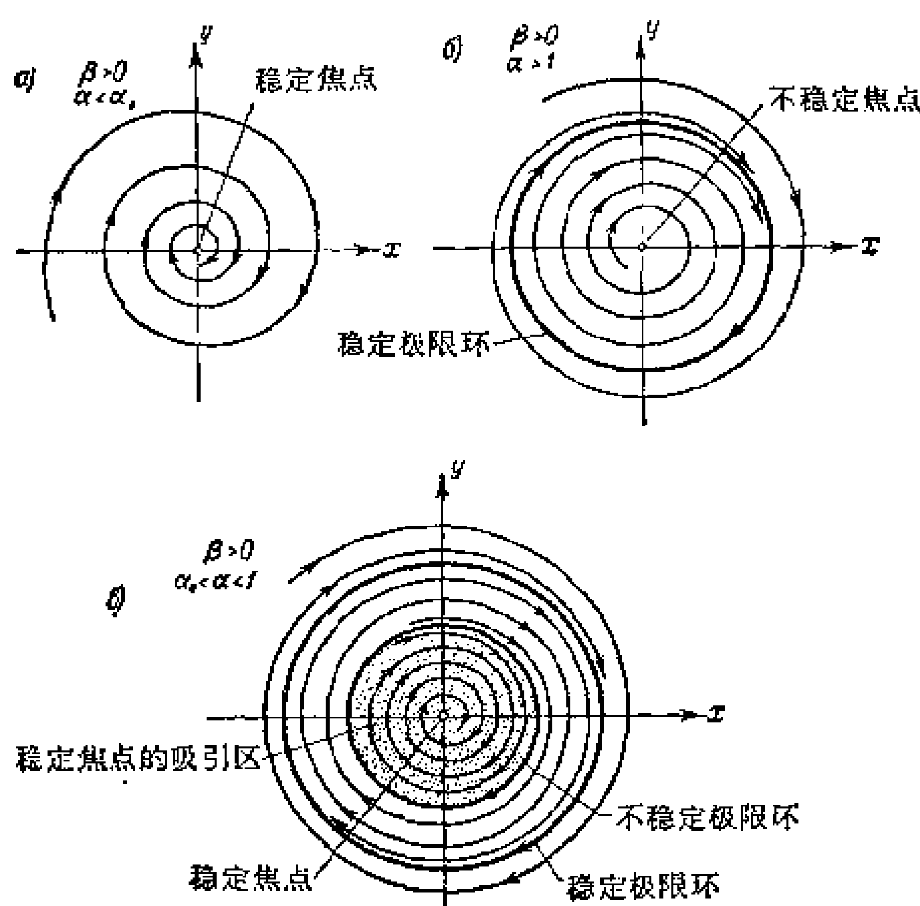


图 477

一来，当 $\beta > 0$ 时，由于参数 α 数值的不同，我们将在相平面 x，y 上得出三种性质不同的相轨线划分（图 477）。

若 $\alpha < \alpha_0$（图 477，a），则所有相轨线当 $t \to +\infty$ 时都渐近地趋近于平衡状态——稳定焦点 (0, 0)，即振荡器中激不起振动，所

有振动都将衰减下去．若 $\alpha>1$（图 477，б），则平衡状态不稳定，所有相轨线都趋向于（$t\to+\infty$ 时）唯一的稳定极限环；在这种情况下出现**软状态**：无论初始条件如何都将建立起自振．

最后，若 $\alpha_0<\alpha<1$（图 477，в），则在稳定平衡状态(0，0)和半径为 K_2 的稳定极限环二者之间存在有半径为 K_1 的不稳定极限环．因此，由不稳定极限环内部开始的相轨线将趋向平衡状态，只有从不稳定极限环**外部**开始的相轨线才绕向稳定极限环[1]．换句话说，由于初始条件不同，在振荡器中或建立起平衡状态，或建立起振幅为 K_2 的自振，这就是说，我们所研究的是硬状态下的自振系统（为了在振荡器中建立自振，必须给系统以某种"冲击"：使得在初始瞬时有 $x_0^2+y_0^2>K_1^2$）．

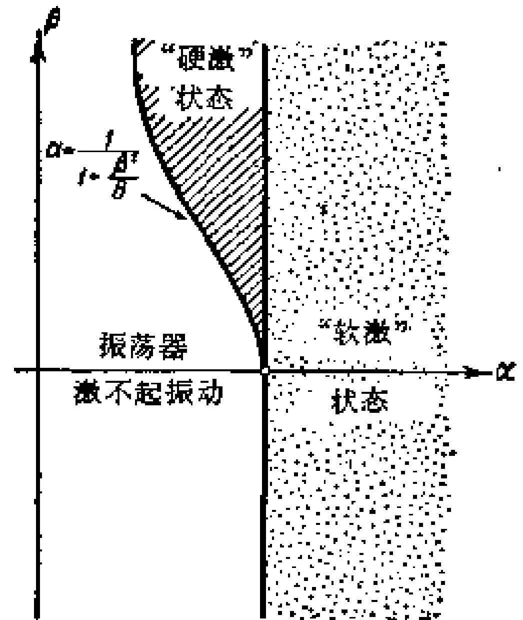


图 478

在图 478 上表示出被划分成振荡器不同运行状态区域的 α，β 参数平面．

现在我们来看一看，如果 $\beta>0$ 且当 $\alpha_0<\alpha<1$ 时有硬状态存在，那么若连续地并足够缓慢地改变参数 α，自振的振幅将如何变化．如果开始时振荡器没有被激发，例如 α 取某一小于 α_0 的数值，则当连续地缓慢地增加 α 时，系统的相点将位于平衡状态（更准确些说，在平衡位置附近，而且参数 α 变化越慢，距离越近），直到平衡状态失去稳定性时（$\alpha=1$ 时）为止．但当 $\alpha=1$ 时，已存在有限大半径为 $K=\sqrt{2\beta}$ 的稳定极限环，因此在参数 $\alpha=\dfrac{MS_0}{RC}$ 增加过程中，当 α 变为 1 的瞬时将激发起有限振幅的自振[2]．若 α 继续增加，则自振的振幅将连续地单调增大（$\alpha\to+\infty$ 时，$\gamma\to1$

1）不稳定极限环当然并不对应于振荡器中存在的自振过程，它只是稳定自振状态和平衡状态二者的"吸引区"间的分界线．

2）当然，自振的建立不会是瞬时的．μ 越小，其建立速度亦越小．

而 $K \to \beta^2 + \sqrt{\beta^2 + 8}$).

当参数 α 减小时，相点将位于稳定极限环上(准确些说，在其附近，而且 α 变化越慢，距离越近)，直到 α 等于 α_0 时为止．过此分枝值时，稳定极限环与不稳定极限环合而为一，不复存在，自振突然中断(振幅等于$\sqrt{\beta}$时)，于是系统转入平衡状态．

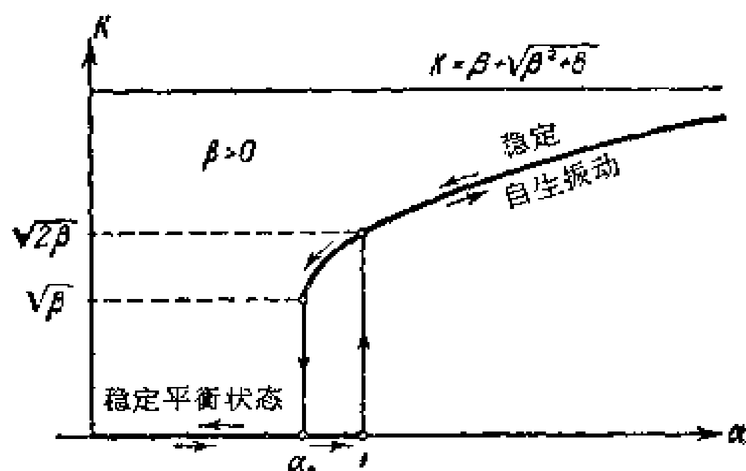


图 479

我们看到，与软激情况($\beta < 0$ 时)不同，在这里自振的出现和消失，发生在振荡器激励系数 $\alpha = \frac{MS_0}{RC}$ 取不同数值($\alpha = 1$和$\alpha = \alpha_0$)时，而且自振出现和中断时的振幅大小不同，但在两种情况下都是有限大的．一般来说，所得到的乃是所谓自振的硬状态建立的典型图象(图 479)[1]．

这样一来，如果用五次多项式来逼近电子管的特性，则由于系数 S_2 符号的不同，在振荡器中或得到自振的软激($S_2 < 0$ 时)或得到硬激($S_2 > 0$ 时)(通过其参数 α 的变化)．由于

$$S_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2S}{du_g^2}\right]_{u_g=E_g},$$

---

1) 我们采用"软"和"硬"状态这两个名词有双重含义．第一，若系统的参数值是给定的，则根据是否对于所有初始条件都能建立起自振，我们区分自振系统为软状态或硬状态．第二，根据系统的某一参数缓慢且连续地变化时，自振振幅的变化性质的不同，我们区分自振的软激或硬激(建立)．显然，对于自振的硬激来说，必须使这一参数取某一数值时，系统处于硬状态．

故可用如下方法将栅偏压 E_g 分成不同区间，使它们分别对应于软激和硬激. 根据选定的近似特性 $i_a=f(u_g)$ (图 480)画出特性互导 $S=f'(u_g)$ 与 u_g 的关系曲线，并在此曲线上标出拐点 u_{g1} 和 u_{g2}.

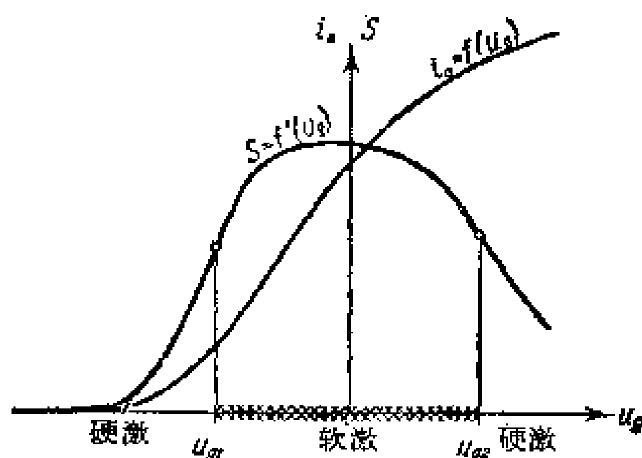


图 480

此时，当 $u_{g1}<E_g<u_{g2}$ 时有$\left(\frac{d^2S}{du_g^2}\right)_{u_g=E_g}<0$. 对应于这些栅偏压，我们将有自振的软激. 反之，在此区间外部($E_g<u_{g1}$ 或 $E_g>u_{g2}$ 时)有$\left(\frac{d^2S}{du_g^2}\right)_{u_g=E_g}>0$，振荡器中将有自振的硬激.

最后我们指出，方程组(9.45)可以进行积分，这和采用三次多项式逼近电子管特性的情况相类似. 得出的解将定量地表征自振的建立过程. 关于电子管振荡器中自振的软激和硬激（通过其参数的变化)问题，在以后(本章 § 10)研究自振系统的分枝理论时，我们还要提到.

3. 具有双环 RC 回路的电子管振荡器中的自振. 从双环 RC 回路电子管振荡器(图 481, a)的振动方程:

$$C\frac{dv}{dt}=\frac{u-E_g}{R},$$

$$\frac{E_a-(u+v)}{R_a}=i(u)+C\frac{dv}{dt}+C\frac{d(u+v)}{dt}$$

(可参看上册第五章 § 12 和第八章 § 5)中，消去 v，得出一个二阶微分方程:

$$R_aR_gCC_a\frac{d^2u}{dt^2}+R_gC\left[1+\frac{R_a}{R_g}\left(1+\frac{C_a}{C}\right)\right.$$

$$\left.+R_aS(u)\right]\frac{du}{dt}+u=E_g$$

若引入新的无量纲变量

$$t_{新}=\frac{t}{\sqrt{R_aR_gCC_a}}\ 和\ x=\frac{u-E_g}{u_0}$$

(u_0 为电压的某种比例尺),则得方程如下:

$$\ddot{x}+x=-\sqrt{\frac{R_gC}{R_aC_a}}\left[1+\frac{R_a}{R_g}\left(1+\frac{C_a}{C}\right)\right.$$

$$\left.+R_aS(E_g+u_0x)\right]\dot{x},\tag{9.48}$$

其中 $S(u)=\frac{di}{du}$ 为电子管组特性 $i=i(u)$ 的互导. 由于电子管组的特性 $i=i(u)$ 是下降的(图 481,б), 故有 $S(u)<0$,从而欲使振荡器发生自激 (欲使唯一的平衡状态: $x=0$, $\dot{x}=0$ 或 $u=E_g$, $v=E_a-E_g-R_ai(E_g)$不稳定),必须有

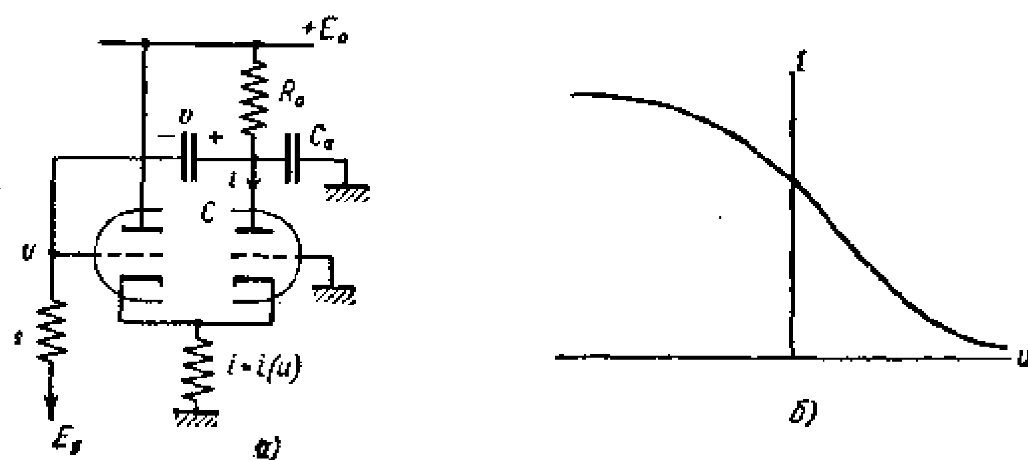


图 481

$$R_aS_0>1+\frac{R_a}{R_g}\left(1+\frac{C_a}{C}\right),\tag{9.49}$$

其中 $S_0=-S(E_g)$ 为电子管组特性在平衡状态上之互导的绝对值.

设此条件满足,因而振荡器自激. 为了确定自振的振幅,将电子管组的特性 $i=i(u)$ 以三次多项式来逼近. 此时将有:

$$S(E_g+u_0x)=-S_0+S_1x+S_2x^2\,{}^{1)},$$

振荡器的振动方程(9.48)可写成如下形式:

$$\ddot{x}+x=\sqrt{\frac{R_gC}{R_aC_a}}\left\{R_aS_0-\left[1+\frac{R_a}{R_g}\left(1+\frac{C_a}{C}\right)\right]\right.$$

$$\left.-R_aS_1x-R_aS_2x^2\right\}\dot{x}.$$

此方程接近于谐振子的方程,而振荡器的振动则接近于谐振动,但此时必须满足条件:

$$R_aS_0-\left[1+\frac{R_a}{R_g}\left(1+\frac{C_a}{C}\right)\right]\ll 1,\ R_a|S_1|\ll 1,\ R_aS_2\ll 1,$$

即振荡器接近自激阀(边缘),而特性非线性很小.

引入小参数

$$\mu=\sqrt{\frac{R_gC}{R_aC_a}}\left\{R_aS_0-\left[1+\frac{R_a}{R_g}\left(1+\frac{C_a}{C}\right)\right]\right\}$$

$(0<\mu\ll 1)$,并作记号

$$\sqrt{\frac{R_gC}{R_aC_a}}\,R_aS_1=\mu\alpha_1,\quad \sqrt{\frac{R_gC}{R_aC_a}}\,R_aS_2=\mu\alpha_2$$

(α_1 和 α_2 是量级为 1 的量). 此时双环 RC 回路电子管振荡器的振动方程则可化为便于采用范德波尔法的形式:

$$\ddot{x}+x=\mu[1-\alpha_1x-\alpha_2x^2]\dot{x}. \tag{9.50}$$

其短方程显然为:

$$\frac{dK}{dt}=\mu\,\frac{K}{2}\left(1-\frac{\alpha_2K^2}{4}\right),\quad \frac{d\vartheta}{dt}=0.$$

若令函数

$$\Phi(K)=\frac{K}{2}\left(1-\frac{\alpha_2K^2}{4}\right),$$

等于零,则可以得到, 方程组(9.50)的对应于根 $K=0$ 的平衡状

---

1) 当 u_0 给定时, 具有电阻量纲倒数量纲的系数 S_0, S_1, S_2 与 E_g 有关. 由于电子管组的特性是下降的,故 $S_0>0$; 为了使自振存在,我们将设 $S_2>0$.

态以及半径为

$$K_0 = 2\sqrt{\frac{1}{\alpha_2}} = 2\sqrt{\frac{R_aS_0 - \left[1 + \frac{R_a}{R_g}\left(1 + \frac{C_a}{C}\right)\right]}{R_aS_2}} \qquad (9.51)$$

的极限环. 平衡状态是不稳定的,因为

$$\Phi'(0) = \frac{1}{2} > 0^{1)},$$

而极限环则是稳定的,因为

$$\Phi'(K_0) = -\frac{\alpha_2}{4}K_0^2 = -1 < 0.$$

这样,将出现软状态:不论初始条件如何,都将建立起振幅为 K_0 的似正弦自振[2]. 其周期(采用普通单位并准确到 μ^2 阶项)显然等于

$$T = 2\pi\sqrt{R_aR_gCC_a}.$$

§5. 庞　卡　莱　法

在这里我们将研究庞卡莱在其有关天体力学的著作[184, 185]中提出的非线性方程的积分方法. 这一方法虽然对方程的选择以及研究的问题加上了很大的限制,但仍能包括大量的重要情况,并能对一系列极有意义的实际问题给出解答.

我们将假设,所研究的非线性方程(或方程组)与某一参数 μ 有关,并当参数取一定数值 $\mu = \mu_0$ (例如 $\mu = 0$)时,变成我们熟知其解法的方程(或方程组),例如,变成线性方程(或线性方程组).

下面我们将研究 μ 值与 μ_0 相差不多的非线性方程. 其次,我

1) 不应忘记,我们所研究的乃是自激振荡器情况,即有

$$R_aS_0 > 1 + \frac{R_a}{R_g}\left(1 + \frac{C_a}{C}\right).$$

2) 如果将电子管组的特性 $i = i(u)$ 以五次多项式来逼近,则既可得到自振激励的软状态,也可得到自振的硬状态,这决定于特性互导表示式中 x^2 项之系数的符号.

们将只研究非线性方程的周期解（这一限制也构成此方法的实质）．为了确定起见，设所研究之系统在 $\mu=0$ 时变成常系数线性系统．但推理的过程是很一般的，亦适用于采取其它假设的情况．

这样，我们所要研究的非线性方程组将是：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=ax+by+\mu f_1(x,y,\mu);\\ \frac{dy}{dt}&=cx+dy+\mu f_2(x,y,\mu),\end{aligned}\right\}\tag{9.52}$$

其中 a,b,c,d 和 μ 均为常量；设 μ 足够小．其次，我们将假定 f_1 和 f_2 为 x,y 和 μ 的解析函数，即它们可以展开为 x,y,μ 的收敛幂级数（至少在变量取小值时是如此）．

如果将非线性项看作是 $\mu=0$ 时所得线性方程组的微小变更的结果，则我们的任务将在于研究以下问题，对应于线性方程组的哪些原始周期解存在有非线性方程组（此方程组在 $\mu=0$ 时变为原始方程组）的周期解（周期甚至可以不同），以及满足什么条件（即 f_1 及 f_2 应为何种函数）非线性方程组的这些周期将是稳定的．

首先我们来研究 $\mu=0$ 情形．方程组将化为

$$\frac{dx}{dt}=ax+by,\quad \frac{dy}{dt}=cx+dy.\tag{9.53}$$

消去 y 后可化为方程

$$\ddot{x}-(a+d)\dot{x}+(ad-bc)x=0.\tag{9.53a}$$

继续进行研究的必要前提在于：所得线性方程组(9.53)或方程(9.53a)本身必须有周期解．

这就是说，特征方程

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$$

必须有纯虚根，即必有

$$(a+d)=0,\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}>0.\tag{9.54}$$

此时则有

$$\lambda_1=+j\sqrt{ad-bc},\quad \lambda_2=-j\sqrt{ad-bc},$$

如引入符号 $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \omega_1 = +\sqrt{ad-bc}$，则可以说，方程(9.53a)具有完全确定的频率 ω_1，它由方程本身确定．相位和振幅则不由方程组给定，而由初始条件决定．相位的任意性是显而易见的：(9.53a)不显含时间，因此计算时间可以从任意瞬时 t_0 开始（但 x, y 的相位差和 x, y 的振幅比，则完全由方程组确定：将 x 值代入(9.53)的第二方程中即可求出它们）．

这样，我们就证实了：如果满足条件(9.54)，则所研究之方程组(9.53)将有无限多个周期解，它们有不同的振幅和相位．这些解具有如下形式：

$$x = K\cos(\omega_1 t + \chi);\quad y = kK\sin(\omega_1 t + \chi + \chi'),$$

其中 k 和 χ' 由方程组(9.53)的系数确定，而 K 和 χ 则是任意的．若写成一般形式，则为：

$$x = \varphi_0(t, \chi, K);\quad y = \psi_0(t, \chi, K),$$

其中 φ_0 和 ψ_0 均为 t 的周期函数，周期为 $\frac{2\pi}{\omega_1}$，χ 和 K——任意常数．如果当 $\mu = 0$ 时，系统仍是非线性的，但却是对应于中心情况的保守系统，则 $\mu = 0$ 时的系统就将具有这种一般形式的解．

由于时间起点可任意选择，故设 $\chi = 0$，这将不破坏讨论的一般性．因此，所研究之线性方程组的解可写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0(t, K) = K\cos\omega_1 t; \\ y &= y_0(t, K) = kK\sin(\omega_1 t + \chi'). \end{aligned}\right\} \tag{9.55}$$

1. 庞卡莱法的思想．在没有转入系统地阐述庞卡莱理论之前，我们先简单地阐述一下主要思想，同时严格地提出数学问题．这种阐述将有助于我们掌握以后所讲的内容．设 $\mu = 0$ 时方程组(9.52)的解，换句话说，也就是方程组(9.53)的解，是已知的．设此解为 $x = x_0(t, K)$；$y = y_0(t, K)$．$t = 0$ 时我们有：$x = x_0(0, K)$，$y = y_0(0, K)$，其中 K 为"振幅"．"振幅"一词之所以加引号，是因为 $\mu = 0$ 时所得之方程，一般来说，可能是非线性保守系统（但在以后的叙述中，我们却将假定 $\mu = 0$ 时方程组是线性的）．现在我们来研究 $\mu \neq 0$ 时方程组(9.52)的解．令其为：$x =$

$x(t, \mu, K)$, $y = y(t, \mu, K)$, $t = 0$ 时,其值为 $x = x_0(0, K) + \beta_1$, $y = y_0(0, K) + \beta_2$; β_1 和 β_2 为足够小的量. 庞卡莱的方法在于求按 β_1, β_2 和 μ 展开的幂级数形式的解,并证明当 β_1, β_2 和 μ 足够小时,它们在任意给定的有限时间间隔 $0 < t < t_1$ 内,都一致收敛(关于这一收敛性的证明我们不准备进行). 这些幂级数的系数为时间函数. 将上述幂级数代入方程组(9.52),并在所得方程中,令 β_1, β_2 和 μ 的同次项的系数相等,即可求出这些函数. 在计算这些函数时,将得出具有一定初始条件的线性方程组. 这样,我们就得到 x 和 y 的某种表示式:

$$x = x(t, \mu, \beta_1, \beta_2, K), \quad y = y(t, \mu, \beta_1, \beta_2, K). \tag{9.56}$$

现在我们来研究, 在什么条件下这些解将是周期的. 设零次近似方程组(根据我们采用的假设这些方程是线性方程)的解具有周期 T. 非线性方程组的解,其周期一般来说与此不同,但由于我们寻求的是与线性方程组的解相差无几的解, 故而待求解的周期必接近于 T. 因此,我们可以设新的周期为 $T + \tau$,其中 τ 为某一不大的"周期校正量". 显然,为使解(9.56)为周期等于 $T + \tau$ 的周期函数, 必须使 x 和 y 在 $t = 0$ 和 $t = T + \tau$ 时具有相同的值. 确实如此,如果在 $t = T + \tau$ 瞬时 x, y 的值与 $t = 0$ 瞬时的相同,则根据柯西定理及方程组的自治性,可以确认,由 $t = T + \tau$ 瞬时开始的过程,将是由 $t = 0$ 瞬时开始之过程的重复,即所得的解确为周期等于 $T + \tau$ 的周期解. 这样, 解具有周期性的条件将归结为如下关系式:

$$x(T + \tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) - x(0, \mu, \beta_1, \beta_2, K) = 0,$$

$$y(T + \tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) - y(0, \mu, \beta_1, \beta_2, K) = 0,$$

由于 T 为已知量,故又可化成:

$$\Phi(\tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) = 0, \quad \Psi(\tau, \mu, \beta_1, \beta_2, K) = 0. \tag{9.57}$$

这样一来,我们就得到两个方程,它们包含有三个未知量 τ, β_1, β_2, 但由于方程是自治的,且相位可任意选择,故可将 β 中的一个加以固定, 例如, 设 β_2 等于零. 这样我们就能得到一个完全确定的周期解;得出此解以后,再补充以任意相位, 则又重新恢复曾经失去

的任意性.

由于在 $\mu=0$ 时我们应当得到周期为 T 的周期解,即周期校正量为零,故 $\mu=0$, $\tau=0$ 时,显然周期性条件是满足的,函数 Φ 及 Ψ 变为零. 因此 μ 必为公因子, 于是方程组(9.57)可改写成如下形式:

$$\mu\Phi_1\left(\frac{\tau}{\mu},\ \mu,\ \beta_1,\ \beta_2,\ K\right)=0,\ \mu\Psi_1\left(\frac{\tau}{\mu},\ \mu,\ \beta_1,\ \beta_2,\ K\right)=0,$$

而方程组(9.52)之周期解的存在条件将有如下形式:

$$\Phi_1\left(\frac{\tau}{\mu},\ \mu,\ \beta_1,\ \beta_2,\ K\right)=0,\ \Psi_1\left(\frac{\tau}{\mu},\ \mu,\ \beta_1,\ \beta_2,\ K\right)=0.$$

为使 $\mu=0$ 时 $\beta_1=\tau=0$, 应使这些方程中不含自由项. 令自由项等于零, 则可得出完全确定的振幅值 K 和频率的一次近似校正量 $\left(\frac{\tau}{\mu}\right)_{\mu\to0}$. 因此,在所研究情况中,可能存在周期解,但其振幅 K 不是任意的,而只能是完全确定的. 根据这一性质,可将主要问题之一表述如下: 当 $\mu=0$ 时我们有无限多个任意振幅的周期解, 但在 $\mu\neq0$ 时, 仅在某些完全确定的振幅附近才存在有周期解. 我们的任务就在于求出这些振幅的数值. 同时, 在解决自振波形这一问题时,常常可以局限于线性近似,而知道非线性只是为了确定这些振动的振幅值. 若运动方程中含有某些参数, 则可由决定振幅的条件, 确立周期解之间以及周期解与平衡状态之间的分枝条件. 问题的第二部分在于确定周期校正量 τ. 在许多有实际意义的情况中,此校正量的第一次近似值常等于零, 即 $\left(\frac{\tau}{\mu}\right)_{\mu\to0}\to0$. 在这种情况下,若仍然需要确定周期校正量,则必须研究下一次近似. 鉴于此问题在振动理论中相当重要, 今后我们还将研究它.

2. 似线性系统的庞卡莱法. 现在我们对庞卡莱法进行系统的阐述. 我们研究一个特殊形式的二阶微分方程, 从振动理论及其实际应用的观点来看,它具有特别重要的意义,这就是似谐振子系统的方程:

$$\ddot{y} + y = \mu f(y, \dot{y}), \tag{9.2}$$

其中 μ 为任意正参数,可选择得足够小; $f(y, \dot{y})$ 为可展开为 y 和 $\dot{y}$ 的幂级数的函数. 当 $\mu = 0$ 时,方程(9.2)的解为:

$$y = K\cos t \tag{9.58}$$

方程(9.2)当 $\mu = 0$ 时的通解,当然应当是 $y = K\cos(t + \delta)$,但由于所研究之这一系统的自治性,我们可以给 δ 以完全确定的数值,例如,设其等于零. 待我们确定出在 $\mu \neq 0$ 时与其相近的解以后,即可重新令此解中之相位取任意值. 上面已经讲过,并非对于所有 K 值,方程(9.2)都具有与(9.58)相近的周期解. 我们的任务就在于确定出,对应于哪些 K 值,存在有方程(9.2)的周期解.

我们将用相平面的观点来阐明所提出的问题. 由于方程(9.2)中不显含时间,因此在 y, $\dot{y}$ 平面上之相轨线将构成彼此不相交的曲线族. 当 $\mu = 0$ 时,方程(9.2)的解为:

$$y = K\cos t = \varphi_0(t), \tag{9.59}$$

其中 K 为任意振幅(根据前面曾提到的观点,我们没有写出相位,但相位也同样是任意的). 当 $\mu = 0$ 时的解,如果把它们放在 y, $\dot{y}$ 的相平面上去研究,将是同心圆族.

解(9.59)我们称其为派生解. 当 $\mu \neq 0$ 时,我们将寻求这样的周期解,当 $\mu \to 0$ 时它们应趋近于派生解 $y = \varphi_0(t)$. 我们将看到,并非对所有的 K 值都存在此种周期解. 我们的任务在于求出这样一些派生解 $\varphi_0(t)$ 的 K 值,在其邻域内应存在有 $\mu \neq 0$ 时方程(9.2)的周期解,并确定其周期与派生解之周期的差值. 这样一来,从相平面 y,$\dot{y}$ 的观点出发,可将所研究问题的第一部分内容表述如下: $\mu = 0$ 时,积分曲线为同心圆族; $\mu \neq 0$ 时圆周变成螺线,仅某些个积分曲线仍保持是闭的,即变成极限环. 需要确定出在其附近出现极限环的那些圆的 K 值.

前面我们曾经提到过,方程(9.2)的解可以写成由 μ 的幂次项和初始条件的差值 $\beta_1 = y(0) - \varphi_0(0)$ 及 $\beta_2 = \dot{y}(0) - \dot{\varphi}_0(0)$ 所组成的幂级数形式,此级数当 μ, β_1, β_2 取足够小的值时,在任意给定的时间间隔[0, t_1]内,都将绝对一致收敛,关于这一点是有证

明的. 因此可以写:

$$y = \varphi_0(t) + A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + D\beta_1\mu + E\beta_2\mu + F\mu^2 + \cdots, \tag{9.60}$$

其中 $A, B, C, D, E, F, \cdots$ 为暂时尚未知的一些时间函数. 我们将采用如下方法寻求这些函数. 将级数 (9.60) 对时间微分, 先取一阶, 再取二阶导数, 则可得出 $\dot{y}$ 和 $\ddot{y}$ 的表示式, 它们同样具有级数形式:

$$\dot{y} = \dot{\varphi}_0(t) + \dot{A}\beta_1 + \dot{B}\beta_2 + \dot{C}\mu + \dot{D}\beta_1\mu + \dot{E}\beta_2\mu + \dot{F}\mu^2 + \cdots, \tag{9.61}$$

$$\ddot{y} = \ddot{\varphi}_0(t) + \ddot{A}\beta_1 + \ddot{B}\beta_2 + \ddot{C}\mu + \ddot{D}\beta_1\mu + \ddot{E}\beta_2\mu + \ddot{F}\mu^2 + \cdots. \tag{9.62}$$

由于我们所研究的 y 和 $\dot{y}$ 值分别接近于 $\varphi_0(t)$ 和 $\dot{\varphi}_0(t)$ 值, 因此可在 $\varphi_0(t)$ 和 $\dot{\varphi}(t)$ 的附近将函数 $f(y, \dot{y})$ 展开为泰勒级数. 若仍然采用级数 (9.60) 和 (9.61) 的形式表示自变量 y 和 $\dot{y}$, 则得出函数 $f(y, \dot{y})$的泰勒级数如下:

$$\begin{aligned} f(y, \dot{y}) &= f[\varphi_0(t), \dot{\varphi}_0(t)] \\ &+ f'_y[\varphi_0(t), \dot{\varphi}_0(t)][A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + D\beta_1\mu + E\beta_2\mu + Fu^2 + \cdots] \\ &+ f'_{\dot{y}}[\varphi_0, \dot{\varphi}_0][\dot{A}\beta_1 + \dot{B}\beta_2 + \dot{C}\mu + \dot{D}\beta_1\mu + \dot{E}\beta_2\mu + \dot{F}\mu^2 + \cdots] \\ &+ \frac{1}{2}f''_{yy}[\varphi_0, \dot{\varphi}_0][A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + \cdots]^2 \\ &+ f''_{y\dot{y}}[\varphi_0, \dot{\varphi}_0][A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + \cdots][\dot{A}\beta_1 + \dot{B}\beta_2 + \dot{C}\mu + \cdots] \\ &+ \frac{1}{2}f''_{\dot{y}\dot{y}}[\varphi_0, \dot{\varphi}_0][\dot{A}\beta_1 + \dot{B}\beta_2 + \dot{C}\mu + \cdots]^2 + \cdots \end{aligned} \tag{9.63}$$

将 $y, \ddot{y}$ 和 $f(y, \dot{y})$ 的表示式代入原始方程(9.2), 并令其中 β_1, β_2 和 μ 的各同类项的系数之和等于零, 则得出右端为周期函数的非齐次常系数二阶线性微分方程组. 方程的数目与我们在展开级数时所取的量阶有关. 如果在展开和代入时只限于不超过二阶小量的项, 则得出六个方程, 可以确定六个函数 A, B, C, D, E, F, 即:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{A} + A = 0, \quad \ddot{D} + D = f'_y(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)A + f'_{\dot{y}}(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)\dot{A}, \\ &\ddot{B} + B = 0, \quad \ddot{E} + E = f'_y(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)B + f'_{\dot{y}}(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)\dot{B}, \\ &\ddot{C} + C = f(\varphi_0, \dot{\varphi}_0), \ddot{F} + F = f'_y(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)C + f'_{\dot{y}}(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)\dot{C} \end{aligned}\right\} \tag{9.64}$$

除方程组(9.64)外，尚需知道函数 A, B, C, D, E, F 应满足的初始条件．将表示式

$$\beta_1 = y(0) - \varphi_0(0) \text{ 和 } \beta_2 = \dot{y}(0) - \dot{\varphi}_0(0) \tag{9.65}$$

与 y 和 $\dot{y}$ 的表示式(9.60)和(9.61)相比较，可以求出 A, B, C, D, E, F 和 $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$, $\dot{D}$, $\dot{E}$, $\dot{F}$ 在 $t=0$ 时的数值．我们得到：

$$\left.\begin{aligned} &A(0)=1,\ \dot{A}(0)=0,\ B(0)=0,\ \dot{B}(0)=1 \\ &C(0)=\dot{C}(0)=D(0)=\dot{D}(0)=E(0) \\ &=\dot{E}(0)=F(0)=\dot{F}(0)=0. \end{aligned}\right\} \tag{9.66}$$

方程组(9.64)中前两个方程，采取初始条件(9.66)以后，其解为：

$$A=\cos t,\ B=\sin t.$$

为了求出由方程组(9.64)和初始条件(9.66)确定的函数 C, D, E, F，必须知道方程 $\ddot{x}+x=\Phi(t)$ 的满足初始条件：$t=0$ 时 $x=\dot{x}=0$ 的解的一般形式．我们知道，此解有如下形式：

$$x=\int_0^t \Phi(u)\sin(t-u)du,\ \dot{x}=\int_0^t \Phi(u)\cos(t-u)du.$$

因此，

$$\left.\begin{aligned}
&A(t)=\cos t,\quad \dot{A}(t)=-\sin t, \\
&B(t)=\sin t,\quad \dot{B}(t)=\cos t, \\
&C(t)=\int_0^t [f]\sin(t-u)du,\quad \dot{C}(t)=\int_0^t [f]\cos(t-u)du, \\
&D(t)=\int_0^t \left\{\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\cos u-\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right]\sin u\right\}\sin(t-u)du, \\
&\dot{D}(t)=\int_0^t \left\{\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\cos u-\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right]\sin u\right\}\cos(t-u)du, \\
&E(t)=\int_0^t \left\{\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\sin u+\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right]\cos u\right\}\sin(t-u)du, \\
&\dot{E}(t)=\int_0^t \left\{\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\sin u+\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right]\cos u\right\}\cos(t-u)du, \\
&F(t)=\int_0^t \left\{\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]C(u)+\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right]\dot{C}(u)\right\}\sin(t-u)du, \\
&\dot{F}(t)=\int_0^t \left\{\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]C(u)+\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right]\dot{C}(u)\right\}\cos(t-u)du.
\end{aligned}\right\} \tag{9.67}$$

在这里以及后面的叙述中，方括号中的表示式 $f, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial \dot{y}}$ 表示其中的 y 和 $\dot{y}$ 应分别代之以

$$\varphi_0(u) = K\cos u \quad 和 \quad \dot{\varphi}_0(u) = -K\sin u.$$

由于我们需要上述函数在 $t = 2\pi$ 时的数值[1)]，故将其写成：

$$\left.\begin{aligned}
&A(2\pi) = 1, \quad \dot{A}(2\pi) = 0,\\
&B(2\pi) = 0, \quad \dot{B}(2\pi) = 1,\\
&C(2\pi) = -\int_0^{2\pi} f(K\cos u, -K\sin u)\sin u\,du,\\
&\dot{C}(2\pi) = \int_0^{2\pi} f(K\cos u, -K\sin u)\cos u\,du,\\
&D(2\pi) = \int_0^{2\pi}\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\sin 2u + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right]\sin^2 u\right\}du,\\
&\dot{D}(2\pi) = \int_0^{2\pi}\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\cos^2 u - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right]\sin 2u\right\}du,\\
&E(2\pi) = \int_0^{2\pi}\left\{-\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\sin^2 u - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right]\sin 2u\right\}du,\\
&\dot{E}(2\pi) = \int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\sin 2u + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right]\cos^2 u\right\}du,\\
&F(2\pi) = -\int_0^{2\pi}\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]C(u) + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right]\dot{C}(u)\right\}\sin u\,du,\\
&\dot{F}(2\pi) = \int_0^{2\pi}\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]C(u) + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right]\dot{C}(u)\right\}\cos u\,du.
\end{aligned}\right\} \quad (9.68)$$

其中 $D(2\pi)$, $\dot{D}(2\pi)$, $E(2\pi)$, $\dot{E}(2\pi)$ 的表示式可稍加简化．利用恒等式：

$$\frac{1}{K}\frac{d}{du}\{[f]\cos u\} = -\frac{[f]}{K}\sin u - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\sin 2u - \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right]\cos^2 u,$$

$$\frac{1}{K}\frac{d}{du}\{[f]\sin u\} = \frac{[f]}{K}\cos u - \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\sin^2 u - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right]\sin 2u,$$

可将其化为如下形式：

---

1) 前面曾讲过，我们在引入新的时间比例尺时，曾取 $\dfrac{T}{2\pi}$ 为单位时间，其中 T 为系统的固有周期．因此，我们所采用的已经是无量纲时间，每一振动周期的长度以无量纲量 2π 表示．

$$\left.\begin{aligned}D(2\pi) &= \int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right]du - \frac{C(2\pi)}{K},\\ \dot{D}(2\pi) &= \int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]du - \frac{\dot{C}(2\pi)}{K},\\ E(2\pi) = -\frac{1}{K}\dot{C}(2\pi),&\quad \dot{E}(2\pi) = \frac{1}{K}C(2\pi).\end{aligned}\right\}\quad(9.68a)$$

特别是，当 $C(2\pi)=0$ 时，有：

$$\left.\begin{aligned}D(2\pi)=\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right]du,\ \dot{D}(2\pi)=\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]du-\frac{\dot{C}(2\pi)}{K},\\ E(2\pi)=-\frac{1}{K}\dot{C}(2\pi),\quad \dot{E}(2\pi)=0.\end{aligned}\right\}\quad(9.68b)$$

最后，若 $C(2\pi)=\dot{C}(2\pi)=0$，则

$$\left.\begin{aligned}D(2\pi)=\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right]du,\ \dot{D}(2\pi)=\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]du,\\ E(2\pi)=0,\qquad\qquad \dot{E}(2\pi)=0.\end{aligned}\right\}\quad(9.68c)$$

需要指出，在公式(9.86c)中，可以给 $D(2\pi)$ 和 $\dot{D}(2\pi)$ 这两个量以简单的解释：它们分别是函数$\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right]$和函数$\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]$的富氏级数展开式的常数项和 2π 的乘积．$-C(2\pi)$*和 $\dot{C}(2\pi)$ 这两个量则是函数 $f(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ 的富氏展开式中 $\sin t$ 和 $\cos t$ 项的系数和 2π 的乘积．若函数 $f(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ 为多项式，则这两个量可直接按三角公式进行计算（参看附录 III）．

下面我们来着手从方程(9.2)在 $\mu\neq 0$ 时的解(9.60)中寻求其周期解．设某一周期解的周期为 $2\pi+\tau$，其中 τ 为微小的周期校正量($\mu\to 0$ 时 $\tau\to 0$)．此时，若令 $y(2\pi+\tau)$ 和 $\dot{y}(2\pi+\tau)$ 分别等于 $y(0)=\varphi_0(0)+\beta_1$ 和 $\dot{y}(0)=\dot{\varphi}_0(0)+\beta_2$，则可得出确定此周期解的方程：

$$\left.\begin{aligned}y(2\pi+\tau)-y(0)\equiv\psi_1(\beta_1,\beta_2,\tau,\mu)=0,\\ \dot{y}(2\pi+\tau)-\dot{y}(0)\equiv\psi_2(\beta_1,\beta_2,\tau,\mu)=0,\end{aligned}\right\}\quad(9.69)$$

这乃是两个具有三个未知量 β_1, β_2 和 τ 的方程，而且 β_1 和 β_2 为所

---

* 原书为 $C(2\pi)$，少一负号——译者注．

研究问题的任意常数．我们所关心的是周期解，但只要求出某一个周期解，它们就将存在无限多个，彼此的差别仅仅是相位不同．因此，正象上面已经指出过的，根据问题的实质，β 中之一应该是完全任意的．例如，可令其中之一等于零，而不致破坏一般性．如果从方程(9.69)中解出 τ 和另一个 β 后，且使得 $\mu=0$ 时有 $\tau=\beta=0$，则问题就算解决了．如果这一点无法做到，则还有一个办法，这就是设另一个 β 等于零．下面我们将证实，在我们的问题中，设 $\beta_2=0$ 将导至正确的结果．假若我们从解 $\varphi_0=K\sin t$ 出发，即设派生解的 $\delta=-\frac{\pi}{2}$（而不是零），那么我们就不得不采用第二个办法，即设 $\beta_1=0$．

我们来列出方程组(9.69)，先采用一般形式，不设 $\beta_2=0$．为此首先必须列出 $y(2\pi+\tau)$ 和 $\dot{y}(2\pi+\tau)$ 的表示式．由于 τ 比 2π 小得很多，故可在 2π 的附近将 y 和 $\dot{y}$ 展开为级数．

若只限于一阶和二阶小量，则可得出：

$$y(2\pi+\tau)=y(2\pi)+\tau\dot{y}(2\pi)+\frac{\tau^2}{2}\ddot{y}(2\pi)+\cdots,$$

$$\dot{y}(2\pi+\tau)=\dot{y}(2\pi)+\tau\ddot{y}(2\pi)+\frac{\tau^2}{2}\dddot{y}(2\pi)+\cdots$$

利用级数(9.60)—(9.62)，在表示式 $y(2\pi)$，$\dot{y}(2\pi)$，$\ddot{y}(2\pi)$ 等中，函数 A，B，C，等代之以它们在 $t=2\pi$ 时的数值，即 $A(2\pi)$，$B(2\pi)$ 等，即可求出 $y(2\pi)$，$\dot{y}(2\pi)$，$\ddot{y}(2\pi)$，等的数值．

弃去二阶小量以上的各项（应考虑到 τ 的量级不低于 μ）则得：

$$\begin{aligned}y(2\pi+\tau)=&\varphi_0(2\pi)+A(2\pi)\beta_1+B(2\pi)\beta_2\\&+C(2\pi)\mu+D(2\pi)\beta_1\mu+E(2\pi)\beta_2\mu\\&+F(2\pi)\mu^2+\tau\dot{\varphi}_0(2\pi)+\tau\dot{A}(2\pi)\beta_1\\&+\tau\dot{B}(2\pi)\beta_2+\tau\dot{C}(2\pi)\mu+\frac{\tau^2}{2}\ddot{\varphi}(2\pi)+\cdots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{y}(2\pi+\tau)=&\dot{\varphi}(2\pi)+\dot{A}(2\pi)\beta_1+\dot{B}(2\pi)\beta_2\\&+\dot{C}(2\pi)\mu+\dot{D}(2\pi)\beta\mu+\dot{E}(2\pi)\beta_2\mu\end{aligned}$$

$$+\dot{F}(2\pi)\mu^2+\tau\ddot{\varphi}_0(2\pi)+\tau\ddot{A}(2\pi)\beta_1+$$
$$+\tau\ddot{B}(2\pi)\beta_2+\tau\ddot{C}(2\pi)\mu+\frac{\tau^2}{2}\dddot{\varphi}(2\pi)+\cdots$$

将 φ_0, A 和 B 及其导数的数值代入上列表示式并列出方程组(9.69)，则得：

$$\left.\begin{aligned} y(2\pi+\tau)-y(0)&=-K\frac{\tau^2}{2}+\tau\beta_2+C(2\pi)\mu+\dot{C}(2\pi)\tau\mu \\ &\quad+D(2\pi)\beta_1\mu+E(2\pi)\beta_2\mu+F(2\pi)\mu^2=0, \\ \dot{y}(2\pi+\tau)-\dot{y}(0)&=-K\tau-\tau\beta_1+\dot{C}(2\pi)\mu+\ddot{C}(2\pi)\tau\mu \\ &\quad+\dot{D}(2\pi)\beta_1\mu+\dot{E}(2\pi)\beta_2\mu+\dot{F}(2\pi)\mu^2=0. \end{aligned}\right\} \quad (9.70)$$

由这两个方程，可用 μ 的函数形式求出周期校正量 τ 和两个 β 中的一个(在所研究情况中为 β_1)，如果另一 β 给以确定的数值（例如，零）．将此二量的幂级数展开式[1)]

$$\left.\begin{aligned} \tau&=\mu\tau_1+\mu^2\tau_2+\cdots, \\ \beta_1&=\mu\beta_{11}+\cdots \end{aligned}\right\} \quad (9.71)$$

代入方程组(9.70)，并令量级为 μ 的项之和等于零：

$$C(2\pi)=0,\quad -K\tau_1+\dot{C}(2\pi)=0.$$

其中第一方程

$$C(2\pi)=-\int_0^{2\pi} f(K\cos u,-K\sin u)\sin u\,du=0, \quad (9.72)$$

或根据(9.12)

$$\Phi(K)=0,$$

确定 μ 取小值时在其附近存在有极限环的那些圆的半径 K_i. 第二方程确定第一阶近似的周期校正量：

$$\tau_1=\frac{\dot{C}(2\pi)}{K_i}=\frac{1}{K_i}\int_0^{2\pi} f(K\cos u,-K\sin u)\cos u\,du, \quad (9.73)$$

或根据(9.12)

$$\tau_1=-2\pi\Psi(K_i).$$

需要指出，令 $C(2\pi)$ 等于零，等价于在函数 $f(K\cos t,-K\sin t)$ 的展开式中，令 $\sin t$ 项的富氏系数等于零.

---

1) 在 τ 和 β_1 展开为 μ 的幂级数中，必不存在自由项，因为 $\mu\to0$ 时 $\tau\to0$ 和 $\beta_1\to0$. 如果给定 $\beta_1\neq0$，则它必然是量级为 μ 的量.

令方程组(9.70)中量级为 μ^2 的项之和等于零[1]：

$$\left.\begin{aligned} K\frac{\tau_1^2}{2}+D(2\pi)\beta_{11}+F(2\pi)=0,\\ -K\tau_2+\dot{C}(2\pi)\tau_1+[\dot{D}(2\pi)-\tau_1]\beta_{11}+\dot{F}(2\pi)=0, \end{aligned}\right\}\quad(9.74)$$

只要 $D(2\pi)\neq 0$，此方程即可确定 β_{11} 和第二次近似的周期校正量。

下面我们详细研究一种极有实际意义的情况：

$$\dot{C}(2\pi)=0,$$

此时 $\tau_1=0$，周期校正量 τ 一般来说是量级为 μ^2 的量。在这一特例中，方程组(9.74)可写成如下形式：

$$D(2\pi)\beta_{11}+F(2\pi)=0,$$
$$-K\tau_2+\dot{D}(2\pi)\beta_{11}+F(2\pi)=0,$$

从中可得出(当 $D(2\pi)\neq 0$ 时)：

$$\left.\begin{aligned} \beta_{11}&=-\frac{F(2\pi)}{D(2\pi)},\\ \tau_2&=\frac{D(2\pi)\dot{F}(2\pi)-\dot{D}(2\pi)F(2\pi)}{D(2\pi)K}. \end{aligned}\right\}\quad(9.75)$$

若将得出的函数 $A(t)$，$B(t)$，$C(t)$ 及 $\beta_1=\beta_{11}\mu+\cdots$ 代入 y 的表示式(9.60)，并重新返回到任意时间起点(为此可将 t 以 $t+\delta$ 代之)，则可将方程(9.2)的解写成如下形式(准确到 μ 级量)：

$$\left.\begin{aligned} y=K\cos(t+\delta)+\mu\Bigg\{\int_0^{t+\delta} f[\varphi_0(u),\dot{\varphi}_0(u)]\\ \times\sin(t+\delta-u)\,du-\frac{F(2\pi)}{D(2\pi)}\cos(t+\delta)\Bigg\}+O(\mu^2), \end{aligned}\right\}\quad(9.76)$$

其中 K 为方程(9.72)的根。

关于解(9.60)的近似表示式(9.76)，有一点需要指出。第一次近似(9.76)和零次近似(9.59)一样，具有周期 2π，但解(9.59)的周期却应当与 2π 稍有差别(并等于 $2\pi+\mu^2\tau_2+\cdots$)。后者是因为，

---

1) 不难看出，由于 β_2 的系数

$$\tau_1+E(2\pi)=0 \text{ 和 } \dot{E}(2\pi)=0$$

(因为 K 为方程(9.72)的根)，故这两个方程中并不含有 β_2。

表示式(9.60)是这样一种富氏级数的按μ之幂次的展开式，不仅它的“振幅”而且周期也与μ有关。

确实如此，我们研究富氏级数

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} [A_k(\mu) \cos k\omega(\mu)t + B_k \sin k\omega(\mu)t],$$

并将其展开为μ的幂级数；其展开式有如下形式：

$$\begin{aligned} y = & \sum_{k=0}^{\infty} [A_k(0) \cos k\omega(0)t + B_k(0) \sin k\omega(0)t] \\ & + \mu \sum_{k=0}^{\infty} [A'_k(0) \cos k\omega(0)t + B'_k(0) \sin k\omega(0)t \\ & - A_k(0)\omega'(0)kt \sin k\omega(0)t + B_k(0)\omega'(0) \\ & \times kt \cos k\omega(0)t] + \mu^2 \sum \cdots \end{aligned}$$

虽然其中三角函数的周期均为$\frac{2\pi}{\omega(0)}$，但y却是周期不等于$\frac{2\pi}{\omega(0)}$的周期函数，如果$\mu \neq 0$。周期的这种改变之所以出现，是由于展开式中存在有久期项，即不是以三角函数形式含有t的项。在解(9.76)中也是如此，从下一次近似就开始出现久期项，后者不破坏函数y的周期性，仅使其周期稍有改变[1]。也可以写出周期解而不包含久期项，如果直接写出具有正确周期的三角函数，为此必须在所有三角函数的自变量中加上频率校正量。由于它的值很小，可以假定它等于周期校正量除以2π，并改变符号。这样做以后，方程的解形式如下：

$$y = K \cos\left[\left(1 - \frac{\tau_2 \mu^2}{2\pi} + \cdots\right)t + \sigma\right]$$

$$+ \mu \left\{ \int_0^{\left(1 - \frac{\tau_2\mu^2}{2\pi} + \cdots\right)t + \delta} f(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) \sin\left[\left(1 - \frac{\tau_2\mu^2}{2\pi} + \cdots\right)t\right.\right.$$

---

1) 需要提醒一下，我们所研究的是$\dot{c}(2\pi) = 0$，的情况，这时$C(t)$是周期为2π的周期函数。

如果$\dot{c}(2\pi) \neq 0$，则尽管满足条件$C(2\pi) = 0$，函数$C(t)$也将不再是周期函数，在y的第一次近似中(在$\mu C(t)$项中)已经将出现久期项了，后者不致破坏函数$y(t)$的周期性，但使其周期改变一量级为μ的量。

$$+\delta-u\Big]du-\frac{F(2\pi)}{D(2\pi)}\cos\left[\left(1-\frac{r_2\mu^2}{2\pi}+\cdots\right)t+\delta\right]\Big\}+\cdots \quad (9.77)$$

最后，我们指出，根据一般理论（参看第五章§8），所研究之周期解 $y(t)$ 的稳定条件为：

$$\int_0^{2\pi} f'_{\dot y}[y(t),\dot y(t)]dt<0.$$

若只考虑 $y(t)$ 按 μ 之展开式中的第一项，则为：

$$2\pi\Phi'(K_i)=\int_0^{2\pi} f'_{\dot y}[\varphi_0(t),\ \dot\varphi_0(t)]dt<0. \qquad (9.78)$$

对后一不等式右端的表示式，可以给以简单的解释：它正是函数

$$f'_{\dot y}(K_i\cos t,\ -K_i\sin t)$$

的富氏级数展开式中的自由项（乘以 2π），且其中 K_i 为方程(9.72)的相应根。

§6. 庞卡莱法的应用

1. 有软状态的电子管振荡器. 为了举例说明庞卡莱法，我们研究描述普通软激电子管振荡器（图465）的方程．前面已经证实过，对于这种情况，可以只限于研究电子管的三次特性(9.37)．为了多样化起见，在这里我们将不假定振动回路的衰减系数 ω_0RC 很小$\left(\text{与以前一样，}\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$．这样一来，振荡器的振动方程将为：

$$\ddot x+x=\{\omega_0(MS_0-RC)+2\omega_0MS_1u_0x-3\omega_0MS_2u_0^2x^2\}\dot x,$$

其中 $x=\frac{u}{u_0}$（u_0 为某一电压比例尺），字母上方标出的点表示对无量纲时间 $t_{新}=\omega_0t_{旧}$ 的微分．此方程接近于谐振子方程时所必须满足的条件是：

$\omega_0|MS_0-RC|\ll1,\ 2\omega_0M|S_1|u_0\ll1$ 和 $3\omega_0MS_2u_0^2\ll1$，即在振荡器自激边界附近，且电子管特性的非线性必须很小．

记

$$\omega_0(MS_0 - RC) = \mu\alpha', \quad 2\omega_0 MS_1 u_0 = \mu\beta'$$

和

$$3\omega_0 MS_2 u_0^2 = \mu\gamma', \tag{9.79}$$

其中μ为小参数($0 < \mu \ll 1$), α', β'和γ'是量级为1的量. 可将振荡器振动方程化为如下形式:

$$\ddot{x} + x = \mu(\alpha' + \beta' x - \gamma' x^2)\dot{x}. \tag{9.80}$$

此方程的类型恰好就是我们建立庞卡莱法时所采用的. 因此, 我们以后就可以按照已有的方式去进行分析. 方程(9.80)的周期解的零次近似形式如下:

$$\varphi_0(t) = K\cos t, \quad \dot{\varphi}_0(t) = -K\sin t, \tag{9.81}$$

其中K决定于方程

$$C(2\pi) = -\int_0^{2\pi} (\alpha' + \beta' K\cos u$$

$$-\gamma' K^2\cos^2 u)(-K\sin u)\sin u du = \pi K\left(\alpha' - \frac{\gamma'}{4}K^2\right) = 0,$$

即

$$K^2 = 4\frac{\alpha'}{\gamma'}. \tag{9.81a}$$

很容易证实 $\dot{C}(2\pi) = 0$,即零次近似中没有自振周期校正量. 其次,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (\beta' - 2\gamma' x)\dot{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \alpha' + \beta' x - \gamma' x^2,$$

因此

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = (\beta' - 2\gamma' K\cos u)(-K\sin u),$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right] = \alpha' + \beta' K\cos u - \gamma' K^2\cos^2 u.$$

将上述二式在0到2π上进行积分,则有(参看(9.68c)):

$$D(2\pi) = 2\pi\left(\alpha' - \frac{\gamma'}{2}K^2\right) = -2\pi\alpha', \quad \dot{D}(2\pi) = 0,$$

因此,周期校正量(参看(9.75))为:

$$\tau = \mu^2\tau_2 = \frac{\dot{F}(2\pi)}{K}.$$

为了寻求周期校正量，并以 μ 阶项的准确度写出周期解，必须计算出函数 $C(t)$ 以及表示式 $F(2\pi)$ 和 $\dot{F}(2\pi)$. 计算后可得：

$$C(t) = \int_0^t (\alpha' + \beta' K \cos u - \gamma' K^2 \cos^2 u)(-K \sin u) \sin(t-u) du =$$

$$= \frac{\beta' K^2}{6} (2\sin t - \sin 2t) + \frac{\gamma' K^3}{32} (3 \sin t - \sin 3t),$$

$$\dot{F}(2\pi) = \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] C(u) + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right] \dot{C}(u) \right\} \cos u du$$

$$= \frac{\pi}{12} \beta'^2 K^3 + \frac{\pi}{128} \gamma'^2 K^5 = \pi \alpha' K \left(\frac{\beta'^2}{3\gamma'} + \frac{\alpha'}{8} \right),$$

$$F(2\pi) = -\int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] C(u) + \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right] \dot{C}(u) \right\} \sin u du = 0,$$

后一等式是因为被积函数为奇周期函数（周期为 2π）的原因得出的。

这样一来，周期校正量将为：

$$\tau = \mu^2 \pi \alpha' \left(\frac{\beta'^2}{3\gamma'} + \frac{\alpha'}{8} \right)^{1)}, \tag{9.82}$$

而(9.76)形式的周期解，即不含久期项且准确到 μ^2 阶项的解，则可写成[2]：

$$x(t) = 2\sqrt{\frac{\alpha'}{\gamma'}} \cos\left[\left(1 - \frac{\tau}{2\pi}\right)t + \delta\right]$$

$$+ \mu \left\{ \left(-\frac{4\alpha'\beta'}{3\gamma'} + \frac{3\alpha'}{4}\sqrt{\frac{\alpha'}{\gamma'}} \right) \sin\left[\left(1 - \frac{\tau}{2\pi}\right)t + \delta\right] \right.$$

$$\left. + \frac{2\alpha'\beta'}{3\gamma'} \sin 2\left[\left(1 - \frac{\tau}{2\pi}\right)t + \delta\right] - \frac{\alpha'}{4}\sqrt{\frac{\alpha'}{\gamma'}} \sin 3\left[\left(1 - \frac{\tau}{2\pi}\right)t + \delta\right] \right\}$$

$$+ O(\mu^2). \tag{9.82a}$$

在大多数实际情况中，主要使我们感兴趣的只是振幅表示式

---

1) 作为特例，对于 $\beta = 0$ 的对称三次特性来说，周期校正量为

$$\tau = \frac{\pi \mu^2 \alpha'^2}{8} = \frac{\pi}{8} [\omega_0(MS_0 - RC)]^2.$$

2) 我们看到，当我们仅限于考虑零次近似时，特性的偶次项不起作用，但却包含在周期校正量以及周期解 $x(t)$ 的第一次近似(9.82a)中。

(9.81a). 我们计算了第二次近似，其目的一方面在于指出如何进行计算，另一方面则是为了着重指出，解中原则上必含有高次谐波，但作线性研究时总将其忽略不计.

现在我们来探讨所得周期解是否稳定的问题. 为了使运动稳定，必须有方程(9.80)右端的 $\dot{x}$ 的系数这一函数，当代入正弦解后，展开为富氏级数时，所得之常数项小于零，亦即，必须使 $\alpha' - \frac{3\gamma' K^2}{2} < 0$ 或 $K^2 > \frac{2\alpha'}{3\gamma'}$. 但是正如我们已经求出过的，零次近似振幅的平方 $K^2 = \frac{4\alpha'}{3\gamma'}$. 因而，稳定条件永远满足(因为 $\alpha' > 0$, $\gamma' > 0$)，也就是说所得周期解永远是稳定的.

2. 小参数 μ 的值. 任何一个动力学系统的方程，都含有一系列有一定物理意义的参数（例如：L, R, C, S 等等）. 通常认为合适的处理方法是引入新的所谓“无量纲”参数，即有“量纲”物理参数的某种一定的组合，来代替这些参数(同样也常常引入无量纲变量). 为了简化数学研究，总是希望将这些无量纲参数的数目降低至最少个（独立参数）. 如果这些参数中有一个可以这样来选择，使其值等于零时系统化为线性谐振子，那么这一参数从数学观点来看就是小参数 μ，在庞卡莱理论中用它来进行级数展开，而在建立范德波尔法的基础时则必须以它的微小程度作为依据.

庞卡莱证明了，表示周期解的级数在他的理论中具有异于零的收敛半径 μ_0，从而对所有 $\mu \leq \mu_0$，这些级数都是绝对一致收敛的. 这说明对于所有的 $\mu \leq \mu_0$，都存在以相应级数之和表示的周期解[1].

但此收敛性对于解的性质，例如与正弦解的接近程度问题，还不能给以任何说明；根据庞卡莱理论，我们只能肯定，在这种情况

---

1) 应当指出，由 $\mu > \mu_0$ 时按 μ 展开的级数的发散性，一般来说，还不能给出 $\mu > \mu_0$ 时不存在周期解的结论.

下，我们总是能够选出任意小的 μ，使得方程的解任意地接近于正弦解。

通常在研究物理问题时，我们采用零次近似（$x = K\cos t$，$\Phi(K) = 0$）；有时除零次近似外，我们还关心所谓频率的第一校正量（与 μ 或 μ^2 成正比）以及周期解展开式中第二项（与 μ 成正比）的表示式。因此，我们首先关心的将是下面这样一些问题，即：零次近似振幅与准确解之主谐波的振幅相差多少（μ 给定），频率的第一校正量与真实频率校正量相差多少，真实非正弦度（例如，由非线性失真系数定义的）与一次近似所具有的非正弦度相差多少等等。如果从问题的物理本质出发，给出容许误差（例如以百分率表示），那么这就将使我们有可能从理论上根据零次近似、一次近似、……的物理适用程度，确定出 μ 的上界。另一方面，由于 μ 是物理参数的一定的组合，故而在实际系统中，μ 具有完全确定的数值，因此要想使问题不失去其物理意义，我们就不能随意地假设它是任意的小量。例如，若根据所研究问题的物理意义，有 $\mu \leqslant \mu_1$，则必出现两个问题：第一，μ_1 的数值是否能保证庞卡莱级数收敛，第二，μ_1 的数值是否能保证零次或一次近似能给出需要的准确度。第一个问题的答案如果是否定的，我们就不能应用庞卡莱法；如果第二问题的答案是否定的，而第一问题的答案是肯定的，就必需采用更高次的近似。就目前理论发展状况看来，回答这些问题是有困难的，因此理论研究所面临的一项任务，就在于建立足够有效的方法来回答这些问题[1]。

1）可以按照庞卡莱的方法对 μ_0 进行粗的估值，但这种估值往往过于粗略，以致没有什么实际意义。

物理学家有时用下面所述的不严格的方法对零次近似的准确度进行粗的估值：用对应于问题之物理条件的参数值和我们所关心的零次近似振幅值 K_i，计算出表示式 $\frac{\mu_{极大}|f(K_i\cos u, -K_i\sin u)|}{K_i}$ 的数值*。如果此数值，举例来说，等于1/10，则可认为零次近似振幅将以10%的准确度给出主谐波的振幅，如此等等。很容易看出，这种估值对于很多情况是没有实际意义的。类似的方法可以参看 A. H. 克雷洛夫（Крылов）的著作[77]，第44页。

* 原书为 $\mu_{极大}\{f(K_i\cos u, -K_i\sin u)\}/K_i$——译者注。

§ 7. 有折线型特性的电子管振荡器

在研究电子管振荡器时，我们曾以多项式表示电子管的特性。除多项式外，有时最好将特性用其他解析式来表示。研究这种更一般类型的特性之所以使我们感到兴趣，是因为它至少能检验出，得到的自振系统的性质中，哪些是多项式所特有的，哪些是问题之本质所决定的。

其次，在推理过程中，我们曾假设 $f(x, \dot{x})$ 为 x 和 $\dot{x}$ 的解析函数。但有时采用所谓折型线特性（例如，干摩擦特性，振荡器的⎦特性等等）往往更为有利，而后者显然并非解析函数。在这种情况下，最好采用如下方法：将非解析函数看作是某一解析函数的极限；计算出所有需要的积分（确定振幅、稳定性等等的积分），并在计算前先取极限（这往往能够简化运算）。所得结果不应理解为折线型特性的性质（一般来讲，这是错误的），而应理解为与其相近的解析特性的性质。

1. 有⎦特性的电子管振荡器. 作为第一个例子，我们来研究屏极电路中含有振荡回路的电子管振荡器中的自振，并将电子管的特性以⎦特性来逼近（可参看上册第三章 §3）。若引入无量纲变量

$$x = \frac{i}{i_0} \text{ 和 } t_{新} = \omega_0 t_{旧}$$

$\left(i_0\text{为某一电流的比例尺，}\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$，则此种振荡器的振动方程 (3.15) 将有如下形式：

$$\ddot{x} + x = -\omega_0 RC\dot{x} + \begin{cases} \frac{I_s}{i_0} & \text{当 } \dot{x} > 0 \text{ 时，} \\ 0 & \text{当 } \dot{x} < 0 \text{ 时。} \end{cases}$$

它接近于谐振子方程的条件是：

$$\omega_0 RC \ll 1 \text{ 和 } \frac{I_s}{i_0} \ll 1,$$

即振荡回路的衰减系数及电子管特性的饱和电流都必须很小（下面我们将假定这些条件是满足的）．若引入 $\mu=\omega_0 RC\ll 1$ 和 $\beta=\dfrac{I_s}{\omega_0 RC i_0}$ ——量级为 1 的量，则振动方程可化为如下形式：

$$\ddot{x}+x=\mu[-\dot{x}+\beta\cdot 1(\dot{x})]^{1)}, \tag{9.83}$$

此方程适合使用小参数法（例如，范德波尔法）．

由于

$$\begin{aligned}\Phi(K)&=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[+K\sin u+\beta\cdot 1(-K\sin u)]\sin u\,du\\&=-\frac{K}{2}-\frac{\beta^*}{2\pi}\int_\pi^{2\pi}\sin u\,du=-\frac{K}{2}+\frac{\beta}{\pi},\end{aligned}$$

而

$$\Psi(K)=-\frac{1}{2\pi K}\int_0^{2\pi}[K\sin u+\beta\cdot 1(-K\sin u)]\cos u\,du\equiv 0$$

故零次近似中自振的振幅

$$K=\frac{2\beta}{\pi}=\frac{2}{\pi}\,\frac{\dfrac{I_s}{i_0}}{\omega_0 RC}, \tag{9.84}$$

自振周期则等于 2π[2]．这些自振是稳定的，因为

$$\Phi'(K)=-\frac{1}{2}<0.$$

2. 具有无饱和之折线型特性的电子管振荡器． 现在我们再采用小参数法来研究一种电子管振荡器的自振，其电子管的特性没有饱和，并由两条直线线段构成：一为水平线，一为斜线（图482），即其互导为：

1）与以前一样

$$1(z)=\begin{cases}1 & z>0\ \text{时},\\ 0 & z<0\ \text{时}.\end{cases}$$

* 原书为“β?”——译者注．

2）若采用普通单位，则周期等于 $2\pi\sqrt{LC}$，而振荡回路中电流的振幅则等于

$$I=i_0K=\frac{2}{\pi}\frac{I_s}{\omega_0 RC}$$

与上册第三章§3中所得结果完全吻合（对于 $\mu=\omega_0 RC\ll 1$ 的情况）．

$$S(u_g)=\begin{cases}S & u_g>u_{g0}\text{ 时},\\0 & u_g<u_{g0}\text{ 时}.\end{cases}$$

(u_{g0} 为电子管的截流电压). 在第八章 §2 中我们已经看到, 由于特性曲线在一个方向上被限定, 在一定条件下可能发生稳定的自振.

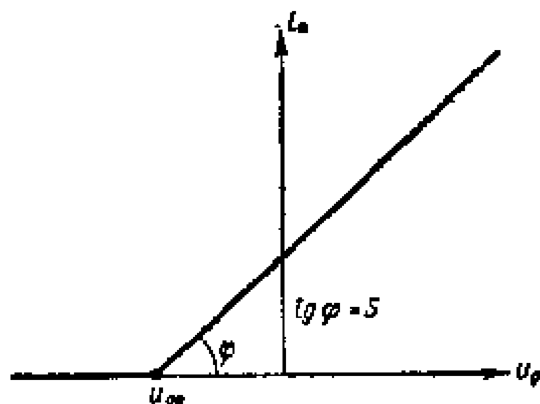


图 482

电子管振荡器(例如,栅极中含有振荡回路(图 465, a)), 如其电子管具有此种分段线性特性, 则只有在振荡回路的衰减系数很小和反馈很弱时,才能接近于谐振子. 电容器电压方程("无量纲"方程)将有如下形式(参看本章 §1):

$$\ddot{x}+x=\mu[-1+\alpha s(x)]\dot{x}, \tag{9.3}$$

其中

$$x=\frac{u}{u_0}=\frac{u_g-E_g}{u_0}\quad(u_0\text{ 为电压的某种比例尺}),$$

$$\mu=\omega_0RC\quad(0<\mu\ll 1),$$

$$\alpha=\frac{MS}{RC}\quad(\alpha\text{ 与 }1\text{ 同阶的量}),$$

$$S(x)=\frac{S(E_g+u_0x)}{S}=1(x-b)=\begin{cases}1 & x>b\text{ 时},\\0 & x<b\text{ 时},\end{cases}$$

$b=\dfrac{U_{g0}-E_g}{u_0}$——电子管的折算截流电压, 式中之微分都是对无量纲时间 $t'=\omega_0t\left(\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}\right)$所取的.

显然,当 $b>0$, 即 $E_g<u_{g0}$ 时,无自激,而当 $b<0$ ($E_g>u_{g0}$) 时,则$\begin{cases}\text{无自激,若 }\alpha<1;\\\text{有自激,若 }\alpha>1.\end{cases}$

周期解(零次近似)可取作:

$$x = \varphi_0(t) = K\cos t.$$

我们将设K是正量；由于相位是任意的，因此这并不破坏一般性。自振振幅K由条件 $C(2\pi) = 0$ 或

$$C(2\pi) = K\int_0^{2\pi} [-1 + \alpha \cdot 1(K\cos u - b)]\sin^2 u du =$$

$$= K[-\pi + 2\alpha\int_0^{\xi} \sin^2 u du] = 0, \tag{9.85}$$

确定，其中ξ为满足 $K\cos u - b = 0$ 的u值，即

$$\xi = \arccos\frac{b}{K}(0 < \xi < \pi)^{1)}$$

自振振幅K不显含于方程(9.85)内，但其数值不是任意的，而决定于关系式

$$K = \frac{b}{\cos\xi}, \tag{9.85a}$$

其中ξ本身决定于方程(9.85)。后者经积分后具有如下形式：

$$-2\pi + \alpha(2\xi - \sin 2\xi) = 0 \tag{9.85b}$$

或

$$\alpha = \frac{2\pi}{2\xi - \sin 2\xi}. \tag{9.85c}$$

关系式(9.85a)和(9.85c)以参数形式给出振幅K与参数α的依赖关系（通过辅助参数 ξ：$b > 0$ 时 $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$，$b<0$ 时$\frac{\pi}{2}<\xi<\pi$）。

由于表示式(9.85c)的分母为ξ的单调增函数[2]，而且 $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$时有 $0 < 2\xi - \sin 2\xi < \pi$，和 $\frac{\pi}{2} < \xi < \pi$ 时 有 $\pi < 2\xi - \sin 2\xi < 2\pi$，因此根据(9.85c)，若 $b > 0$ $\left(即\ 0 < \xi < \frac{\pi}{2}\right)$ 有 $\alpha > 2$，若 $b < 0$，即$\frac{\pi}{2} < \xi < \pi$，则有 $1 < \alpha < 2$。这样一来，

---

1) 只有当 $-\xi<u<\xi$ 时，才有 $K\cos u - b>0$ 和 $1(K\cos u - b) = 1$；ξ只存在于 $K\geqslant|b|$时。由于K为正值，因此 $b>0$ 时 $0<\xi<\frac{\pi}{2}$，$b<0$ 时 $\frac{\pi}{2}<\xi<\pi$。

2) 的确，$\frac{d}{d\xi}(2\xi - \sin 2\xi) = 2(1 - \cos 2\xi)\geqslant 0$。

参数 α 的每一个数值：

$$\left.\begin{aligned} \alpha > 2 \quad 若\ b > 0, \\ 1 < \alpha < 2 \quad 若\ b < 0 \end{aligned}\right\} \tag{9.86}$$

单值地确定 ξ（借助于方程(9.85b)），从而确定自振振幅 K. 若不等式(9.86)不成立，则方程(9.85b)无解，原始方程(9.3)无周期解. 这说明，只有条件(9.86)满足时，才存在极限环，而且是唯一的.

下面我们转入研究所得周期解的稳定性. 我们知道，稳定的条件在于使函数

$$f'_x(K\cos t, -K\sin t) = -1 + \alpha \cdot 1(K\cos t - b)$$

的富氏展开式中的常数项小于零，即使

$$-2\pi + 2\alpha\int_0^\xi dt < 0,$$

或利用(9.85b)：

$$2\pi\xi - 2\pi = \sin 2\xi < 0. \tag{9.87}$$

此条件当 $\frac{\pi}{2} < \xi < \pi$，即 $b<0$ 时满足，而当 $b>0$，即 $0<\xi<\frac{\pi}{2}$ 时则不满足.

这样一来，当 $b < 0$，即 $E_g > u_{g0}$ 时，由于参数 $\alpha = \frac{MS}{RC}$ 所

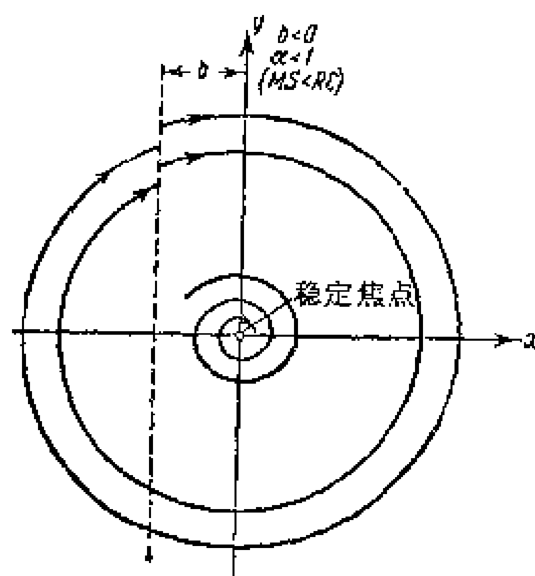


图 483

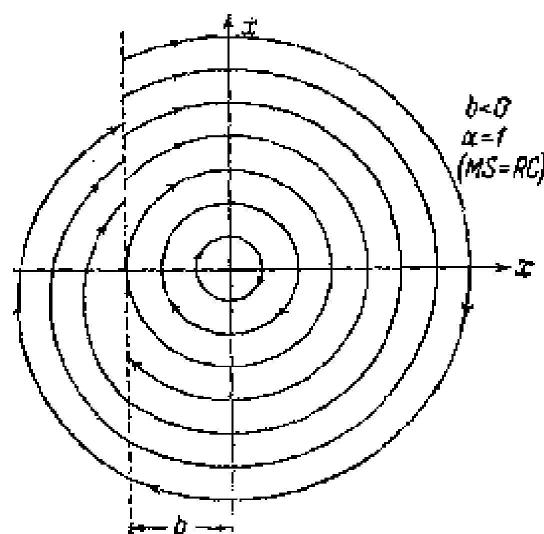


图 484

取数值的不同，我们将得出四种*不同形式的相平面的相轨线划分(图 483—486)：若 $\alpha < 1$，所有相轨线当 $t \to +\infty$ 时，都趋向稳定平衡状态(图 483)；若 $1 < \alpha < 2$，则存在稳定极限环，所有相轨线当 $t \to +\infty$ 时向它趋近(图 485)；当 $\alpha \to 2$ 时，此极限环之半径 $K \to +\infty$（即极限环当 $\alpha = 2$ 时走到无限远)，若 $\alpha > 2$，

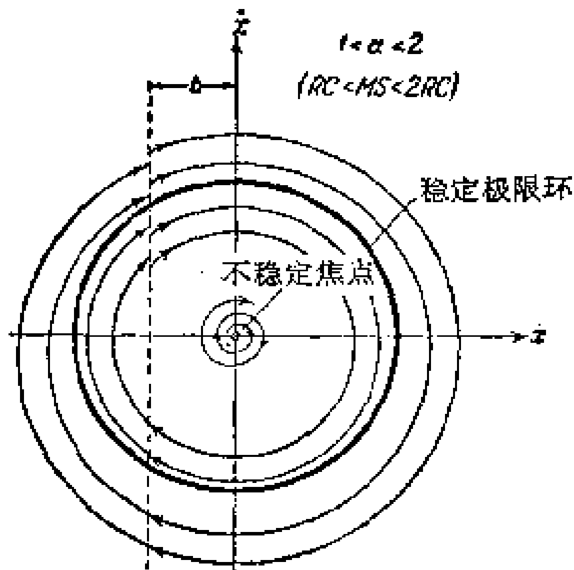


图 485

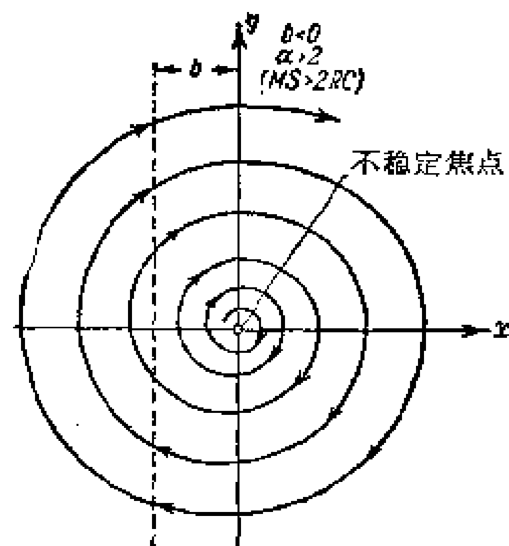


图 486

则所有相轨线都趋向无限远(图 486)．K的最小值等于$|b|$，并对应于 $\xi = \pi$（即 $\alpha = 1$)．因此，当 α 通过数值 $\alpha = 1$ 时，立刻出现有限大小的极限环．在极限环出现的瞬时(即 $\alpha = 1$ 或 $MS = RC$ 时)可能发生任意振幅 $K < |b|$ 的周期振动，亦即，在这种情况下，振荡器具有中心型平衡状态(图 484)．

当 $b > 0(E_g < u_{g0})$ 时平衡状态永远稳定（稳定焦点)．若 $\alpha < 2$，则所有相轨线均向此平衡状态趋近(图 487)．若 $\alpha > 2$，则存在不稳定极限环(α 越大，其半径就越小)，在其外部所有相轨线均走向无限远(图 488)[1]．

相轨线当 $\alpha > 2(MS > 2RC)$ 时走向无限远，这显然说明了

---

* 原书为“三种”——译者注．

1) 不难确信，所有得到的结果都与第八章 §2 中之 h_1，$h_2 \ll 1$ 的情况，即振荡器自振接近正弦之情况，所得的结果相吻合．

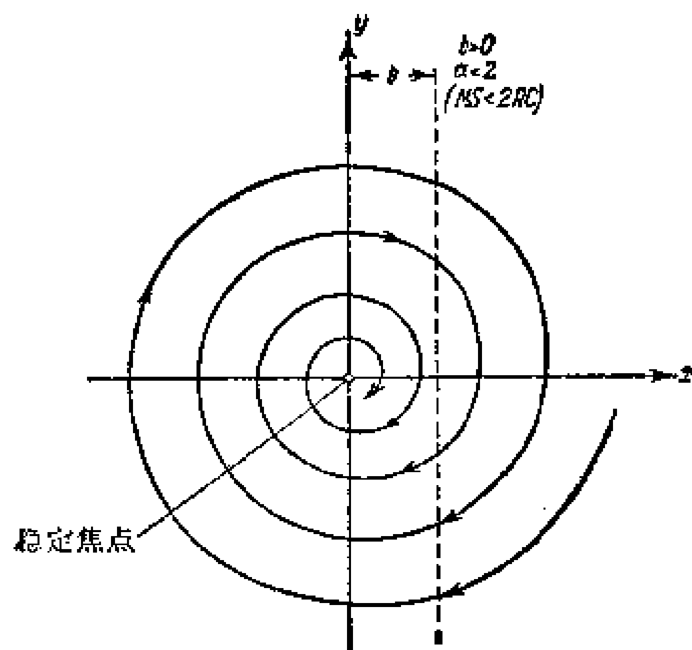


图 487

我们采用的这种理想电子管特性是不完善的（我们忽略了栅流和屏极反应，而当反馈足够大时，在电子管栅极上将得出大的正电压，从而使栅流和屏极反应起到显著的作用）。

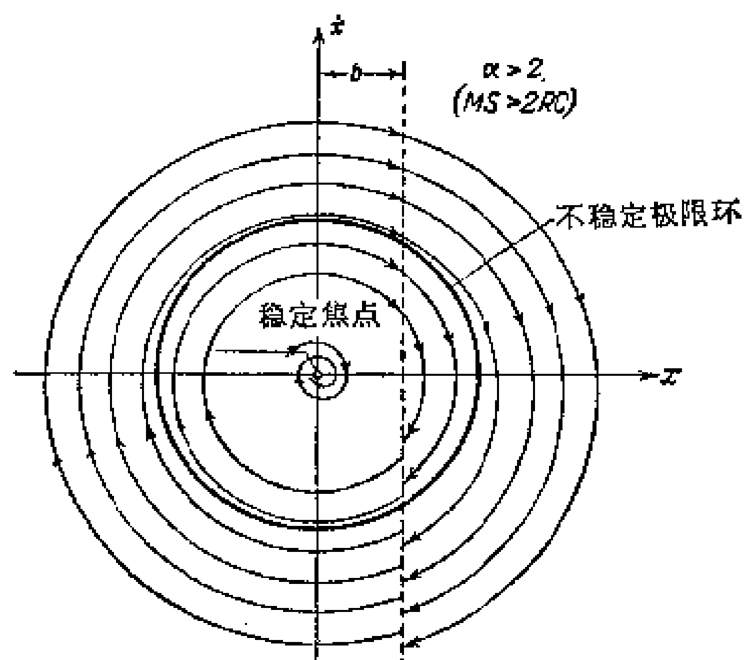


图 488

§8. 栅流对电子管振荡器工作的影响

在研究各种不同的电子管线路时，我们都曾假设电子管栅极电路中没有电流．这种假设可使问题得到显著简化，与此同时，常常可以认为它以足够的准确度为实验所证实．但在另外一些同样具有实际意义的情况中，振荡器工作时，其栅极电路中通过相当大的电流．因此，研究栅流对电子管振荡器工作有何影响，将是很有意义的．但一般来说，考虑栅流将使问题显著复杂化，亦即，使描述给定电子管线路的微分方程的阶次提高．因此，如果将我们的任务只限于研究以一个二阶微分方程所描述的线路，我们就不可能以一般形式提出考虑栅流的问题(例如，在栅极电路中采用自动偏压的振荡器中)．但在某些特例中，却可以研究栅流，而不提高描述系统的方程的阶次．例如，在栅极电路中含有振荡回路的电子管振荡器中(图 489)，考虑栅流的影响就是可能的．

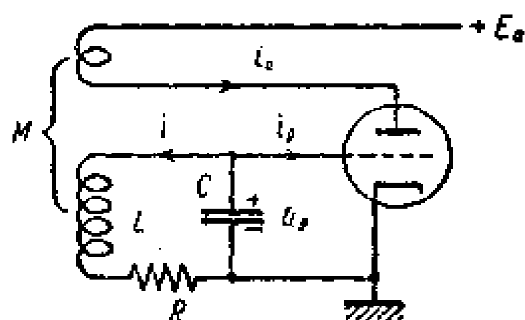


图 489

研究时我们将忽略屏极反应，并对屏流及栅流特性曲线的形状作最简单的假设．我们将假定，无论屏流或栅流，都能用栅压 u_g 的三次多项式的形式来给定．

采用图 489 所示之符号，由克希荷夫定律，可得：

$$C\frac{du_g}{dt}+i+i_g=0,\quad L\frac{di}{dt}+Ri=u_g-M\frac{di_a}{dt},$$

从中消去振荡回路中的电流 i，则有：

$$LC\frac{d^2u_g}{dt^2}+RC\frac{du_g}{dt}-M\frac{di_a}{dt}+L\frac{di_g}{dt}+u_g+Ri_g=0 \quad (9.88)$$

显然，振荡器具有唯一的平衡状态 $u_g=u_g^0$，它可由方程

$$u_g^0 + Ri_g(u_g^0) = 0$$

确定(此方程之图解表示在图 490 上).

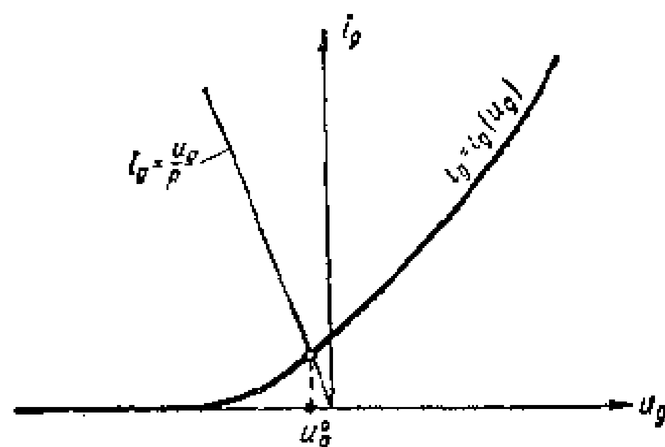


图 490

引入栅压的交变分量

$$u = u_g - u_g^0.$$

若令

$$\left.\begin{aligned} i_a &= i_{a0} + S_1 u + S_2 u^2 - S_3 u^3, \\ i_g &= i_{g0} + p_1 u + p_2 u^2 + p_3 u^3; \end{aligned}\right\} \tag{9.89}$$

则振荡器之振动方程可写成如下形式:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \left[\frac{R}{L} - \frac{MS_1}{LC} + \frac{p_1}{C}\right]\frac{du}{dt} + \frac{1 + Rp_1}{LC}u$$
$$-\left[\frac{MS_2}{LC} - \frac{p_2}{C}\right]\frac{d(u^2)}{dt} + \left[\frac{MS_3}{LC} + \frac{p_3}{C}\right]\frac{d(u^3)}{dt}$$
$$+\frac{Rp_2}{LC}u^2 + \frac{Rp_3}{LC}u^3 = 0.$$

引入如下记号:

$$\left[\frac{R}{L} - \frac{MS_1}{LC} + \frac{p_1}{C}\right] = -\alpha_1; \frac{MS_2}{LC} - \frac{p_2}{C} = \beta_1;$$
$$\frac{MS_3}{LC} + \frac{p_3}{C} = \gamma_1; \frac{1}{LC} = \omega_0^2;\ \omega_0^2(1 + Rp_1) = \omega_1^2;$$
$$\frac{Rp_2}{LC} = n;\ \frac{Rp_3}{LC} = m.$$

若对系数的微小程度做相应的假设，则此方程很容易化成形式: $\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x})$($x$ 为无量纲变量，μ 为小参数)，对此方程我们

曾提出了范德波尔和庞卡莱理论，并得出周期解的振幅、频率校正量的一次近似等的一般公式.

但在这里我们不准备应用这些一般公式，而将阐明，如何在这种情况下用最少的运算得到需要的结果；当然，同样的结果也可以从一般公式中得出，这是显而易见的. 引入"失调" a^2，即真实频率的平方 Ω^2 与 ω_1^2 之差：

$$a^2 = \Omega^2 - \omega_1^2.$$

设 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, m, n, a^2$ 诸量与 ω_0 相比足够小. 此时，运动方程将取形式：

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \Omega^2 u = \alpha_1 \frac{du}{dt} + \beta_1 \frac{d(u^2)}{dt} - \gamma_1 \frac{d(u^3)}{dt} - nu^2 - mu^3 + a^2 u. \tag{9.88a}$$

为了确定振幅和频率校正量，我们设 $u = K\sin\Omega t$ 并在右边消去共振项. 将得出两个用以确定 K^2 和 a^2 的方程：

$$K\alpha_1\Omega - \frac{\gamma_1 K^3 \Omega^3}{4} = 0,$$

$$-m\frac{3}{4}K^3 + a^2 K = 0,$$

由此可得：

$$K^2 = \frac{\alpha_1}{\frac{3}{4}\gamma_1},\ a^2 = \frac{3}{4}K^2 m^* = \frac{\alpha_1 m}{\gamma_1}. \tag{9.90}$$

因此，频率等于：

$$\Omega^2 = \frac{1}{LC} + \frac{Rp_1}{LC} + \frac{m\alpha_1}{\gamma_1}.$$

我们看到，在所研究这种线路中，若考虑栅流，则在第一近似中就已经出现频率校正量[1]. 为使 $u = K\sin\Omega t$ 稳定，必须有，方

1) 在我们所进行的研究中，没有假定振荡回路的电阻 R 很小，但曾假设系数 α_1, β_1, γ_1, m 和 n 很小(量级为 μ)，即假设了振荡器接近于自激阈(边缘)，而屏流和栅流特性的非线性很小.

如果假定回路电阻 R 也很小(设 $\omega_0 RC$ 为 μ 阶量)，则频率校正量在有栅流的情况下也将是量级为 μ^2 的量.

* 原书为 "$\frac{3}{4}Km^{2n}$"——译者注.

程(9.88a)右端对 u 的导数的富氏级数之常数项小于零，即表示式 $\alpha_1 + 2\beta_1 u - 3\gamma_1 u^2$ 的富氏展开式的常数项小于零． 由此条件中可得:

$$\alpha_1 - \frac{3}{2}\gamma_1 K^2 < 0$$

或

$$K^2 > \frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\frac{3}{4}\gamma_1},$$

由(9.90)可知，此条件永远满足；因此所得周期解永远是稳定的．

最后，线路的自激条件为 $\alpha_1 > 0$ 或

$$\frac{R}{L} + \frac{p_1}{C} - \frac{MS_1}{LC} < 0,$$

这说明，从自激条件的观点来看，栅极电路中之电流的作用，相当于在回路中附加以某种恶化自激条件的负载．

§9. 似线性保守自振系统的分枝理论

我们仍研究具有一个自由度的似线性保守自振系统，并设此自振系统之性状和某一参数有很大关系，后者我们可以给予各种不同的固定值．在这种情况下，系统的运动方程可写成如下形式：

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}; \lambda), \tag{9.91}$$

其中 x 为系统的坐标(例如，偏压，电压等等)，μ 为小参数，它表示所研究自振系统与线性保守系统的接近程度，λ 为参数(例如，互感系数等等)，其变化对所研究之系统的影响正是我们要研究的，$f(x, \dot{x}; \lambda)$ 为非线性函数，由耗能元件和供能装置的物理性质决定．下面我们就转入对方程(9.91)的研究，设 μ 足够小．

我们曾用小参数法(范德波尔法或庞卡莱法)指出过，当 $\mu \neq 0$ 但足够小时，在平面上，一般来讲，只保留一些接近于圆的孤立闭曲线，其半径 K 决定于方程：

$$\Phi(K; \lambda) = 0, \tag{9.92}$$

其中

$$\Phi(K;\lambda)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(K\cos u,-K\sin u;\lambda)\sin u du.$$

其余积分曲线都不是闭曲线——它们将是一些螺线，且当 μ 足够小，与圆相差不多．我们看到，对应于孤立闭积分曲线——庞卡莱极限环——的周期运动是稳定的（既是轨道稳定的又是按李亚普诺夫稳定的），如满足不等式

$$\Phi'_k(K;\lambda)<0. \tag{9.93}$$

这样一来，条件(9.92)和(9.93)就与我们对保守系统的平衡状态所得出的条件（上册第二章 § 5）完全类似，不过这时应该研究 $K_1, K_2, \cdots, K_s$——定态运动的振幅，包括近于圆的极限环和奇点 $K=0$，来代替对奇点坐标 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_s$ 的研究．

这样，我们就对定态运动与参数的关系得出与上册第二章 §5 中对平衡状态与参数的关系完全相同的结果．在这里我们重新得到"线性点列"，但已不是平衡状态的，而是定态运动的，后者保持稳定性或不稳定性，直到与其他线性点列相重合，即达到分枝点为止．定态运动的"线性点列"由方程(9.92)给出．它们的稳定性的确定方法与上册第二章 §5 相同：若在 λ, K 平面上标出 $\Phi(K;\lambda)>0$ 的区域；那么，位于此区域上方的线性点列对应于稳定的定态运动，而位于区域 $\Phi(K;\lambda)>0$ 下方的线性点列则对应于不稳定的定态运动（周期运动或平衡状态）．

以后我们将会看到，分枝点具有重要的物理意义：当系统参数取这种数值时，系统中的过程将发生质变，如振动的产生、消失等等．

现在所讲的定态运动，与保守系统的平衡状态相类似，构成元素的封闭系统*，这些元素之间可以发生"稳定性的交换"．

从分枝理论的观点出发着手研究具体例子之前，首先应当指

---

* 此处系统为定态运动（即元素：平衡状态及自振、包括稳定的及不稳定的）的集合．"封闭的"意义为，当参数改变时，动力学系统中可能出现的元素只能变化．但没有其他类型出现——译者注．

出，研究系统运动性质与参数 λ 的关系时，若不研究函数 $\Phi(K;\ \lambda)$ 而研究函数

$$\bar{\Phi}(\rho;\ \lambda) = 2\sqrt{\rho}\ \Phi(\sqrt{\rho};\lambda)$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\sqrt{\rho}\cos u,\ -\sqrt{\rho}\sin u;\lambda)\sqrt{\rho}\sin u du, \quad (9.94)$$

那么不在 λ, K 平面而在 $\lambda,\ \rho$ 平面上进行是比较方便的．此时，定态运动的线性点列由方程

$$\bar{\Phi}(\rho;\ \lambda) = 0$$

确定，其稳定性则决定于条件

$$\bar{\Phi}'_\rho(\rho;\ \lambda) < 0^{1)}. \quad (9.93a)$$

§10. 分枝理论在研究电子管振荡器工作状态中的应用[14]

作为例子我们来研究电子管振荡器的软激和硬激情况．为了避免重复，我们选取屏极电路中具有振动回路的电子管振荡器（图 465,6；参看 646 页），并采用通常的简化假设，即忽略栅流和屏极反应．振荡回路的电流方程可写成如下形式：

$$LC\frac{d^2i}{dt^2} + RC\frac{di}{dt} + i = i_a. \quad (9.95)$$

这里 $i_a = \varphi(u_g)$ 为屏流，只与栅压 $u_g = E_g + u$ 有关，其中 $u = M\frac{di}{dt}$ 为互感电动势．

电子管的特性以幂级数来逼近；若以五次幂为限（对于我们的研究目的已足够），则可以设（参看本章 §4）：

$$i_a = \varphi(E_g + u) = i_{a0} + S_0u + S_1u^2 + S_2u^3 + S_3u^4 - S_4u^{5\,2)}.$$

引入新的无量纲变量

1) 用这种在 λ, ρ 平面上绘制"分枝图"的方法，研究定态运动与参数 λ 的关系，在 $f(x, \dot{x}, \lambda) = F(x, \lambda)\dot{x}$ 或 $f(x, \dot{x}, \lambda) = F_1(\dot{x}, \lambda)$ 等情况中特别方便，其中 $F(x, \lambda)$, $F_1(\dot{x}, \lambda)$ 分别为 x 和 $\dot{x}$ 的多项式．

2) 与本章 §4 中一样，我们将假设：在此多项式中 $S_0>0$，最高奇次项的系数为负值，因为只有满足这些条件，才存在稳定自振．

$$t_{新}=\frac{t}{\sqrt{LC}} \text{ 和 } x=\frac{M}{\Phi_0}(i-i_{a0}),$$

其中 Φ_0 对于给定电路为一不变量，并具有磁通的量纲（$I_0=\Phi_0/M$ 为电流比例尺）. 若选择 $\mu=\omega_0 MS_0$ 为小参数，则振动方程(9.95)可化成所需之形式：

$$\ddot{x}+x=\mu[\alpha\dot{x}+\beta(\dot{x})^2+\gamma(\dot{x})^3+\delta(\dot{x})^4-\varepsilon(\dot{x})^5], \quad (9.95a)$$

其中

$$\alpha=\frac{MS_0-RC}{MS_0}, \quad \beta=\frac{\omega_0\Phi_0 S_1}{S_0}, \quad \gamma=\frac{\omega_0^2\Phi_0^2 S_2}{S_0},$$

$$\delta=\frac{\omega_0^3\Phi_0^3 S_3}{S_0}, \quad \varepsilon=\frac{\omega_0^4\Phi_0^4 S_4}{S_0}$$

均亦为无量纲量，但已经不是小量，而是量级为 1 的量[1].

根据(9.92a)和(9.93a)可得振幅及稳定性条件如下（准确到正因子）：

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\rho,\lambda)&\equiv(MS_0-RC)\rho+\frac{3}{4}MS_0\gamma\rho^2-\frac{5}{8}MS_0\varepsilon\rho^3=0,\\ \Phi'_\rho(\rho,\lambda)&\equiv(MS_0-RC)+\frac{3}{2}MS_0\gamma\rho-\frac{15}{8}MS_0\varepsilon\rho^2<0.\end{aligned}\right\} \quad (9.96)$$

设互感系数 M 为参数，这个参数的变化对所研究的系统的影响，使我们感到兴趣. 因此我们必须为振动的软激和硬激情况画出 M,ρ 的分枝图. 我们只限于研究 $M>0$ 的情况，这相当于在振荡器中反馈线圈采取正规的绕向. 不应忘记，只有 $\rho\geqslant 0$ 的数值才具有物理意义，因为只有这些数值才对应于定态解的真实振幅.

为了简化推导过程，每次我们都将尽量选择简单的数学模型，对表示电子管特性的级数中的系数提出这样或那样的假设[2].

---

1) 为了多样化起见，与本章 §4 不同，在这里我们选取了与振荡回路电流强度的交变分量，而不是与栅压的交变分量，成正比的量为因变量 x. 必须指出，系数 β,γ,δ 或 ε 中有一个可以通过选取比例尺 Φ_0 的方法使之等于任意给定数值（如 1）.

2) 我们再一次提醒读者注意：在表示电子管特性的级数中，只有奇次项的系数包含在式(9.96)中. 其它系数在第一次近似中并不影响定态的振幅和稳定性，但在外力的作用下（例如，检波、n 次共振情况中），它们却起着重要的作用.

1. 振动的软激. 我们知道，振动的软激出现在 $S_2<0$ 时（参看本章 §4），而且在这种情况下，五次幂的存在并不能使系统的性状中，出现某些性质上完全新的特点. 因此，设 $S_2<0$, $S_4=0$（即 $\gamma<0$, $\varepsilon=0$），我们就可以将推导过程简化到最大程度，而又能反映出振动软激的主要特点. 引入记号：$\frac{3}{4}S_0\gamma=\frac{3}{4}\omega_0^2\Phi_0^2S_2=-a(a>0)$，将 $\bar{\Phi}(\rho, M)$ 写成形式：

$$\bar{\Phi}(\rho, M)=\{MS_0-RC-aM\rho\}\rho. \tag{9.97}$$

由此可以看出，在 M, ρ 平面上，曲线 $\bar{\Phi}(\rho, M)=0$ 分解为直线 $\rho=0$ 和双曲线：

$$MS_0-RC-aM\rho=0.$$

若在 M, ρ 平面上分出 $\bar{\Phi}(\rho, M)>0$ 的区域，则可应用上册第二章 §5 中所述的一般法则标出线性点列的稳定（小圆圈）和不稳定（黑点）部分（图 491）.

参数 M 的分枝值为 $M_1=\frac{RC}{S_0}$，在这一点上，对应于上述直线和双曲线的线性点列相交. 直线在参数值 $M=M_1$ 以前是稳定

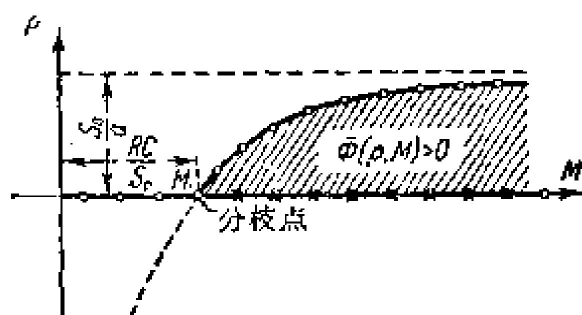


图 491

的，然后在分枝点上发生稳定性的交换，双曲线变为稳定的.

下面我们由分枝图 M, ρ 转入相平面 x, $\dot{x}$，并在 M 取不同数值的条件下研究此相平面. 在对应于 $M<M_1$ 的情况中，相平面上只有一个稳定的定常状态——稳定焦点（图 492）. 无论从何处出发，相点沿某一螺线运动的结果必将进入稳定奇点的邻域.

当 M 通过分枝值 $M=M_1$ 时，由奇点中必然分出一稳定极限

环(图 493). 原来位于平衡状态的相点,此时必转向极限环,因为 $M > M_1$ 时平衡状态不稳定[1]. 用物理的语言来说,就是在系统中发生振动,并且是自激的. M增大时极限环半径增大并趋向渐近值,后者等于 $\rho = \frac{S_0}{a}$.

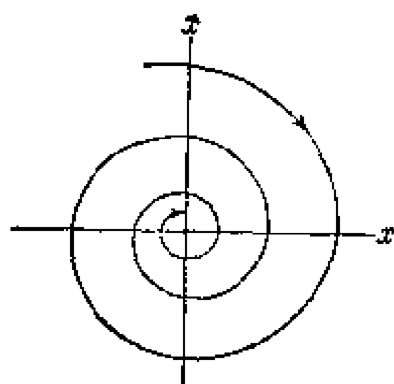


图 492

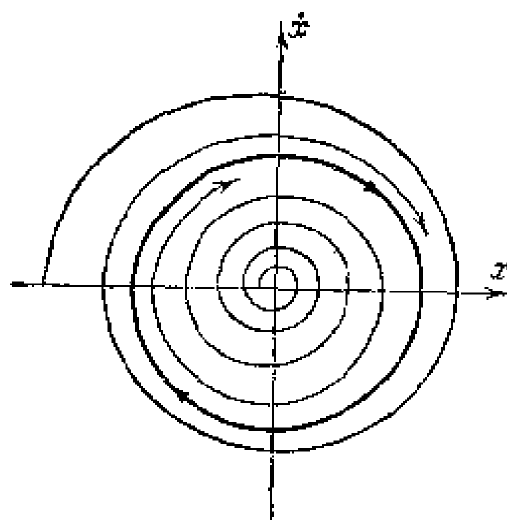


图 493

当M减小时,系统的性状变化是可逆的,极限环缩小,相点沿极限环运动,并在 $M = M_1$,即极限环收缩为一点时,相点重新返回原点,后者在此瞬时已变成稳定的焦点了.

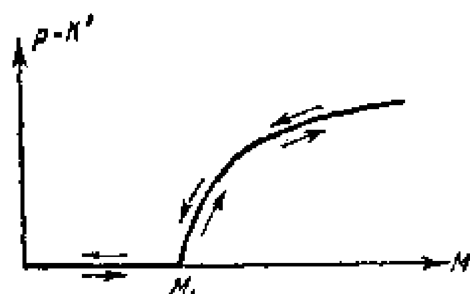


图 494

利用测量振荡器振幅 K 的仪器,可以看出由平衡状态向定态振动的平滑("软")过渡,其振幅连续(无跳跃)变化. 相反的过渡也是如此(图 494).

2. 振动的硬激. 前面已经看到,$S_2 > 0$ 和 $S_4 > 0$ 的假设,反映着振动硬激的主要特征. 若引入记号:

$$\frac{3}{4} S_0 \gamma = a(a > 0),\ \frac{5}{8} S_0 \varepsilon = b(b > 0),$$

1) 我们将设参数M的变化足够缓慢. 由于自振系统中任何运动都趋向于定态运动,因此,若参数的变化足够缓慢,则可认为相点位于定态运动的邻域内.

则得:

$$\Phi(\rho, M) = \{MS_0 - RC + aM\rho - bM\rho^2\}\rho. \qquad (9.98)$$

在 M, ρ 平面上,分枝图分解成直线 $\rho = 0$ 和三次曲线

$$MS_0 - RC + aM\rho - bM\rho^2 = 0.$$

在图 495 上表示出上述曲线分布的例子,划分出 $\Phi(\rho, M)>0$ 的区域,并标出了线性点列的稳定(小圆圈)和不稳定(黑点)部分.

若 $M > 0$,则参数的分枝值有两个:

$$M_0 = \frac{RC}{S_0 + \frac{a^2}{4b}} \text{ 和 } M_1 = \frac{RC}{S_0}.$$

M_0 对应于两线性点列的汇合点[1], M_1 为两线性点列的交点.

现在我们再转到相平面上去. 当 $0 < M < M_0^*$ 时,在我们的相平面上,和前一种情况一样,只有一个定态运动——位于原点的稳定焦点(图 492). 当M通过参数的分枝值 M_0 时,立即出现两个有限半径的极限环(图 496). 其中较大的稳定,较小的不稳定; 位于原点的奇点,其性质并不随之发生变化,而仍然是稳定的.

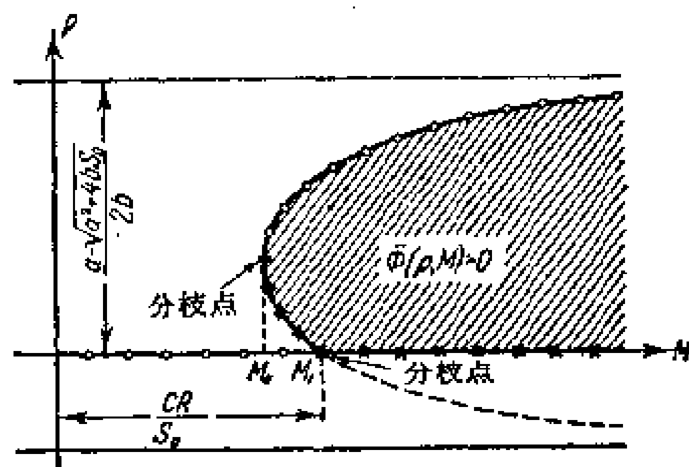


图 495

若M继续增大, 则稳定极限环增大, 不稳定极限环减小 (图 497), 直到 $M = M_1$ 时不稳定极限环消失,与奇点汇合, 后者在

1) 在 M, ρ 平面上与之相对应的分枝点相当于所谓. "极限"定态运动.

* 原书为 M_1——译者注.

$M = M_1$ 时变为不稳定的(图 498). 稳定极限环当M增加时单调增大,其半径渐近地趋向对应于

$$\rho = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bS_0}}{2b}$$

的数值.

那么，测量振荡器振动振幅K的仪器将如何指示呢？为了弄清这一点，我们来观察M很小时位于平衡状态附近之相点的性状. 很明显，只要平衡状态是稳定的，即一直到 $M = M_1$ 时为止，相点都将位于平衡状态的附近；至于 $M = M_0$ 时出现一对极限环（其中之一是稳定的),这对于我们所观察的相点来说,是“毫无关系”的,因为这并不能使平衡状态的稳定性质发生改变.

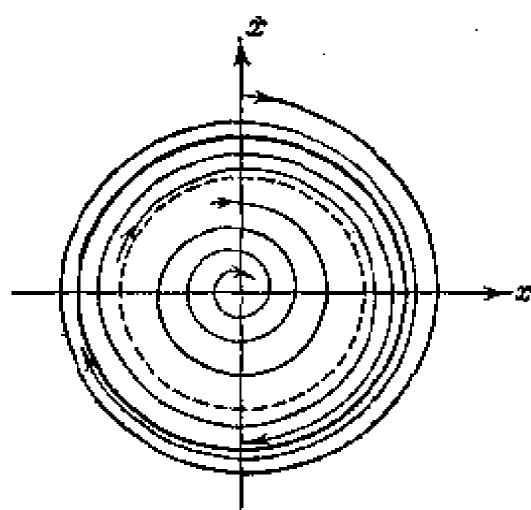


图 496

当 $M > M_1$ 时奇点已变为不稳定；在M通过 $M = M_1$ 时相点“被逼走”,然后则按照积分曲线的“指令”发生运动,最后到达稳定极限环,其后无论M如何增加都不再离开该极限环. 若M减小,则出现另外一种情况. M减小时，相点停留在极限环上，直到 $M = M_0$ 时为止，即稳定极限环与不稳定极限相汇合并消失后为止； $M = M_1$ 时平衡状态变为不稳定，这对相点的性状将不发生任何影响，因为这并不改变作为它的运行轨道的那条极限环的性质. 当M通过 $M = M_0$ 时,相点沿积分曲线转入平衡状态，并在M继续减小时永远停留在那里.

测量振荡回路电流(或栅压)振幅的仪器将发现突变现象——在增加过程中 $M = M_1$ 时和在减小过程中 $M = M_0$ 时,振幅将发生突(“硬”)变；我们所看到的这种过程具有不可逆的“滞后”性质(图 499).

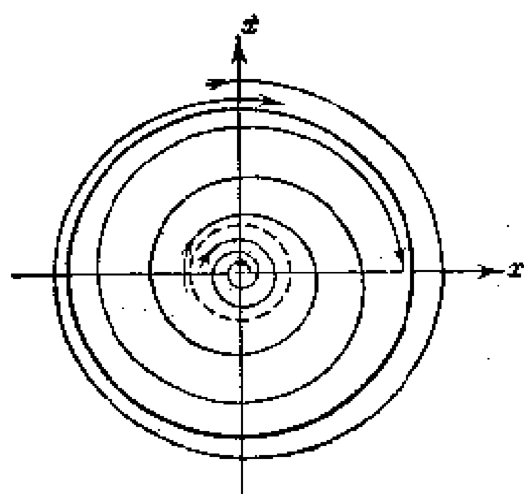


图 497

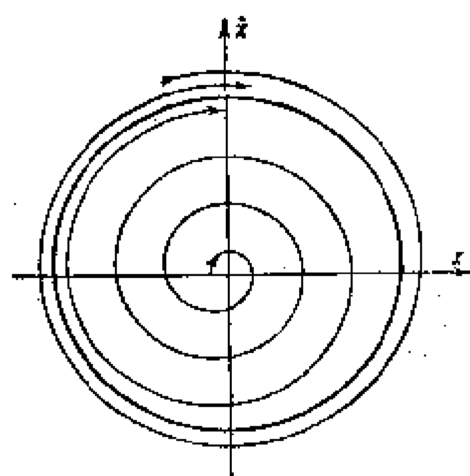


图 498

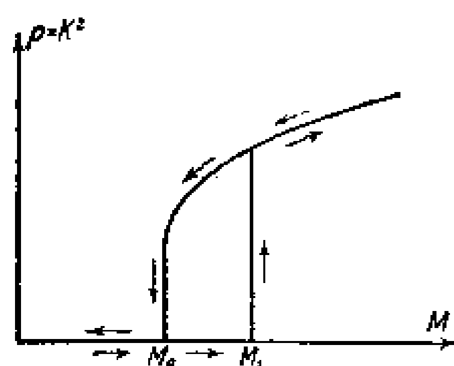


图 499

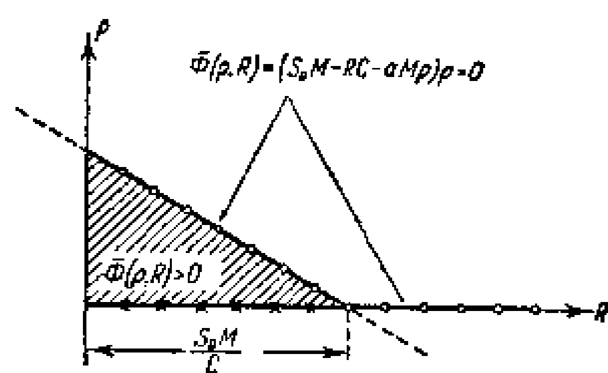


图 500

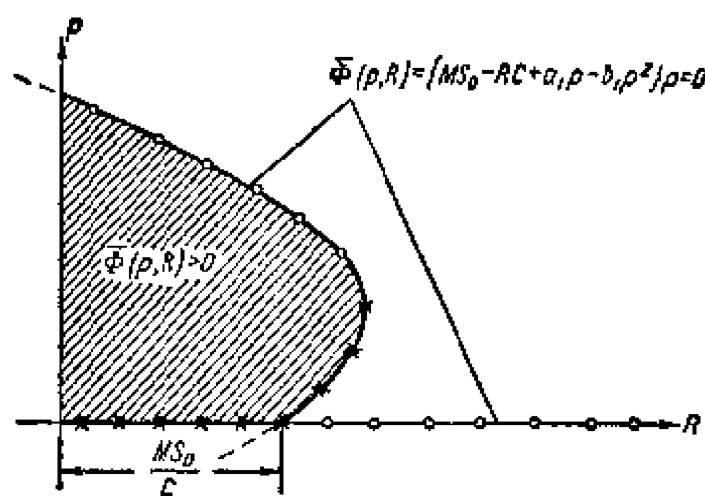


图 501

这样一来，便得到了软激和硬激振动的分枝图，我们选用了互感系数M为参数，正是这个参数之改变对所研究系统的影响是我们所关心的．对表征系统特性的其他参数，我们亦可以得出类似的图形来．

在图 500 和 501 上表示出 R，ρ 的分枝图，这二个图是分别对应于软激和硬激情况的，其中 R 为纯电阻；相应的关系式可以从表示式(9.97)和(9.98)中很容易得出．

第十章　不连续振动[1)]

§1. 引　言

前面曾不止一次指出过，在研究任何一种实际物理系统时，我们都不得不将该系统加以理想化，从其多种多样的性质中，选出那些对所研究的一类问题是主要的、决定性的、重要的性质，从而建立简化动力学(数学)模型，其运动方程能够在一定的精确度上反映出实际系统的性状．但是，在弃去系统的某些性质，并对系统作某种理想化时，我们总要冒着一种危险，那就是，所弃去的性质可能恰好对所研究的问题具有重要意义，所作的简化假设亦可能使我们对提出的问题作不出正确的回答．一方面，对所研究的系统的性质不加以理想化，就不可能建立任何理论，但另一方面，如果不从理论研究中得出结果，不将这些结果与实验资料相比较，我们亦不能解决所作理想化是否"合法"的问题．

建立实际系统的简化(理想化)动力学模型所一贯采用的方法之一是：忽略所谓系统的"小"参数或"寄生"参数．例如，用方程

$$R\dot{q}+\frac{q}{C}=0, \qquad (10.1)$$

研究 RC 回路(图 502)中的振动时，

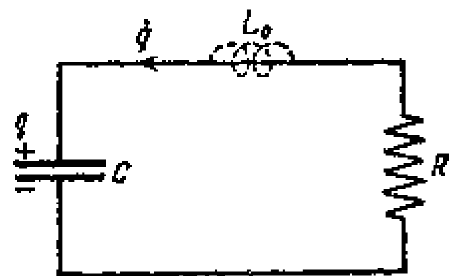


图　502

我们忽略了小的寄生电感 L_0．在第一章 § 5 中我们曾看到，此参数 L_0，如果确实很小(如果 $L_0 \ll CR^2$)，将不起重要作用．若振

1) 在第十章中，热列佐夫写了 §1 第 2 小节，§2，§§3—5，§7 第 4 小节，§8，§§9—11 第 2 小节，§ 12，§ 13，并对 §§6，8，12 作了重大修订．

动的初始状态满足方程(10.1)，则此方程将满意地、正确地反映出 RC 回路中的电流与电压的整个变化过程，而且考虑小参数 L_0 时，即研究“较准确”的二阶方程

$$L_0\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{q}{C}=0, \tag{10.1a}$$

并得不到什么新的东西，只不过对方程(10.1)的解给出微小的校正量，而且 L_0/CR^2 越小，此校正量也越小[1]。

与此相类似，忽略小的寄生参数以后，可利用方程

$$L\frac{di}{dt}+Ri=0, \tag{10.2}$$

以足够的准确度来研究由电阻 R 及电感 L 组成之回路中的现象，但这些寄生参数必须是微小的. 考虑某些参数，例如，感应线圈的微小固有电容 C_0(图 503)，我们得到二阶微分方程

$$C_0RL\frac{d^2i}{dt^2}+L\frac{di}{dt}+Ri=0, \tag{10.2a}$$

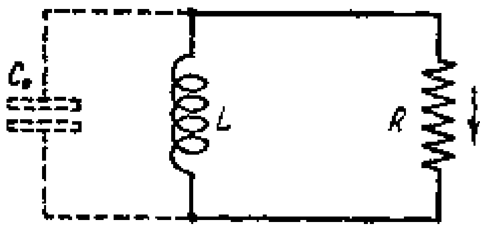


图 503

这样并不显著改变研究结果，只要电容 C_0 足够小(必须使 $C_0\ll L/R^2$)。

同样地，在研究有电感反馈的电子管振荡器时，我们曾忽略所有的寄生参数，其中包括安装寄生电容和电感、电子管极间电容等. 考

---

1) 在这里以及全书中，我们将只研究这样一些运动，其初始状态满足所取动力学模型的方程. 在我们这里所研究的方程(10.1)中，于初瞬时(例如，$t=0$ 时)我们在描述 RC 回路状态的各量中，只能任意给定一个(若给定 q_0，则根据方程(10.1)必有 $(\dot{q})_0=-\frac{q_0}{RC}$，$(\ddot{q})_0=\frac{q_0}{(RC)^2}$，…). 如果在不满足方程(10.1)的初始条件下研究 RC 回路中的过程(例如 $q_0\neq 0$，$\dot{q}_0=0$)，则对此种过程的研究就不能完全借助于方程(10.1)，而必须采用考虑寄生电感 L_0 的方程(10.1a)。在第一章 §5 中，我们已经看到过，在开始阶段(其延续时间约量级为 L_0/R)，$R\dot{q}+q/C$，因而 $L_0\ddot{q}$ 都不是小量，从而当 L_0 甚小时，将引起电流 $\dot{q}$ 的迅速变化，直到接近 $-q_0/RC$ 的数值为止. 以后的现象，甚至在这种情况下，也可由方程(10.1)满意地反映出来. 方程(10.1a)，或者以相应方式表述的电流跳跃假设，只在研究初始阶段的运动时(此时系统的状态与方程(10.1)发生“矛盾”)，才是必须的.

虑这样或那样的小寄生参数，只能使(除使问题显著复杂化以外)自激条件以及自振振幅和周期的表示式等等发生微小的变化.

在这以前，每当建立物理振动系统的动力学模型时，我们都是这样进行的，忽略小的寄生参数，并认为被忽略的参数值越小，它所起的作用也越小. 我们之所以不得不这样做，至少是因为不可能考虑到一切小参数.

在上面所举的例子以及所有以前分析过的问题中[1]，对小寄生参数进行这种忽略，并配合其他一些简化假设，使我们得以建立起这样一些动力学模型(微分方程组)，借助于这些模型，我们研究了 $0<t<+\infty$ 时振动系统的性状（当然是在初始状态($t=0$ 时）不与所取动力学模型的方程相矛盾的条件下）. 而且，所得的研究结果，在定性方面和比较满意的定量方面，都与实验资料相符合.

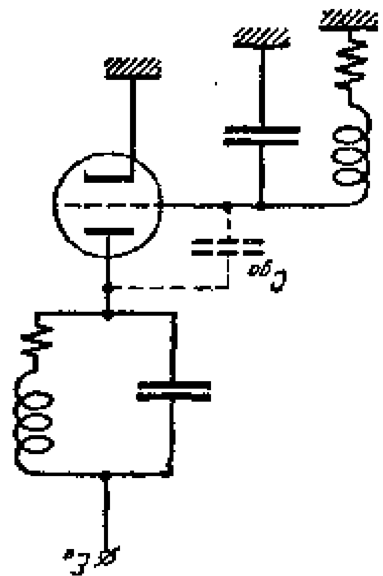


图 504

但是，远不是一切情况都容许弃去所有的小参数，因为其中有些参数可能对振动系统中的过程起重要作用. 例如，在研究如图 504 所示的电子管振荡器时，就不允许忽略所谓电子管的屏栅电容 C_{ga} 这一小寄生参数，因为只有通过它才能实现屏极振荡回路与栅极回路之间的反馈，而后者却是激励自振所不可缺少的. 因此，忽略小电容 C_{ga}，就会使我们甚至无法解释电路的自激现象.

做为第二个例子，我们来研究电阻 R、电感 L 与大电容 C 的串联电路（图 505）与直流电势接通后的过程. 若令电容 C 的初始($t=0$ 时)电量 $q_0=0$，则回路中电流强度的方程可写成如下形式:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt=E. \tag{10.3}$$

---

1) 具有一个 RC 回路的多谐振荡器除外(第四章 §8).

我们来看一看，根据$\frac{1}{C}$"很小"(由于C"很大")，是否可以从中忽略表示电容器电压的项

$$\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt.$$

弃去这一项以后，将得到方程

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E, \tag{10.3a}$$

但此方程只能在开始阶段(在量级为 RC 的时间间隔内)正确地反映电流强度的变化过程[1]. 确实如此，根据简化方程 (10.3a)，在 $t\to+\infty$ 时，回路中应建立起电流强度 E/R，而事实上，根据方程 (10.3)，开始(在量级为 L/R 的时间间隔内)时电流强度达到接近 E/R 的数值，然后随电容器电压的增加开始减小，并当 $t\to+\infty$ 时缓慢地(象 $e^{-\frac{t}{RC}}$ 那样)趋近于零(图 506). 这说明，虽然项

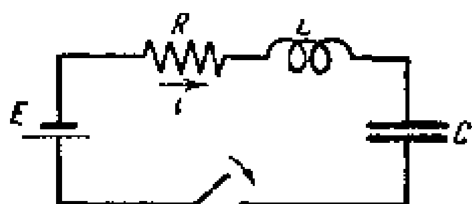


图 505

$$\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$$

的系数$\frac{1}{C}$"很小"，且其数值在开始时较方程(10.3)中各项都小，但是，如果我们要研究回路中电流的整个建立过程，就不允许将它忽略掉，因为所研究之回路经过 RC 量级的时间间隔后，必定进入这样的状态，在这些状态中，这一项按量级已可与接入回路的电势相比了.

最后，还存在这样一些振动系统，在建立它们的理论时，不可能不考虑某些小(寄生)参数，因为后者对此类系统中的过程起重要的作用. 作为这种系统的例子，可以举出具有一个 RC 回路的多谐振荡器，以及其它所谓的**不连续振动**系统，不连续振动是这样

1) 我们假定电路的初始状态满足方程(10.3a)；例如，令 $(i)_0=0$, $\left(\frac{di}{dt}\right)_0=\frac{E}{L}$.

的振动，在其过程中，系统状态的缓慢变化与异常迅速的．“跳跃式的”变化交替地进行着（多谐振荡器就是此种不连续振荡器的典型例子）．

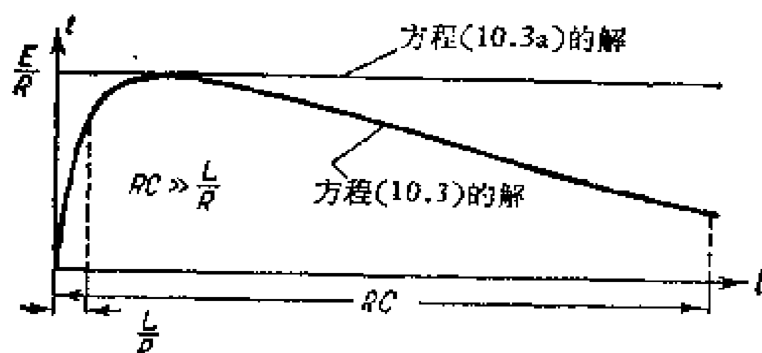


图 506

在第四章§8中研究具有一个RC回路的多谐振荡器时，我们曾忽略了所有寄生参数（包括寄生电容在内）．在此基础上得出的一阶动力学模型（其相直线表示在图508上）结果是一个“有缺陷的”、“退化的”系统，具体地说，利用这种模型，我们不可能在给定初始状态（当然满足此模型的方程）后，研究在整个时间内系统的性状．一阶动力学模型的方程，在任何初始条件下，都将系统“引向”图508所示的相轨线的“止点”A和A'所对应的两个状态之一，它们并不是平衡状态，但从这两点没有向外运动的相轨线．

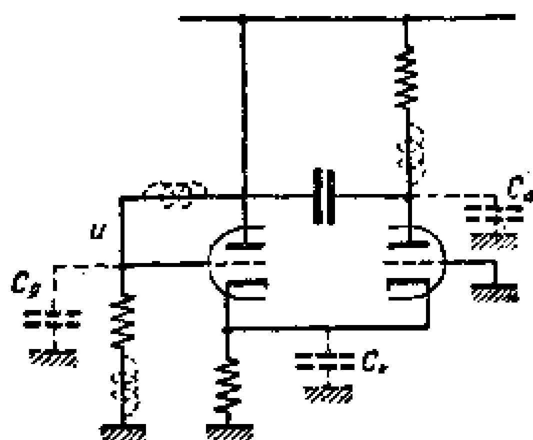


图 507



图 508

既然多谐振荡器的所有“大”参数都已被计入，那么出现这种不成功的、“有缺陷的”模型，其原因显然是这样的，那就是，当我们

忽略电路的所有寄生参数时，我们从中也忽略了对多谐振荡器的振动过程起重要作用的一些寄生参数(虽然它们“很小”)．在这些对多谐振荡器的振动规律起决定作用的寄生参数(与电容 C，电阻 R_a 和 R_g 以及电子管组的特性一起)中，可以举出小寄生电容 C_a，C_g 或 C_k(在图 507 中以虚线表示出的)，它们在电路中总是存在的．这些电容在栅压 u 的迅速的“跳跃式”的变化过程中，起着决定性作用，而这样的变化，我们知道，乃是多谐振荡器所特有的．计入寄生电容 C_a，C_g 或 C_k 以后(这些电容在实际的多谐振荡器中通常远小于 C)，我们将得出相当“完善”的二阶模型，采用此种模型，我们就有可能在时间无限增长的过程中，研究多谐振荡器的性状，特别是解释栅压 u 跃变的周期性重复问题(参看第八章 § 5 和第五章 § 12)[1]．其中重要的一点在于，在振动过程中，多谐振荡器周期地进入这样一些状态，在这些状态中，微分方程的含有小寄生电容(作为它们的系数)的各项，与方程的其他项相比并不小(虽然寄生电容与电容 C 相比很小)．正因为如此，为了研究多谐振荡器的振动而建立动力学模型时，忽略寄生电容是不容许的[2]．

上面关于具有一个 RC 回路的多谐振荡器所说的一切，对所有其他不连续振动的系统都是适用的．在这些系统中，与多谐振荡器一样，振动性质本身，在振动过程的一定阶段上，是由某些小寄生参数所起的重要作用所决定的．因此，在研究不连续振动系统时(这也正是本章的目的所在)，就不能不以一定的形式考虑这些系统的寄生参数，至少是某些重要的寄生参数．

在阐述不连续振动系统的近似研究方法(在 § 3 中)和研究此

---

1) 并不是所有寄生参数对于多谐振荡器的振动过程都是重要的．举例来说，如果我们考虑图 507 中用虚线所示的任何一个寄生电感，但不考虑寄生电容，则将得出二阶动力学模型，但它仍将是“有缺陷的”、“退化的”，因为借助于这种模型甚至不可能定性地解释多谐振荡器的工作(参看本章 §8)．

2) 在第四章 §8 中，我们曾应用“有缺陷的”一阶动力学模型，研究过多谐振荡器的自振，并补充以栅压 u 的跳跃假设．这一假设实质上也是考虑重要寄生参数的间接形式，并且是作为“完善”二阶动力学模型(建立此动力学模型时，甚至可以只考虑上述寄生电容中的一个；参看本章 §4，以及第八章 §5)的动力学推论．

种系统的具体例子(在其后的几节里)以前，我们先提出较特殊的问题：设法阐明小参数(微分方程中具有小系数的各项)对平衡状态稳定性所起的影响.

§2. 小参数和平衡状态的稳定性[127]

由于我们现在只限于研究平衡状态的稳定性问题，因而可以采用线性近似. 设在平衡状态附近系统的性状（小寄生参数忽略不计)可用如下的 n 阶线性化方程描述:

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_nx=0. \tag{10.4}$$

将特解 $x=Ae^{\lambda t}$ 代入后,可得出 λ 的 n 次特征方程:

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0. \tag{10.5}$$

我们知道,平衡状态的稳定性决定于此方程之根的实部的符号;亦即,若 n 个根均为负值或具有负的实部,则平衡状态是稳定的.

设引入新的小参数(例如,寄生参数)以后,使系统的微分方程提高一阶(使方程一下提高一阶以上的其它情况,可用类似方法进行研究)[1]. 线性化方程 (10.4) 的阶数的提高，可能在两种情况下出现——或附加一个小项 $\mu\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}$，或小项 $\mu\int_0^t xdt$，其中 μ 为足

---

1) 引入不提高系统方程阶数的小参数，对于我们并没有什么研究价值（它并不改变平衡状态的稳定性），如果原始系统（即不考虑此参数时）原来就是粗系统的话.

应当指出，自治系统(例如，其运动可由两个一阶微分方程描述)的"粗性"概念，很自然地可以推广到小附加项含有一阶导数的情况，此时"变更"方程组将具有如下形式:

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y)+p_1\left(x,\ y;\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right);$$
$$\frac{dy}{dt}=Q(x,\ y)+q_1\left(x,\ y;\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right).$$

如果小附加项含有高阶导数，则上面所提出的关于系统"粗性"的问题就完全不成立了,因为对于变更方程组来说，我们将有多维相空间. 以后我们将会看到，在后一种情况中,我们完全无法掌握(若不采用特别的限制)附加项的微小程度，甚至我们对它们亦提不出什么限制,使其不致影响平衡状态的稳定性.

够小的系数*. 在第一种情况中,特征方程将为:

$$\mu\lambda^{n+1} + a_0'\lambda^n + a_1'\lambda^{n-1} + \cdots + a_n' = 0, \tag{10.6}$$

在第二种情况则为

$$a_0'\lambda^{n+1} + a_1'\lambda^n + \cdots + a_n'\lambda + \mu = 0. \tag{10.7}$$

在新的方程中,一般来说,将出现另外一些系数 a_i' 代替系数 a_i, 因为考虑小参数后,不仅会出现新的项,而且会使旧的项发生不大的变化,显然,当 $\mu \to 0$ 时, $a_i' \to a_i$. 这两个方程各有 $n+1$ 个根. 由于 μ 很小,其中 n 个根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的值接近于原始方程的 n 个根,特别地其实部具有同样的符号[1]. 因此这 n 个根所发生的变化不可能改变平衡状态的稳定性. 起到这种作用的只能是新的根 λ_{n+1}. 为了解决此根的影响问题,我们分别研究两种情况.

先从第一种情况开始. 我们知道,当 $\mu \to 0$ 时, $\lambda_{n+1} \to \infty$, 因此,若 μ 足够小,则计算 λ_{n+1} 时,可在方程(10.6)中弃去所有低于 n 次的项;由此可得出 μ 很小时 λ_{n+1} 的渐近表达式:

$$\lambda_{n+1} \approx -\frac{a_0}{\mu} \tag{10.8}$$

在第二种情况中,可将特征方程(10.7)改写成形式:

$$\lambda[a_0'\lambda^n + a_1'\lambda^{n-1} + \cdots + a_n'] + \mu = 0^{**},$$

当 $\mu \to 0$ 时 $\lambda_{n+1} \to 0$; 因此,当 μ 很小时,若弃去 λ_{n+1} 的所有高次项,则得出 λ_{n+1} 的渐近表达式如下:

$$\lambda_{n+1} \approx -\frac{\mu}{a_n}. \tag{10.9}$$

现在就很容易确定出,在两种情况中,引入新的小项对平衡状态的稳定性会发生什么影响. 系统在平衡状态附近的性状决定于方程:

$$x = be^{\lambda_{n+1}t} + c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_ne^{\lambda_n t}. \tag{10.10}$$

---

* $\mu\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}$ 不一定真是小项,因为 μ 虽小,但 $\mu\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}$ 却不一定总是小的——译者注.

1) 我们假设原始系统为"粗系统",因而原始特征方程的所有根的实部必异于零.

** 原书中 $a_0\cdots a_n$ 上无撇号——译者注.

如果在 n 个"旧"根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中即便有一个根的实部大于零，则系统不稳定，此时新的根 λ_{n+1} 将丝毫不能改变此状态的性质——系统将始终是不稳定的．如果所有 n 个根(或其实部)均为负值，则平衡状态的稳定性将取决于 λ_{n+1} 的符号． 如果它是负的，则不引入任何新的东西．如果它是正的，就会使平衡状态变为不稳定，这说明由原始系统过渡到补足系统后，系统将丧失稳定性．但 λ_{n+1} 的符号一方面决定于 μ 的符号，另一方面又决定于原始方程的系数 a_0 或 a_n 的符号．若选择 $a_0>0$，则 a_n 必须是正值，才能使原始系统的平衡状态稳定[1)]．因此，在重新引入的小项的系数 μ 为负值的情况下，可能丧失稳定性．以后我们将会看到，实际系统中完全有可能出现这种情况．这说明，不考虑寄生参数时看起来是稳定的平衡状态，由于此参数的存在，实际上却是不稳定的，因而实际系统不可能保持在这种状态中．十分明显，能否区分这种看起来是稳定的平衡状态和真正的稳定平衡状态（即实际系统可以存在任意长时间的状态)，是何等的重要．

虽然还不存在某种一般的方法，但我们总还可以指出一种法则，借助于这种法则，在许多情况下可以"揭露"这些看起来稳定，但实际上并不稳定的平衡状态．这一法则的实质在于：在方程中依次引入各种不同的小寄生参数，然后确定它们在方程中所具有的符号．如果发现即便有一个参数带负号，则我们就有根据担心平衡状态实际上将是不稳定的．我们仅仅说"有根据"，是因为另一个寄生参数在方程的同一项中可能带有正号，从而系数的符号就取决于寄生参数间的数值关系，而寄生参数的数值我们通常并不知道．此外，我们总不能毫无例外地去研究一切寄生参数的影响．因此，严格地说，我们在任何时候都不能确信，根据我们的理论看起来是稳定的平衡状态，实际上一定会是稳定的．任何一种理论都无法最后解决这一问题，能够给出答案的只能是实验．尽管如此，在进行理论研究时，总应当考虑到有把不稳定平衡状态看

1) 此要求可直接由所谓路斯-侯维智(Routh-Hurwitz)条件中导出．例如，可参看[95,99]．

成稳定状态的危险性.

为了指出此种危险性的程度,以及在某些情况中,避免危险而"揭露"那些看起来是稳定的平衡状态是否容易,我们来研究几个具体的例子. 在这些例子里,我们将只限于那些在二阶非线性方程理论范围内可以研究到底的情况. 因此,我们将只研究这样一些系统,在考虑到小项时,这些系统是以二阶微分方程描述的,而弃去这些项以后,将归结为一阶方程. 方法是先从研究二阶方程开始,假定参数之一为小参数,并弃去相应的项,然后再研究相应的一阶方程.

1. 电弧电路. 做为第一个例子,我们来研究已为我们所熟知的电弧电路,令其由直流电源供电(图 509). 除电池和电弧外,在此电路中,尚有电阻 R、自感 L 和电容 C (不言而喻,在这种形式下,所研究的电路已经是理想化的结果). 和以前一样,将电弧的特性,即电弧电压 v 与电流强度 i 之间的关系,以 $v=\phi(i)$ 表示之(图 510).

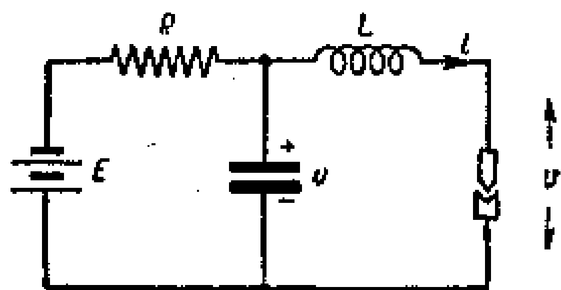


图 509

下面我们先对以前(参看第五章 § 5)研究此种电路时所得的结论,做一些重复和补充.

对于这种电路,我们将得出方程组:

$$\left.\begin{aligned} L\frac{di}{dt} &= u-\phi(i), \\ C\frac{du}{dt} &= \frac{E-u}{R}-i. \end{aligned}\right\} \tag{10.11}$$

此系统的平衡状态 (I, U),显然可由条件

$$\phi(i) = E - Ri$$

确定,它对应于电弧特性曲线 $u=\phi(i)$ 与"负荷"直线 $u=E-Ri$ 的交点;这种交点可能有一个或三个(图 511). 下面我们将研究具有三个平衡状态的这种最有兴趣的情况. 在平衡状态(I, U)的

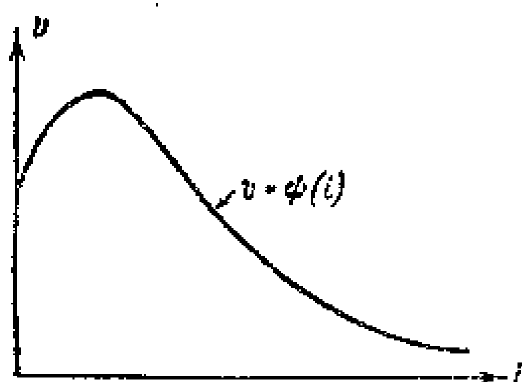


图 510

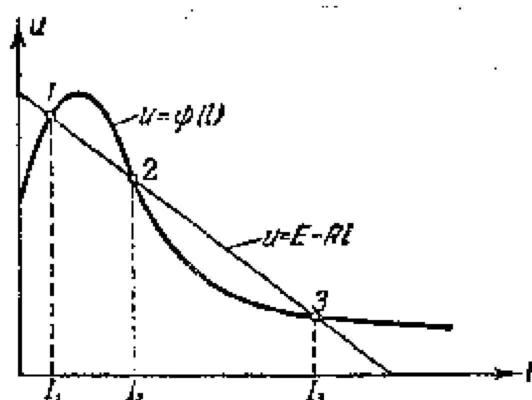


图 511

小邻域内，将方程 (10.11) 线性化，我们将对电流强度和电容器电压的交变分量 $\xi = i - I$ 和 $\eta = u - U$ 得出如下线性方程组：

$$L\frac{d\xi}{dt} = \eta - \psi'(I)\xi,\quad CR\frac{d\eta}{dt} = -\eta - R\xi,$$

其特征方程为：

$$\begin{vmatrix} L\lambda + \psi'(I) & -1 \\ R & CR\lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

或

$$LCR\cdot\lambda^2 + [L + CR\psi'(I)]\lambda + R + \psi'(I) = 0. \quad (10.12)$$

显然，平衡状态(I, U)的性质将取决于 $\psi'(I)$ 的符号和大小，即电流强度取平衡值 $i = I$ 时电弧的“微分电阻”* 的大小和符号．令图 511 中的平衡状态 1 位于电弧特性曲线的上升段上．它是稳定的(因为 $\psi'(I_1)>0$，且方程(10.12)的两个根或者它们的实部均为负值)；或为稳定焦点，或为稳定结点，这决定于 L, C, R 和 $\psi'(I_1)$ 之间的关系．在点 2 上 $\psi'(I_2)$ 取负值，从图中可以看出，其绝对值大于 R． 因此 $R + \psi'(I_2) < 0$，奇点 2 为鞍点．与其相对应的平衡状态恒不稳定．最后，在点 3 上虽然 $\psi'(I_3) < 0$，但从图中可以看出，其绝对值小于 R，因而 $R + \psi'(I_3) > 0$，即奇点 3 可能是焦点或是结点[1]．如果 $|\psi'(I_3)| > \frac{L}{CR}$，此奇点不稳定；反之

* 即“动态电阻”——译者注．

1) 为了确定起见，我们假定，电弧特性曲线的大部分是下降的．因此，只要 R 不十分小而且 E 不十分大，永远有 $\psi'(I_3)<0$．如果点 3 位于特性曲线的上升段上，则 $\psi'(I_3)>0$，于是点 3 永远稳定．

则稳定．由于$\psi'(I_3)$的数值很小(特性曲线虽然下降，但比较平)，因而当L很小时平衡状态3永不稳定；反之，当C很小时此平衡状态永远稳定．一般来讲，在这一奇点上，平衡状态由稳定向不稳定的过渡发生在变化参数(此变化参数可为任意参数：R，L或C)取某一确定的"临界"值时．由此可见，当有三个平衡状态时，从稳定性的意义上来看，我们可以得出图512和513所示的两种组合中的一个[1]．

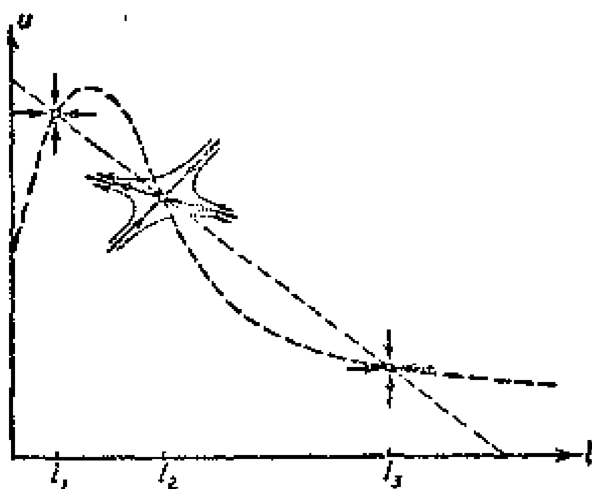


图 512

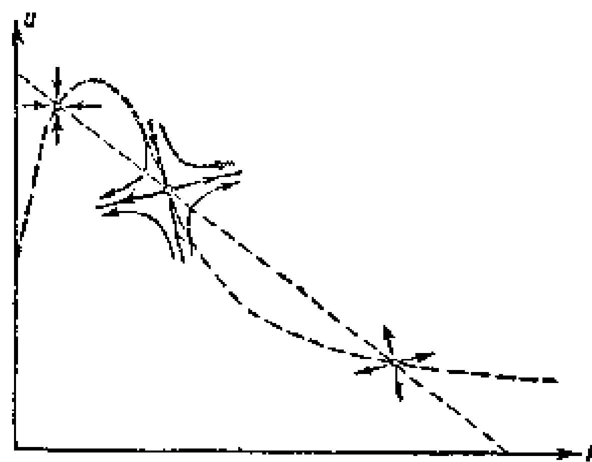


图 513

现在我们来看一看，如果将两参数之一，L或C，忽略不计，这些平衡状态的性质是否会发生变化以及如何变化．若忽略电容则得出如图514所示的电路；若忽略电感则得出如图515所示的电路．我们设法用相应的一阶方程来反映每一种电路的性状（第一种电路我们已在第四章§6中研究过）．在所有三种情况中，即一般情况 $L \neq 0, C \neq 0$ 和特殊情况 $C = 0, L \neq 0$ 以及 $C \neq 0, L = 0$，对应于平衡状态的i和u的数值，显然还是同一的值．

过渡到 $C = 0$ 情况时，从这些平衡状态的稳定性的意义来讲，并不发生任何变化：状态1和3仍保持稳定，而状态2则仍保持不稳定(C很小，但不为零时也是如此)．这说明，小电容C在电

1) 在图上，点1和点3被表示为结点．这两个点也可能是焦点；但其稳定性，并不因此而有所变化．

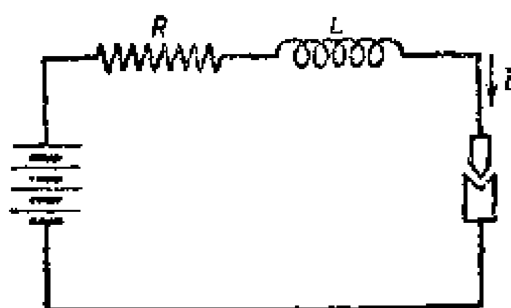


图 514

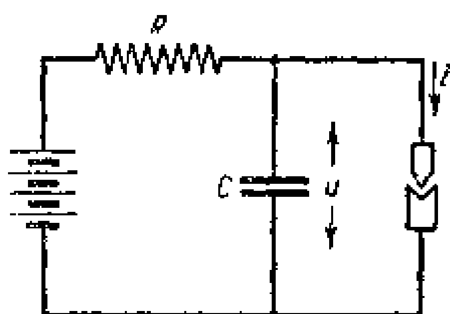


图 515

路中对于所有三个平衡状态的稳定性并不是重要的. 确实如此，当 $C \to +0$ 时,特征方程(10.12)的根

$$\lambda_1 = -\frac{R+\psi'}{L} \text{ 和 } \lambda_2 = -\frac{1}{CR} \to -\infty,$$

亦即，由于电路中有小电容而出现的根 λ_2 恒为负值，因此平衡状态的稳定性完全取决于 λ_1 的符号,其中 λ_1 为不考虑电容时电路特征方程: $L\lambda + R + \psi' = 0$ 的根.

若忽略电感 L (即便是任意小)，则情况完全不同. 不考虑电感时 ($L = 0$)，对应于平衡状态的特征方程

$$CR\psi'\lambda + R + \psi' = 0 \tag{10.12a}$$

只有一个根

$$\lambda = -\frac{R+\psi'}{CR\psi'},$$

在平衡状态 1 和 2 处为负值，在平衡状态 3 处为正值[1]. 换句话说，忽略电感($L = 0$)将使平衡状态 1 和 2 稳定,状态 3 不稳定。

但若考虑很小的电感(更正确些应当是 $L \to +0$) 则特征方程(10.12)的根将为

$$\lambda_1 = -\frac{R+\psi'}{CR\psi'}$$

和

$$\lambda_2 = -\frac{\psi'}{L} \to \infty,$$

---

1) 在平衡状态 2 上,有 $\psi'<0$, $R+\psi'<0$, 因此 $\lambda<0$.

其中第一个根与特征方程(10.12a)的根相重合．在第一个平衡状态上有 $\psi'(I_1)>0$，$\lambda_2\to-\infty$ 和 $\lambda_1<0$；当 L 很小时此平衡状态仍旧是稳定的．因此，对于它来说小电感 L 不是重要参数．但在第二和第三个平衡状态上则有 $\psi'<0$ 和 $\lambda_2\to+\infty$，即系统将以"迅速"的运动脱离这两个平衡状态，故对于任意小的 L，它们都将是不稳定的．因此，在平衡状态 2 和 3（在电弧特性曲线的下降段上）的附近研究电弧电路的性状时，必须考虑电感 L，无论它多么小．例如，平衡状态 2 在 $L=0$(忽略电感)时曾是"稳定的"，但由于电路中有小寄生电感存在，它实际上并不稳定．在特征方程 $a\lambda^2+b\lambda+c=0$（其中 $a>0$）中，若不仅自由项 c，而且一次项的系数 b 亦为负值，则每当二次项的系数消失（$a\to0$）时，都将发生此种稳定性的丧失．此情况可简称为"负鞍点"，以区别于"正鞍点"，对于后者只有自由项 $c<0$，而系数 $b>0$．因此，若 a 变为零，则"正鞍点"保持原来的不稳定性，而"负鞍点"则变为稳定平衡状态．

不难证实，上面所研究过的情况，即平衡状态在补足系统中变为鞍点的情况，乃是由于考虑小参数而引起稳定性丧失的唯一可能情况(对于所研究这一类问题来说)．确实如此，在原始系统中平衡状态应当是稳定的，即唯一的根应当是负值．向二阶方程过渡时，要想失去稳定性，必须出现第二个正根，因此两根必有不同的符号，在这种情况下平衡状态就是鞍点．

也可以作出逆论断，那就是，在系统的退化过程中，只有鞍型奇点才能从不稳定变为稳定．如果在退化过程中二个根中的正根消失时，就出现这种情况．从相平面描绘运动的观点来看，这说明由于退化的结果，在坐标和速度之间出现一种联系，使得相点只能沿趋向鞍点的唯一的分界线运动*．很明显，当我们只研究此种运

* 原系统是二阶的，相空间为一平面，奇点为鞍点，对应的特征根一正一负；退化系统是一阶的，奇点是稳定的，相空间为一条线，奇点对应的特征根是负的．在退化过程中，最后系统变成一阶的，其相线恰恰相当于原来相平面上的走向鞍点的二分界线所组成的那条线．从一维的相线来看，奇点是稳定的，而从相平面来看，奇点(鞍点)是不稳定的．这就是本段所论的直观几何解释——译者注．

动时，鞍点就"似乎是"稳定奇点．但在实际上，只要相点与分界线有任何小的偏离，都足以使相点终将永远离开平衡状态附近的区域．在实际系统中永不能绝对准确地给出初始条件，例如，起伏扰动的存在就一个原因．这说明，由于其中存在自感和初始条件的不可避免的偏移，真实的系统不可能在此平衡状态中保持任意长时间．只有这两个因素一起（自感和初始条件的不可避免的偏移），才使系统离开这种看起来似乎是稳定的平衡状态．

我们所研究过的，恰好就是未经过适当校验的，很容易看成是稳定的那种平衡状态．弗里德伦德尔（Friedländer）[151,152]就曾这样作过，他曾把无自感的电弧电路做为例子，指出在相曲线上可能有两个稳定平衡状态彼此相邻，而且把仅仅是"似乎"稳定的鞍点当成了其中的一个稳定状态．

2. 多谐振荡器的自激． 作为说明小寄生参数对平衡状态的影响的第二个例子，我们来研究普通的具有一个 RC 回路的多谐振荡器，并考虑两个小寄生电感 L_a 和 L（图 516）．若忽略栅流，并假定右方三极管屏流 i_a 只是左方三极管栅压 u 的函数：$i_a=\varphi(u)$，则可得出电路的振动方程：

$$i_1=i+i_c;\quad i=C\frac{dV}{dt}=\frac{u}{R_g};$$

$$L_a\frac{di_1}{dt}+R_ai_1=E_a-\left[u+L\frac{di}{dt}+V\right],$$

或经过简单的变换后，得：

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{L_a}{R_a}+L_a\varphi'(u)+\frac{L}{R_g}\right]\frac{du}{dt}&\\=E_a-R_a\varphi(u)-\left(1+\frac{R_a}{R_g}\right)u-V,&\\CR_g\frac{dV}{dt}=u.&\end{aligned}\right\}\qquad(10.13)$$

此电路的唯一平衡状态决定于条件：

$$u_0=0,\quad V_0=E_a-R_a\varphi(0).$$

将电子管特性展开为 u 的幂级数：

$$i_a = \varphi(u) = \varphi(0) - Su + \cdots,$$

其中 $S = -\varphi'(0) > 0$，因为，我们知道，电子管组的特性曲线 $i_a = \varphi(u)$ 是下降的(具有负的互导)。若只考虑线性近似，则我们得到平衡状态近旁的微振动的线性方程组：

$$\left.\begin{aligned} \mu\frac{du}{dt} &= -\rho u - R_g v, \\ CR_g\frac{dv}{dt} &= u, \end{aligned}\right\} \qquad (10.13a)$$

其中

$$\rho = R_g + R_a(1 - SR_g), \quad \mu = L + L_a(1 - SR_g)$$

和

$$v = V - V_0.$$

线性方程组(10.13a)的特征方程显然有如下形式：

$$\begin{vmatrix} \mu\lambda + \rho & R_g \\ -1 & CR_g\lambda \end{vmatrix} = 0$$

或

$$\mu\lambda^2 + \rho\lambda + \frac{1}{C} = 0, \qquad (10.14)$$

从中可得平衡状态的稳定(即无自激)条件如下：

$$\mu > 0, \quad \rho > 0.$$

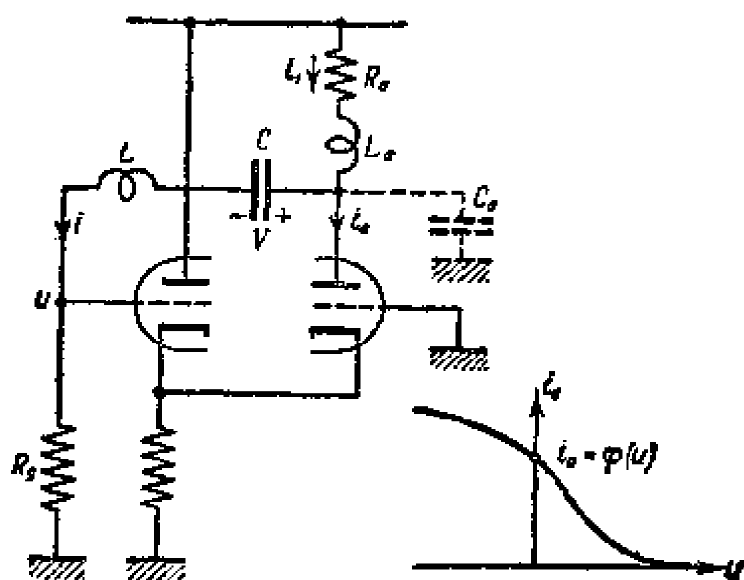


图 516

若 $\mu < 0$，则奇点$(0, V_0)$为鞍点；若 $\mu > 0$，则此奇点或为结点或为焦点，并在 $\rho < 0$ 时不稳定。在图 517 上表示出参数μ，ρ平面划分成各种奇点（平衡状态）的存在区域的完整图形。

倘若我们忽略寄生电感 L_a 和 L，即设 $\mu = 0$，则必将得出（线性化后）如下一阶方程：

$$\rho C \frac{du}{dt} + u = 0,$$

于是平衡状态 $u = 0$ 的稳定性将只取决于参数 ρ 的符号；那就是，当 $\rho > 0$ 时，平衡状态是稳定的。但在这种情况下，一阶系统平衡状态所具有的"稳定性"（$\rho > 0$ 时），也只是由于"我们的幼稚"。但是，下面我们将会看到，在这种情况下，要想做到"不幼稚"，将比前一种情况更加困难。

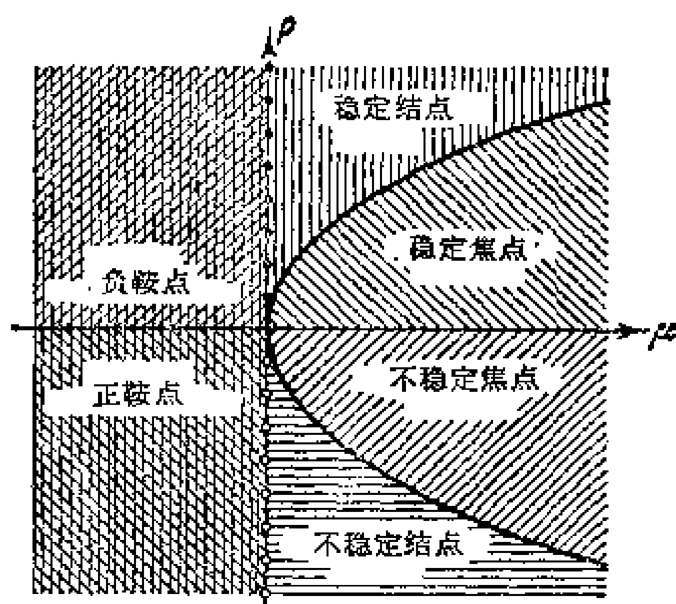


图 517

首先我们假设，在屏极电路中有寄生电感 L_a，但在电容电路中没有，即 $L = 0$。此外，设 $1 < SR_g < 1 + \frac{R_g}{R_a}$，即 $0<\rho<R_g$。此时，当 $L_a = 0$ 时从我们通常的判据出发被认为是稳定的平衡状态，当出现任意小的 L_a 时，将立即丧失其稳定性，并变为鞍点。只要相点对鞍点的稳定胡须有任意小的偏离（这种小偏离在实际

系统中永远不可避免)，最终必将离开此平衡状态而走向无限远. 因此，在实际系统中此平衡状态是不稳定的.

但是，电容电路应该具有自感，即便是很小的，亦即，实际系统中 $L \neq 0$. 然而，考虑 L 不但不会破坏 $L_a = 0$ 和 $\rho > 0$ 时退化系统平衡状态所满足的稳定条件，而且能使那种由于寄生自感 L_a 的存在而成为不稳定的平衡状态获得"稳定性". 事实上，如果 L 足够大，以致于虽然 $SR_g > 1$，但 $\mu = L + L_a(1 - SR_g) > 0$，则 $L_a \neq 0$ 和 $L = 0$ 时曾是不稳定的平衡状态(鞍点)，当出现足够大的 L 时，将变成稳定的. 这样，我们就从实例中看到，不仅某一寄生参数的存在本身能影响平衡状态的稳定性，而且寄生参数之间的关系，对给定平衡状态稳定性的研究结果，也能起到决定性的影响. 但是，如果对寄生参数的存在本身我们还能确知的话，那么对于它们的大小，特别是它们之间的关系，我们往往就完全不知道了. 因此，从上面关于 L_a 和 L 的影响所得出的结果中，实质上我们应该得出这样的结论. 存在有这样的区域，在此区域内，关于退化系统的稳定性我们不能作出任何结论，在我们所研究的例子里，这就是以 $r > \rho > 0$ 为界的 ρ 的值域. 由于在此区域内 $SR_g > 1$，所以关于平衡状态稳定性问题的解决，将取决于无法考虑的一些因素——寄生参数的大小. 因此，在研究退化系统并指出其自激条件(即不稳定条件 $\rho < 0$)时，我们必须注意到，存在着一个由 $\rho = r$ 到 $\rho = 0$ 的"不确定"的平衡状态区域. 完全有可能，电路中的这种所谓的"寄生自激"(它们的出现和消失不需要显著地改变电路的参数)在很多情况下，是由于小参数值在这种"不确定"的平衡状态区域中所发生微小变化而引起的.

在考虑到屏极电路中的小寄生电感 L_a 和电容 C_a(电容 C_a 在图 516 中以虚线表示)时，也将获得类似的结果. 在这种情况下，特征方程将是三次方程，并具有形式:

$$\lambda^3 C_a L_a R_g + \lambda^2 [L_a(1 - SR_g) + C_a R_a R_g] + \lambda [R_a(1 - SR_g) + R_g] + \frac{1}{C} = 0$$

(这里考虑到 $C_a \ll C$)，当 L_a 和 C_a 很小时，其平衡状态的稳定条件可写成：

$$R_a(1 - SR_g) + R_g > 0$$

和

$$L_a(1 - SR_g) + C_a R_a R_g > 0.$$

因此，当 $1 < SR_g < 1 + \frac{R_g}{R_a}$ 时，即如果寄生电感 L_a 足够大：

$$L_a > \frac{C_a R_a R_g}{SR_g - 1} > C_a R_a^2$$

时，电路的自激仍是可能的．应当指出，当多谐振荡器具有一般的参数值($C_a \backsim 10$ 微微法，$R_a \backsim 10^3 \sim 10^4$ 欧姆)时，$C_a R_a^2 \backsim 10 \sim 10^3$ 毫亨，即远大于常遇到的屏路寄生电感．因此，这种多谐振荡器只能在 $SR_g > 1 + \frac{R_a}{R_g}$ 时发生自激．

在本节的结尾我们指出，当由于小参数的影响而使系统的平衡状态变为不稳定时，系统离开这种看起来似乎是稳定的状态所具有的速度在两种可能情况下完全不同．具体地说，在第一种情况(实际上最有意义的情况)中，当小参数包含在最高阶导数的系数中时，特征方程的新根 $\lambda_{n+1} = -\frac{a_0}{\mu}$，这说明，参数 μ 越小，根的值越大，因而也说明系统离开平衡状态的速度就越大(在 $\mu \to +0$ 的极限情况中，则以跳跃形式离开平衡状态)．

与此相反，在第二种情况中，当小参数包含在积分的系数中时，系统将以缓慢的“爬行”运动离开平衡状态(参数 μ 越小，离开速度也越小)．

§3. 小寄生参数与不连续振动

关于小参数(寄生参数)在振动系统中所起的作用，我们前面谈到的一切都可以用相概念来表述．在任何实际系统中，考虑越来越多的新寄生参数，我们就为该系统引入了越来越多的自由度．与此同时，用以反映所研究系统(更确切地说，其简化的动力学模

型)性状的相空间,亦将具有越来越多的维数. 但由于这样一来对所提出问题的数学研究,其繁杂程度必将迅速增大,因而研究任何振动系统我们都不能无限制地引入这些新的自由度, 而应当将描叙系统状态的独立变量限制到通常是不很大的某一数量之内, 选择这些变量和它们之间的关系(方程)时,应使其能反映出(定性上和一定程度的定量上)系统中的振动过程. 于是,将振动系统做为离散系统进行研究时,我们认为它具有有限个、通常不太多个自由度,因而,其状态可以在维数不多的相空间中反映出来.

设考虑某些小(寄生)参数后得出之动力学模型, 其运动由如下的 n 阶微分方程描述:

$$\left.\begin{aligned} \mu\dot{x}_i &= F_i(x_1, \cdots, x_s;\ y_1, \cdots, y_{n'}), \\ \dot{y}_j &= G_j(x_1, \cdots, x_s;\ y_1, \cdots, y_{n'}), \end{aligned}\right\}$$

$(i = 1, 2, \cdots, s;\ j = 1, 2, \cdots, n';\ n = n' + s)$, 或写成简化(向量)形式:

$$\mu\dot{x} = F(x; y),\ \dot{y} = G(x; y), \tag{10.15}$$

其中 μ 为正值小参数,与被考虑的系统寄生参数同时变为零[1]. 若令 $\mu = 0$, 即忽略这些寄生参数, 则得出更加简化的动力学模型(n' 阶):

$$F(x; y) = 0,\ \dot{y} = G(x; y), \tag{10.16}$$

其状态集合构成维数较小($n' < n$)的流形, 并在"全"相空间 x, y 中,对应于某一子空间 F,后者决定于方程:

$$F(x; y) = 0.$$

显然, 关于所考虑的小寄生参数对给定振动系统中的过程是否重要的问题,换句话说,研究系统中的过程时是否可以忽略这些参数的问题,用相概念的语言可叙述如下.

---

1) 我们研究最有兴趣的一种情况, 即考虑新的小参数(寄生参数)后, 这些参数以最高阶导数的小的系数的形式出现在系统的运动方程中. 在研究不连续振动系统时我们遇到的正是这种情况.
下面我们将假定,函数 $F(x; y)$ 和 $G(x; y)$ 在整个使我们感兴趣的变量 x, y 的变化区域内,都是有界可微的. 一般来讲, 函数 $F(x; y)$和 $G(x; y)$也可能与 μ 有关,此时我们将设 $\mu \to +0$ 时,上述函数趋向有限极限.

在那些情况下，当正参数 μ 足够小时，即所考虑的寄生参数值足够小时，在我们感兴趣的时间区间内（通常为 $0 < t < +\infty$），系统(10.15)的相点之运动（在 n 维"全"相空间 x, y 内）将发生在子空间 F 的小邻域内，因而可以满意地用子空间 F（维数较小(n')的流形）本身的范围内的相点之运动来代替？

1. "全"相空间的轨线划分. 为了回答上面提出的问题，我们粗略地来研究一下，当正参数 μ 取足够小值时，"全"相空间如何划分成方程组(10.15)的相轨线[61]. 首先来研究相空间中位于子空间 F 的小 $O(\mu^a)$ 邻域 $(0 < a < 1)$ 外部的区域，这一小邻域当 $\mu \to +0$ 时向 F 退缩[1]. 在此区域内

$$|F(x;\ y)| \geqslant O(\mu^a) \text{ 和 } |\dot{x}| \geqslant O(\mu^{a-1});$$

因此，当 μ 足够小时，其中将发生相点的"迅速"运动，——μ 值越小(即寄生参数值越小)，其运动越快($\mu \to +0$ 时 $\dot{x} \to \infty$)；此区域今后将称之为"迅速"运动区域[2]. 由于在"迅速"运动区域中 $\dot{y} = G(x;\ y)$ 当 $\mu \to +0$ 时为有限值，而

$$\left|\frac{dy_j}{dx_i}\right| = \mu\left|\frac{G_j(x;y)}{F_i(x;y)}\right| \leqslant O(\mu^{1-a}) \to 0(\text{当 } \mu \to +0 \text{ 时}),$$

因而当变量 x 迅速变化一有限量时（经过微小时间间隔 $\Delta t \leqslant O(\mu^{1-a})$），变量 y 的变化是一不超过 μ^{1-a} 阶的微量，亦即，"迅速"运动区域中的相轨线("迅速"运动的轨线)位于 s 维子空间

$$y = \text{常数}$$

的近旁. 因此，当 μ 足够小时，可以一定的准确度把相点在此区域中的运动(在微小的时间间隔 $\Delta t \leqslant O(\mu^{1-a})$ 内)看成是瞬时跳跃，在此过程中变量 x 突然"迅速"地跳跃，而变量 y 则保持不变. 与

1) 所谓子空间 F 的 $O[g(\mu)]$ 邻域，我们将理解为它是这样的点的集合，此集合的所有点与子空间 F 的距离都不超过某一量阶 $g(\mu)$；在所研究的情况中 $g(\mu) = \mu^a(0<a<1)$.

2) "迅速"运动区域也是位于子空间 F 的微小 $O\left(\mu \ln \frac{1}{\mu}\right)$ 邻域外部的区域，因为在此邻域外部的区域内，当 $\mu \to +0$ 时有 $|F(x;\ y)| \geqslant O\left(\mu \ln \frac{1}{\mu}\right)$ 和 $|\dot{x}| \geqslant O\left(\ln \frac{1}{\mu}\right) \to \infty$.

此相对应，在此"迅速"运动区域内，系统运动的近似微分方程可写成如下形式：

$$y \equiv y^0 = \text{常数}, \quad \dot{x} = \frac{1}{\mu} F(x; y^0). \tag{10.17}$$

由此可见，忽略寄生参数后所建立的简化模型方程（10.16），在这里显然不能用以描述系统的性状．方程（10.16）只能在 n' 维子空间 F 的 $O(\mu)$ 邻域内反映出（当然是在 μ 足够小时近似描述）系统的运动规律，在此邻域内 $|F(x; y)| \leqslant O(\mu)$，因而当 μ 为任意小（$\mu \to +0$）时，系统状态在此邻域内的变化速度（即 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$）都将保持有限值．

2. 小（寄生）参数的可忽略条件． 根据"迅速"运动的相轨线在 n' 维子空间 F 近旁的走向不同，可能出现两种基本情况．

A）首先，可能所有"迅速"运动轨线都走向（t 增加时）子空间 F 的某一微小邻域内部．此时，在初始瞬时位于此邻域内部的相点，将在此邻域范围内，即 n' 维子空间 F 的附近继续运动，这是因为并不存在由此邻域向外运动的轨线．同时，相点的运动将比较缓慢（$\mu \to +0$ 时，速度 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 为有限值），并满足（以一定的准确度，且 μ 越小越准确）方程（10.16）[119,42]；相点的这种运动，即当 $\mu \to 0$ 时在有限时间间隔（不趋于零）内 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 保持有限数值的运动，下面我们简称为"缓慢"运动，而发生此种运动的子空间 F 的微小 $O(\mu)$ 邻域则称为"缓慢"运动区域（非"迅速"运动的区域）．由此可见，建立"全"方程（10.15）时所考虑到的寄生参数，在此情况下，对所研究系统的初始状态满足方程（10.16）的过程来说，并不是重要的，当然这些参数必须是足够小的．

如果在初瞬时相点不是位于子空间 F 的附近，则它必定沿相应的"迅速"运动轨线进入"缓慢"运动区域，在这以后将在此区域内运动．换句话说，忽略系统寄生参数后所建立的简化方程组（10.16），只有经过微小时间间隔 Δt 之后才开始生效．显然，相点到子空间的初始距离越小以及参数 μ 越小（即系统的寄生参数越小），此时间间隔 Δt 也越小，而且当 $\mu \to +0$ 时 $\Delta t \to +0$ $\left(\text{可以证实}^{[42]}\ \Delta t \leqslant O\left(\mu \ln \frac{1}{\mu}\right)\right)$．在这种情况下，我们可以不必利用方

程组(10.15)或近似方程组(10.17)去详细研究系统在初始阶段的"迅速"运动，而假设：相点在初瞬时以跳跃的方式立刻过渡到 n' 维子空间 F 的相应点上．如果 x 跳跃时变量 y 的不变条件，使我们有可能单值地确定出跳跃后相点所应到达的位置，则此种处理方法就特别合适．如果这一要求不能满足，则确定跳跃终点时(按给定的初始点)，至少必须定性地研究"迅速"运动相轨线的路径(例如，可借助于近似微分方程(10.17))，或引入补充假设．

为了对建立方程组(10.15)时考虑到的小(寄生)参数建立可忽略条件的解析表达式，应指出，n' 维子空间 $F(x;y)=0$ 上的点都是"迅速"运动近似方程组(10.17)的平衡状态，因此，在子空间 F 近旁(例如，与此子空间之距离的量阶为 $\mu^a(0<a<1)$)之"迅速"运动轨线的走向，就完全取决于这些平衡状态的性质(稳定性)．若引入新的"迅速"时间

$$t'=\frac{t}{\mu}$$

(再提示一次，参数 $\mu>0$)，则"迅速"运动近似方程(10.17)可写成形式：

$$\frac{dx}{dt'}=F(x;y),\quad y\equiv\text{常数}.$$

在子空间 F 的点 $(\bar{x};y)$ 之邻域内将此方程组线性化，则得一次近似方程组

$$\frac{dx_i}{dt'}=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\xi_k\quad(i=1,2,\cdots,s),$$

其中 $\xi_i=x_i-\bar{x}_i$，其特征方程为

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}-\lambda & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_s}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}-\lambda & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_s}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial F_s}{\partial x_1} & \frac{\partial F_s}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_s}{\partial x_s}-\lambda\end{vmatrix}=0\quad(10.18)$$

如果对于任何满足方程 $F(x; y)=0$ 的 x, y, 特征方程(10.18)的所有 s 个根都具有负实部，则子空间 F 上的点都将是"迅速"运动近似方程组(10.17)的稳定平衡状态，所有位于子空间附近的"迅速"运动的轨线亦都将随着时间 t 的增长进入前者的微小邻域. 因此，在这种（而且只有在这种）情况下，建立方程组(10.15)时所考虑到的小寄生参数,至少对于初始状态满足"缓慢"运动近似方程(10.16)的过程来说,是可以忽略的[1]. 由此可见,小(寄生)参数的可忽略条件,举例来说，可以用方程(10.18)的路斯-侯维智条件的形式加以表述.

下面指出今后我们将用到的两个特殊情况:

1) 如果在"全"方程组(10.15)中只有一个方程在导数项中含有小系数(即 $s=1$),则方程(10.18)将为一次方程

$$F'_x(x; y)-\lambda=0,$$

于是小参数的可忽略条件可归结为在子空间 $F(x, y)=0$ 上所有点都应成立的不等式

$$F'_x(x; y)<0; \tag{10.19}$$

2) 如果在方程组(10.15)中有两个方程的导数项含有小系数(即 $s=2$),则特征方程(10.18)具有形式:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}-\lambda & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

或

$$\lambda^2-\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)\lambda+\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x_1, x_2)}=0,$$

而小参数的可忽略条件则变为满足两个不等式（在子空间 F 的所有点上）:

---

1) 对方程组(10.15)中的小参数所提出的可忽略条件,其严格证明读者可在 И. С. 格拉得斯坦(Градштейн) 和 А. Н. 吉洪诺夫(Тихонов)的著作[49, 50, 119]中找到.

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}<0 \quad 和\ D=\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x_1, x_2)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}>0. \tag{10.19a}$$

不难看出，上面所表述的小寄生参数的可忽略条件，对于前面曾研究过二个特例 RC 和 RL 回路中(图 502 和 503)的寄生电感 L_0（在 RC 回路）和寄生电容（在 RL 回路）是成立的。作为例子，我们再研究一次具有寄生电感 L_0 的 RC 回路。引入无量纲时间 $t'=\frac{t}{RC}$ 后，可将方程(10.1a)归结为方程(10.15)的形式：

$$\mu\frac{di}{dt'}=-q-i=F(q, i),$$

$$\frac{dq}{dt'}=i,$$

其中 $\mu=\frac{L_0}{CR^2}$为正的小参数（若寄生电感 $L_0\ll CR^2$）。因此，小寄生电感 L_0 的可忽略条件：$F_i'<0$ 对于简化系统（$\mu=0$）的相直线 $q+i=0$ 上的所有点都成立，因为 $F_i'=-1<0$。

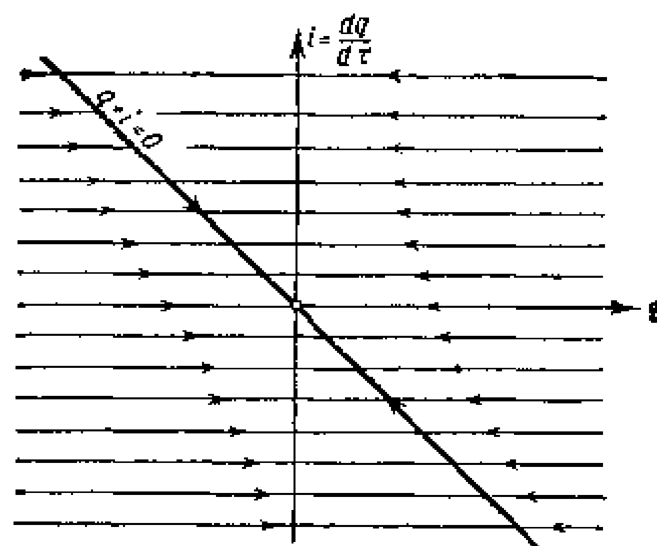


图 518

当 L_0 很小（即 $L_0\ll CR^2$）时，在直线 $q+i=0$ 外部发生电流强度 i 的跳跃，而电荷 q 则几乎保持不变，且在相平面 q, i 上的所有"迅速"运动的轨线都走向直线 $q+i=0$ 的微小邻域，直线 $q+i=0$ 为忽略小寄生电感后 RC 回路（在平面 q, i 上）的相直线（图 518）。

Б) 也可能出现另一种情况，即最低限度在 n' 维子空间 F 的某

一部分上不满足小寄生参数的可忽略条件;为简便起见,下面将用 F^-表示这一部分空间. 此时,与子空间 F^-上的点相对应的特征方程(10.18)的诸根中有些具有正的实部,而子空间 F^-的这些点本身就是"迅速"运动近似方程(10.17)的不稳定平衡状态,因而在"全"相空间 x; y 中必有从子空间 F^-的微小邻域(例如,$O(\mu^a)$ 邻域,其中 $0 < a < 1$)走出的"迅速"运动的轨线. 此时,相点不能保持在子空间 F 的 F^-这一部分中,而将进入"迅速"运动区域(变量 x 的"跳跃"区域). 我们已经指出过,在这里由忽略寄生参数而建立的方程(10.16)完全不反映系统的运动规律. 因此,在这种情况下就存在有这样的运动,它们虽然由满足方程(10.16)的状态,即属于 n' 维子空间 F 的状态开始,但却不能用(10.16)(即不考虑寄生参数)进行研究,不论这些寄生参数如何小. 由此可见,在所研究的情况中,建立"全"方程组(10.15)时所考虑到的任意小寄生参数,对于所研究的物理系统的过程来说,乃是**重要的,不可忽略的**.

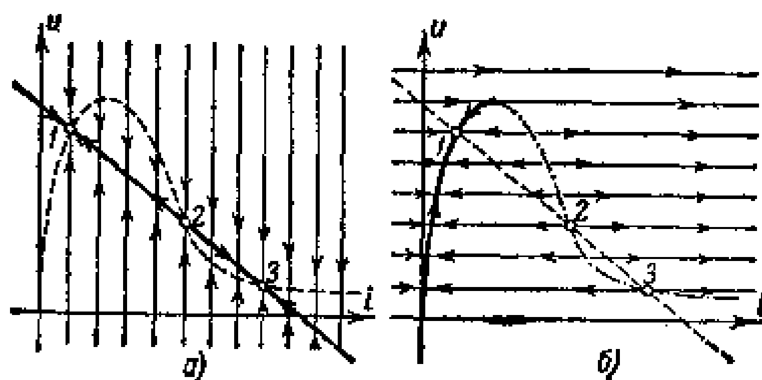


图 519

作为例子,我们再一次研究具有微小的 C 或微小的 L 的电弧电路(图509),若同时考虑电容 C 和电感 L,则其振动是以方程组(10.11)所描述的(参看本章§2,第1小节). 小电容 C 在电路中完全不重要,因为在 $C=0$ 的电路的整个相线上,即直线

$$F=\frac{E-u}{R}-i=0$$

上,都满足小电容 C 的可忽略条件:

$$\frac{\partial F}{\partial u}=-\frac{1}{R}<0.$$

对应于极限情况 $C \to +0$ 的相平面 i, u, 其相轨线划分表示在图 519,a 上：所有"迅速"运动（i = 常数时电压有"跳跃"）轨线都走向不考虑电容时系统的相直线 $u = E - Ri$.

但小电感对于电路中的过程来说，却是重要的参数. 确实如此，不考虑电感的系统，其相线（在 u, i 平面上）就是电弧的特性曲线——$u = \psi(i)$，此特性曲线的整个下降段，对于任意小的电感都不满足可忽略条件，因为在这里有

$$\frac{\partial}{\partial i}[u - \psi(i)] = -\psi'(i) > 0.$$

这一段上的电路状态对于"迅速"运动（$L \to +0$ 时电压 u 保持不变，电流 i 发生跳跃）是不稳定的，亦即，"迅速"运动的轨线必然离开电弧特性曲线的下降段（图519,б）. 由此可见，对于电弧电路中的振动过程来说，电感 L（无论如何小）是重要参数，不考虑它（或不考虑与其等价的参数，例如：电弧放电的惯性）而研究电路的性状，将得不到（即便在定性上）与实验资料相符合的结果.

3. 不连续振动[61,94,105,114,158,159]. 忽略所有寄生参数所建立的"退化"模型，其相空间，即 n' 维流形 $F: F(x; y) = 0$，有时可分为两部分：一部分为 F^+，其各点满足某些小（寄生）参数的可忽略条件（特征方程(10.18)的所有根都具有负的实部）；另一部分为 F^-，其上的点却不满足此条件. 特别是对于不连续振动系统理论来说，这是一种非常有趣的情况. 在这情况下，只有子空间 F^+ 的微小 $O(\mu)$ 邻域（在 n 维"全"相空间 x, y 内）才是相点的"缓慢"运动区域：只有在这里，系统状态的变化速度（即 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$）当 $\mu \to +0$ 时，才能在有限时间间隔内保持有限值. 因此，如果所研究的寄生参数足够小（即如果 $\mu \ll 1$），则可利用系统"缓慢"运动的近似方程——方程组(10.16)（此方程与"退化"系统方程重合），来描述相点在 F^+ 近旁的"缓慢"运动，而运动本身则可以看成是（同样是近似地）发生在子空间 $F(x; y) = 0$ 的 F^+ 这一部分上的.

在着手研究不连续振动以前，我们先对子空间 F^+ 和 F^- 的边界（我们将以 γ 表示它）作一个注记. 子空间 F 上的点的坐标 x, y 为特征方程（10.18）的参数，因而此方程的根必与坐标 x, y 有关（而且是连续地）. 由于在子空间 F^+ 的各点上，方程(10.18)没有

一个根具有正实部，因而当点$(x;\ y)$通过边界γ从子空间F^+向子空间F^-过渡时，特征方程(10.18)的根中必出现一个正根或一对具有正实部的共轭复根（出现两个以上具有正实部的根属于特殊的"非粗"情况，只有对函数$F(x;\ y)$做特殊选择时方能实现）.

下面我们只研究第一种情况．此时，特征方程(10.18)对于边界面γ上的各点将有一个零根(其余$s-1$个根具有负实部)，因而此方程的自由项

$$D(x;\ y)=\frac{\partial(F_1;F_2,\cdots,F_s)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_s)}$$

等于零，即子空间F^+与F^-的边界γ属于下列$n'-1$维曲面:

$$F_i(x;\ y)=0\ (i=1,\ 2,\cdots,\ s),\quad D(x;\ y)=0.\quad(10.20)$$

将方程$F_i(x;\ y)=0$对t微分之并应用方程(10.16)，将得出(对于"缓慢"运动):

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\dot{x}_j+\sum_{k=1}^{n'}\frac{\partial F_i}{\partial y_k}G_k=0$$

或解出$\dot{x}_j$，

$$\dot{x}_j=\frac{D_j(x;\ y)}{D(x;\ y)},$$

其中$D_j(x;\ y)$为在雅可比式$D(x;\ y)$中将j列元素以$-\sum_{k=1}^{n'}\frac{\partial F_i}{\partial y_k}G_k$代替后所构成的行列式．由此可见，使$D(x;\ y)$变为零的边界面$\gamma$，其上诸点对于"退化"模型的方程组乃是变量$x$的无限大变化速度的点，也是方程组轨线的止点，因为在通过曲面γ时$D(x;\ y)$，因而所有$\dot{x}$，必定要改变符号[1].

---

1) 如果当点$(x;\ y)$由F^+向F^-过渡时，特征方程的根中出现一对具有正实部的共轭复根（这只有在$s\geqslant2$时才是可能的），则在F^+和F^-之间的边界上，方程(10.18)必有一对虚根，彼此符号不同；在这种情况下，我们知道，由方程(10.18)的系数所构成的侯维智行列式Δ_{s-1}(倒数第一个)必等于零．由此可见，在这种情况下，子空间F^+和F^-之间的边界将属于另一个$n'-1$维曲面:

$$F(x;y)=0,\quad\Delta_{s-1}=0.$$

此边界上的诸点，对于"简化"模型(方程(10.16))来说，显然，既不是变量x的无限大变化速度点，也不是相轨线的止点。

现在我们假设，根据"退化"模型的动力学，即根据方程组(10.16)，相点在子空间 F^+ 中运动，并到达边界面 γ. 此时，相点将不能继续在子空间 F 中运动(准确些应当说，μ 很小时在 F 的附近)，——它将"跳到""迅速"运动区域，在这里变量 x 当 μ 很小时"迅速"变化（$\mu\to+0$ 为无限快），其变化规律将近似地由方程组(10.17)，而不是方程组(10.16)所描述.

设在 $y=$ 常数的 s 维子空间中，包括无限远点在内，除我们已看到的属于子空间 F^+ 的稳定平衡状态外，不存在其它"吸引元素"(ω 极限轨线). 此时"迅速"运动轨线必将重新"迅速地"(即经过时间间隔 $\Delta t\leqslant O\left(\mu\ln\frac{1}{\mu}\right)\to+0$，当 $\mu\to+0$ 时)返回"缓慢"运动区域——子空间 F^+ 的微小 $O(\mu)$ 邻域，于是在"全"相空间中，必存在通过"迅速"和"缓慢"运动区域的相轨线. 在极限情况，当 $\mu\to+0$ 时，每一个这样的轨线将由两种类型的线段交替组成：其一为位于 n' 维子空间 F^+ 中的"缓慢"运动轨线的线段，相点根据方程组（10.16）在有限时间间隔内走过这些线段；另一为"迅速"运动轨线的线段，其中每一条都位于 $y=$ 常数的 s 维空间内，并根据方程组(10.17)瞬时地走完这一段轨线. "缓慢"运动在边界面 γ:

$$F(x;\ y)=0,\ \ D(x;\ y)=0$$

上转变为"迅速"运动，而且下面我们将假设，由此曲面上的每一个点进入"迅速"运动区域的方程组(10.17)的轨线(具有相应的变量 y 值)，即系统的"迅速"运动轨线，只有唯一的一个[1). 这将使我们有可能借助于较简单的近似方程(10.16)和(10.17)，在"全"相空间中单值地确定系统的相轨线. 而且可以证明，当正参数 μ 取足够小的数值时，方程组(10.15)的轨线，只能通过借助于近似方程组

1) 对于近似方程组(10.17)来说，边界面 γ 上的诸点都是复杂奇点：在这些点上，特征方程(10.18)有一个根等于零，其余根具有负的实部. 对于基本情况（"一次非粗性"情况），这些点类似于相平面上的鞍结点型奇点，而且由其中每一点（正确些应当说，由其中每一点的无限小邻域）将有唯一的一个方程组(10.17)的轨线走出.

(10.16) 和 (10.17)利用上述方法所建立的轨线的近旁[1].

上面所研究过的轨线也就是不连续振动的数学图象；当寄生参数足够小时，所研究系统中的振动与它们很接近．在这些轨线中也可能有闭轨线——不连续极限环，它们显然对应于周期性不连续振动(不连续自振).

这样，研究不连续振动(更正确地说应当是，系统寄生参数足够小，即 $0<\mu\ll 1$ 时的似不连续振动)时，若在"缓慢"运动区域中，即子空间 $F(x;y)=0$ 中满足所考虑寄生参数的可忽略条件的 F^+ 部分上，则可利用系统的"缓慢"运动近似方程

$$F(x;y)=0,\quad \dot{y}=G(x;y) \tag{10.16}$$

进行，而在"全"相空间的其余部分则需利用短时"迅速"运动(变量 x 的瞬时突变)的近似方程

$$y=\text{常数},\quad \mu\dot{x}=F(x;y) \tag{10.17}$$

进行研究.

下面我们对所谓的"跳跃条件"做一简短的注记．由于变量 x 瞬时跳跃时(当 $\mu\to+0$ 时)，变量 y 保持不变，同时无论是跳跃的起点(x^-,y^-)(边界面 γ 上的点)还是跳跃的终点(x^+,y^+)，都位于同一个子空间 F 中，故其坐标显然以如下方程彼此联系着：

$$\left.\begin{aligned}F(x^-,y^-)=0,\ D(x^-,y^-)=0,\\ y^+=y^-,\ F(x^+,y^+)=0.\end{aligned}\right\} \tag{10.21}$$

这些方程通常就称为跳跃条件．在许多问题中，我们预先能够知道(例如，根据这样或那样的实验资料)，系统的"迅速"运动会"迅速"地重新转变为"缓慢"运动，而方程组(10.21)足够使我们单值地确定出相点由给定点 (x^-,y^-) 瞬时跳跃后，在"缓慢"运动区域中所到达的点 (x^+,y^+)．在这些问题中，我们可以引入跳跃假设来代替对"迅速"运动轨线(近似方程组(10.17)的轨线)的详细研究，这个假设为：首先在"退化"系统的 n' 维相空间中指出这样一些点，在这些点上不可能存在系统的"缓慢"运动，因而在其上必然

---

1) 此论断的证明(例如，可参看[105])已超出本书范围．对于二阶系统的周期运动，其证明将在本章 §4 中给出。

开始跳跃(即指出区域 F^-及其边界 γ),然后指出"跳跃规律"

$$y^+ = y^-,\ F(x^-, y^-) = 0,\ F(x^+, y^+) = 0,$$

它使我们有可能根据给定的跳跃起点单值地确定其终点[1]. 在研究具体物理系统中的不连续振动时,我们将经常采用此种方法.

变量 x 跳跃时变量 y 的不变条件,通常具有明显的物理意义,因而不必建立考虑某些寄生参数的系统之运动方程,也可以得出.例如,在电系统中,这些条件的意义就在于发生跳跃时系统状态——电路中电容极板间的电压以及电感中的电流强度——保持不变,并且很容易从电系统中电流和电压的有限性这一补充假设中得出.但是,要确定(根据理论,而不求助于实验资料)相空间中的有跳跃开始发生之点的集合,以及解决"迅速"运动是否是短时的和能否重新转变为"缓慢"运动等问题,就必须考虑在"迅速"运动中起显著作用的(即使是某些)小寄生参数,来建立系统的微分方程,即必须研究方程组(10.17).

在有关不连续振动的问题中,若其跳跃条件(10.21)允许若干个跳跃终点,则研究跳跃微分方程组(10.17)就是必不可少的了(例如,关于耦合多谐振荡器中的不连续振动问题,就是这种问题[37]).在这些问题中,根据近似方程组(10.17)来研究跳跃轨线的走向,就可以不引入任何补充假设(常常是非常人为的),就能够消除这一非单值性.

在本节的结尾,我们简单地研究一下这样一种情况,此时近似方程(10.17)($y =$ 常数)具有异于稳定平衡状态的 ω 极限轨线,例如,具有稳定周期解或概周期解

$$x = x^*\left(\frac{t}{\mu}, y\right) \tag{10.22}$$

(在此解中,和在方程组(10.17)中一样,变量 y 被看成是常值参数);很明显,此情形只能出现在 $s \geqslant 2$ 时,即只有满足条件:至少应在方程组(10.15)的两个方程的导数项中含有小参数,才能出现.此时,与上面曾研究过的不连续振动情形不同,系统的"迅速"运动将不是短时的,而是存在于有限的、$\mu \to +0$

---

1) 应当提醒的是,跳跃起点——边界面 γ 的点——在我们所研究的情况中,乃是方程组(10.16)的相轨线的止点.

时不趋向零的时间间隔内，或者甚至存在于任意长的时间间隔内的运动。因此，在系统作“迅速”运动的过程中，变量 y 不发生变化（或更准确些，变化很小）的论断已不再是正确的了。为了得到变量 y 在“迅速”周期（或概周期）运动(10.22)中的（近似）变化规律，将方程组(10.17)的这一解代入(10.15)的第二组方程中；此时可得：

$$\dot{y} = G\left[x^*\left(\frac{t}{\mu}, y\right); y\right] \tag{10.23}$$

若引入“迅速”时间 $t' = \frac{t}{\mu}$，则得：

$$\frac{dy}{dx} = \mu G[x^*(t', y); y]. \tag{10.23a}$$

由于变量 y 为“迅速”时间 t' 的缓变函数$\left[\frac{dy}{dt'} = O(\mu)\right]$，因而求所得非自治方程(10.23a)的近似解时，就可以利用曾在范德坡尔方法（参看第九章 §2 和 §3）中应用过的“平均法”。这就是说，方程组(10.23a)的解，当 μ 很小时，接近于“短”方程组的解（此方程组系将右边按显含的时间进行平均后获得的），即：

$$\frac{dy}{dt'} = \mu\bar{G}(y) \tag{10.24}$$

或

$$\dot{y} = \bar{G}(y), \tag{10.24a}$$

其中 $\bar{G}(y)$ 为函数 $G[x^*(t', y); y]$ 按 t' 所取的平均值，或者说，这些函数按显含的 t' 所展开的富里埃级数中的常数项，将“短”方程组积分之，可得出变量 y 在系统的“迅速”运动中的近似（μ 越小越准确）变化规律：

$$y = y^*(t),$$

以及变量 x 的精确化的变化规律：

$$x = x^*\left[\frac{t}{\mu}, y^*(t)\right] \tag{10.22a}$$

（在“迅速”运动中变量 y 的“缓慢”变化，在特殊情况中，可能使其中断）。

持续在有限（或无限长）时间间隔 t 内的“迅速”运动，显然反映着这种或那种系统的高频自激（例如寄生自激）。当点(x, y)由子空间 F^+ 向子空间 F^- 过渡，且特征方程(10.18)的根中出现一对具有正实部的共轭复根时，亦同样可能出现这种情况（参看 750 页的脚注）。具有自动偏压的电子管振荡器可以作为此种系统的例子，其中当自动偏压电路的时间常数很大时，就出现断续的激振[48,53,57,109]。

其次，现在所研究的这种方法，显然包括了前面所讲的研究不连续振动的近似方法，它不过是一个特殊情况而已。

§4. 二阶系统中的不连续振动

为了举例说明§3中所讲的内容，我们较详细地研究动力学系统中的不连续振动，其运动以两个一阶微分方程来描述，即

$$\left.\begin{aligned}\mu\dot{x} &= F(x, y),\\ \dot{y} &= G(x, y),\end{aligned}\right\} \tag{10.15a}$$

其中 $F(x, y)$ 和 $G(x, y)$ 为单值连续函数，并具有连续偏导数；μ 为正的小参数（前面曾指出过，在此种系统中，不可能出现持续有限或无限长时间的"迅速"运动）．下面我们将假定，所研究系统的相面是普通的（笛卡儿）平面 x, y.

"退化"系统 $(\mu = 0)$ 的相空间将是连续曲线 F，在平面 x, y 上由方程

$$F(x, y) = 0.$$

所确定．只有在此曲线的微小邻域（其大小的量级为 μ）内，相点的相速度当 $\mu \to +0$ 时才保持有限值．与此相反，在曲线 F 的微小邻域外部，当 $\mu \to +0$ 时，$\dot{x} \to \infty$（而 $\dot{y}$ 则保持有限值），且 $\dfrac{dy}{dx} = \mu\dfrac{G(x, y)}{F(x, y)} \to 0$[1]，即在这里系统的相轨线当 μ 很小时接近于直线 $y =$ 常数，并在其上相点以 x 的无限大变化速度而运动．在接近于直线 $y = y^0 =$ 常数的轨线上，系统的这些"迅速"运动的近似（μ 越小越为准确）方程组将为：

$$y = y^0 = 常数,\quad \mu\dot{x} = F(x, y^0) \tag{10.17a}$$

（这两个方程只能在"迅速"运动区域，即曲线 F 的微小邻域外部，才能反映系统的"迅速"运动的动力学）．直线 $y = y^0 =$ 常数与曲线 F 的交点为这两个近似方程的奇点（$F'_x < 0$ 时，稳定，$F'_x > 0$ 时，不稳定），因此可在直线 $y = y^0 =$ 常数上确定方程组(10.17a)的轨线划分． 如果 $|x|$ 足够大时函数 $F(x, y)$ 的符号与 x 的符号

1) 例如，当 $\mu \to +0$ 时，在曲线 F 的 $\sqrt{\mu}$ 邻域外部，$|\dot{x}| \geqslant O(\mu^{-1/2}) \to \infty$，$\left|\dfrac{dy}{dx}\right| \leqslant O(\mu^{1/2}) \to 0$.

相反,则“迅速”运动轨线必从无限远点和曲线 $F(x, y)=0$ 的 F^- 部分(其中 $F'_x(x, y)>0$)开始,走向同一曲线的 F^+ 部分(其中 $F'_x(x, y)<0$). 因此,系统的“缓慢”运动($\mu \to +0$ 时,在有限时间间隔内以具有有限的 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$)只能发生在 F^+ 部分的微小邻域(其大小的量级为 μ):

$$F(x, y)=0,\quad F'_x(x, y)<0$$

内,并将近似地由方程组

$$F(x, y)=0,\quad \dot{y}=G(x, y) \tag{10.16a}$$

(即“退化”系统的方程组($\mu=0$))描述.

在 $\mu \to +0$ 的极限情况中,我们将得到平面 x, y 的如下相轨线划分:整个平面(在曲线 F 的外部)布满系统之“迅速”的跳跃式的运动轨线——走向曲线 F^+ 的轨线 $y=$ 常数(根据方组(10.17a),在 $F(x, y)>0$ 的区域中,相点向右“跳跃”,即 $\dot{x}\to +\infty$;在 $F(x, y)<0$ 的区域中,则向左,即 $\dot{x}\to -\infty$). 曲线 F^+ 本身则为“缓慢”运动的轨线,在此轨线上,相点以有限的相速度运动(满足方程(10.16a),并具有有限的 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$).

假定曲线 F 上既有 F^+ 部分(其上 $F'_x(x, y)<0$)也有 F^- 部分(其上 $F'_x(x, y)>0$). 曲线 F 的这些部分的边界点以 γ 表示;在这些点上,显然有

$$F'_x(x, y)=0,$$

而且曲线 F 的切线为水平线[1]. 如果系统的相点,沿轨线 F^+“缓慢”地运动,到达 γ 上之点中的一个点,那么接着必然进入“迅速”运动区域,并沿由此点出发的“迅速”运动轨线 $y=$ 常数上运动(“迅速”地,跳跃地),一直到重新返回“缓慢”运动线 F^+ 上为止.

---

1) 在这里以及下面的叙述中,我们将假定,在 γ 的各点上 $F'_y(x, y)\neq 0$,即这些点不是曲线 F 的奇点.

将 $F(x, y)=0$ 对 t 微分之,并利用微分方程(10.16a),我们将得到,在“缓慢”运动的过程中 $F'_x\dot{x}+F'_yG=0$,亦即,$\dot{x}=-\dfrac{F'_yG}{F'_x}$. 因此,对于“退化”模型的方程组(方程组(10.16a))来说,γ 点乃是这样一些点,在其中 $\dot{x}$ 等于无限大,并构成相轨线的止点($\dot{x}$ 在通过这些点时改变符号). 后者也适用于 $F'_x(x, y)$ 的连续性在 γ 诸点具有间断的情况,这种情况通常在系统方程为分段线性时出现.

在这一情况下，系统中将发生不连续振动，即由“缓慢”运动（$\mu \to +0$ 时 x 及 y 取有限值）与“迅速”跳跃运动（$\mu \to +0$ 时 $\dot{x} \to \infty$）相交替组成的一种振动.

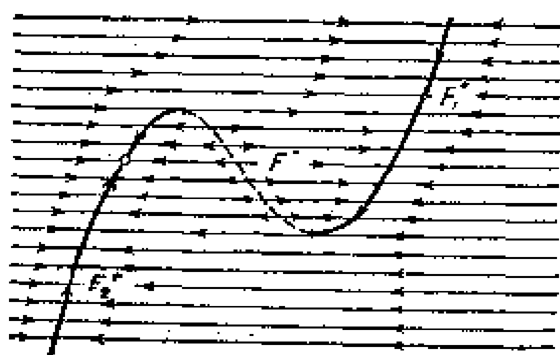


图 520



图 521

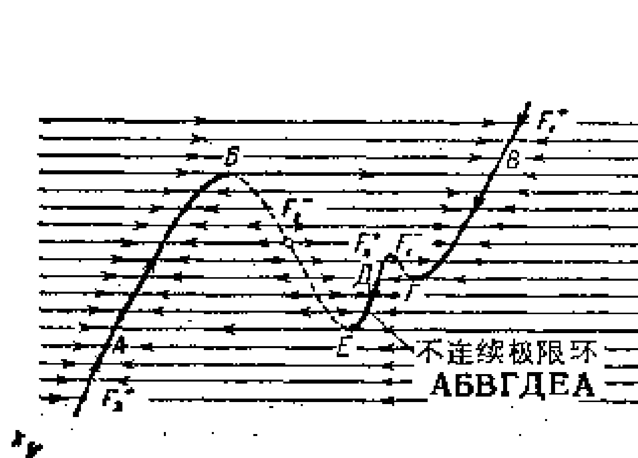


图 522

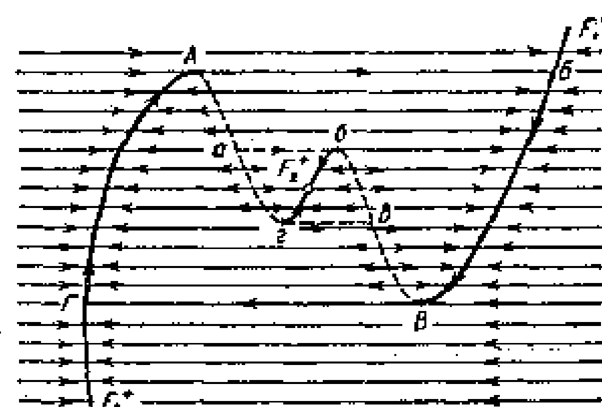


图 523

在图 520—523 上表示出了方程组（10.15a）的相平面在极限情况 $\mu \to +0$ 中的相轨线划分的几个例子. 在图 520 上所表示的是“缓慢”运动曲线上（曲线 F_2^+ 上）存在有系统之平衡状态的情形，经过几次振动之后，将建立起这种平衡状态. 在图 521，522 和 523 所表示的相图上，都含有不连续极限环，即由“缓慢”运动轨线线段（在曲线 F^+ 上）和“迅速”（跳跃）运动轨线线段 $y =$ 常数所构成的闭曲线. 相点沿此闭曲线作周期运动（根据方程组（10.16a）和（10.17a）），因此它对应于系统之周期的不连续振动（不连续自

振)。

在图 523 上所表示的相平面之轨线划分对应于不连续自振的硬激状态，这里除(稳定)不连续极限环 $AБBГA$ 之外，还有稳定平衡状态(在"缓慢"运动轨线的 F_2^+ 部分上)。闭曲线 $aбвгa$ 为不稳定极限环，它把相平面分成平衡状态和极限环 $AБBГA$ 的"吸引"区。这说明，若初始瞬时相点位于区域 $aбвгa$ 的内部，则系统中将建立起平衡状态；若初始瞬时相点位于此区域的外部，则它必然运动到不连续极限环 $AБBГA$ 上，即系统中将建立起不连续自振。

令方程组

$$\mu\dot{x} = F(x, y), \quad \dot{y} = G(x, y) \qquad (10.15a)$$

(其中，和以前一样，$F(x, y)$，$G(x, y)$ 为单值连续函数，并具有连续偏导数；μ 为正的小参数)的相平面上存在有(在 $\mu \to +0$ 的极限情况中)不连续极限环 $C_0: A_1B_1A_2B_2\cdots A_mB_mA_1$，它是由 m 个"缓慢"运动轨线的线段：A_1B_1，A_2B_2，$\cdots$，A_mB_m 和 m 个"迅速"运动轨线($y=$常数)的线段：B_1A_2，B_2A_3，$\cdots$，$B_{m-1}A_m$ B_mA_1 组成的。根据不连续极限环的定义，在每一条"缓慢"运动的轨线线段 A_kB_k 上(B_k 点除外)有：

$$F(x, y) = 0, \quad F'_x(x, y) < 0, \quad G(x, y) \neq 0,$$

而且在 A_kB_k 部分上函数 $G(x, y) = \dot{y}$ 的符号正好使得相点沿从 A_k 点到 B_k 点的方向运动，在每一条"迅速"运动的轨线线段 $B_{k-1}A_k$ 上(B_{k-1} 点和 A_k 点除外)有

$$F(x, y) \neq 0$$

($F(x, y) = \mu\dot{x}$ 的符号使得相点由 B_{k-1} 点"跳向" A_k 点)。在 B_k 点(即相点由"缓慢"运动向"迅速"运动跳跃的过渡点)有：

$$F(x, y) = 0, \quad F'_x(x, y) = 0, \quad G(x, y) \neq 0;$$

我们将补充假设，在这些点上 $F'_y(x, y)$ 和 $F''_{xx}(x, y)$不等于零。此时，在每一个 B_k 点上曲线 F 的切线 $F(x, y) = 0$ 都是水平线，而变量 y 则具有(在曲线 F 的诸点上)极大或极小值。

在 B_k 点 y 的纵坐标达到极大值，若在 A_kB_k 上 $G(x,y) > 0$；

达到极小值，若在 A_kB_k 上 $G(x, y)<0$. 因此，B_k 点上 $\frac{F''_{xx}}{F'_y}$ 的符号与线段 A_kB_k 上函数 $G(x, y)$ 的符号相同. 其次，由于 $\dot{x}$ 的符号在相点通过 B_k 点时（"缓慢"运动转变为"迅速"运动时）不发生改变，相点沿不连续极限环的 A_kB_k 部分运动时 $\dot{x}=-\frac{F'_yG}{F'_x}$ 和 $F'_x<0$，且沿 B_kA_{k+1} 部分运动时 $\dot{x}=\frac{F}{\mu}$，因而在 B_k 点上 F'_yG 的符号与函数 $F(x, y)$ 在下一个"迅速"运动区间 B_kA_{k+1} 上的符号相同.

这样一来，在 B_k 点上 F''_{xx} 和 F'_yG 的符号与函数 $F(x, y)$ 在 B_kA_{k+1} 区间上的符号相同；函数 $G(x, y)$ 在 B_k 点的符号显然与此函数在 A_kB_k 线段上的符号相同.

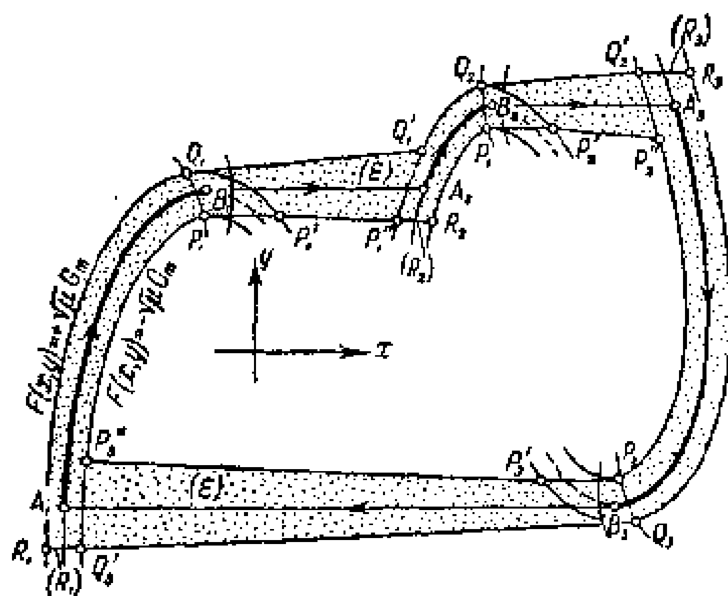


图 524

作为例子，在图 524 上表示出了不连续极限环 $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_1$. 对于这个极限环，在"缓慢"运动部分 A_1B_1 上 $G(x,y)>0$（即 $\dot{y}>0$），在"迅速"运动部分 B_1A_2 上 $F(x, y)>0$（即 $\mu\to+0$ 时 $\dot{x}\to+\infty$），B_2A_3 上 $F(x, y)>0$，A_3B_3 上 $G(x, y)<0$，B_3A_1 上 $F(x, y)<0$，在 B_1 点上 $F''_{xx}>0$，$F'_y>0$，在 B_2 点上 $F''_{xx}>0$，$F'_y>0$，以及在 B_3 点上 $F''_{xx}<0$，$F'_y>0$.

采用对方程组(10.15a)所作的诸假设后，我们来证明，在不连续极限环 C_0 的足够小的邻域内(此邻域可选取得任意小)，只要正参数 μ 足够小，必存在方程组 (10.15a) 的唯一的稳定极限环. 换句话说，我们将证明，每个不连续极限环只是方程组 (10.15a) 的一个稳定的极限环在 $\mu \to +0$ 时的极限位置[60][1].

上面所表叙的定理对于二阶系统中的不连续振动具有重要意义，其证明的第一步，正如第八章 §5 中那样，在于按照给定的足够小的 $\mu > 0$，建造一个具有下列性质的双连通区域(ε): 1)在区域(ε)中没有方程组(10.15a)的平衡状态; 2)不连续极限环 C_0 位于此区域内部，而且 $\mu \to +0$ 时区域(ε)退缩为 C_0; 3)参数 μ 取给定的数值时，方程组(10.15a)的轨线进入(t增加时)区域(ε). 显然，当 μ 取给定值时，此区域(根据第六章 §2 定理 V) 在其内部至少含有一个方程组(10.15a)的稳定极限环.

首先，在平面 x, y 上作出某一有界的单连通闭区域 D，其中包含不连续极限环 C_0，而且函数 $F(x, y)$，$G(x, y)$ 以及它们的导数(到需要的阶数)在其中是连续的，因而也是有界的. 下面我们将假定，μ 选择得足够小，使得我们要造的区域(ε)，全部位于区域 D 的内部.

为了造出区域(ε)，在 x, y 平面上(在区域 D 内)作二条曲线

$$F(x, y) = +\sqrt{\mu}\, G_m \quad 和 \quad F(x, y) = -\sqrt{\mu}\, G_m,$$

其中 G_m 为函数 $G(x, y)$ 在区域 D 中的最大绝对值. 而且这二条曲线应当是这样的，使得在它们之间的、包含曲线 $F(x, y) = 0$ 的(开)区域(α)内有

$$|F(x, y)| < \sqrt{\mu}\, G_m,$$

而在区域 D 的其它部分中则有

$$|F(x, y)| \geqslant \sqrt{\mu}\, G_m{}^{2)}.$$

---

1) 在 [196] 中对方程组 (10.15a) 的一个特殊形式，($G(x, y) = x$、$F(x, y) = G(x) - y$)证明了这个定理.

2) 我们指出，曲线 $F(x, y) = +\sqrt{\mu}\, G_m$ 位于不连续极限环 C_0 的"缓慢"运动线段 A_kB_k 的左方，而曲线 $F(x, y) = -\sqrt{\mu}\, G_m$ 则在其右方，因为在线段 A_kB_k 上 $F(x, y) = 0$ 且有 $F'_x(x, y) < 0$.

此外再作二条曲线

$$\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = \pm\sqrt{\mu},$$

在这两条曲线上曲线 $F(x, y) =$ 常数的切线斜率等于 $\pm\sqrt{\mu}$,同时它们在区域(α)中划分出这样一些(开)区域(β_k),它们介于这二条曲线之间,并包含 B_k 点,并且在区域(β_k)内

$$\left|\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}\right| < \sqrt{\mu},$$

而在区域(α)的其余部分里,则有

$$\left|\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}\right| \geqslant \sqrt{\mu}.$$

具有上述性质的曲线是可以作出的(至少在区域D范围内),只要选择足够小的参数μ值. 此时,区域(α)将位于曲线 $F(x, y) = 0$ 的某一 $O(\sqrt{\mu})$ 邻域内部,而区域 (β_k) 则将位于 B_k 点的某一 $O(\sqrt{\mu})$邻域内[1]. 最后,我们指出,点 P_k 和 Q_k 是曲线 $F'_x(x, y) = -\sqrt{\mu}\,|F'_y(x, y)|$——区域 (β_k) 的边界线之一——与曲线 $F(x, y) = \pm\sqrt{\mu}\,G_m$ 的交点(在 B_k 点的 $O(\sqrt{\mu})$ 邻域内),而且被我们称做 P_k 点的是两个交点中纵坐标较小的一个,若在 A_kB_k 线段上 $G(x, y) > 0$;或纵坐标较大的一个,若在同一线段上 $G(x, y) < 0$.

下面我们先对图 525 所示的情况(在线段 A_kB_k 和 $A_{k+1}B_{k+1}$ 上 $G(x, y) > 0$,在区间 B_kA_{k+1} 上 $F(x, y) > 0$),在不连续极限环的 $B_kA_{k+1}B_{k+1}$ 段的 $O(\sqrt{\mu})$邻域内,作出区域(ε)的边界线(以后我们再指出其它情况中的作法).

---

1) 在这里我们应用了下列简单引理:设某一有界区域A中有一曲线 $\Phi(x, y)=0$,在此曲线的点上存在有不同时等于零的连续导数 Φ'_x 和 Φ'_y;那么,必有这样一个正数 δ_0,使得对于任意 $0<\delta\leqslant\delta_0$: 1)在区域$A$中存在有曲线 $\Phi(x,y)=+\delta$ 和 $\Phi(x, y) = -\delta$,位于曲线 $\Phi(x, y) = 0$ 的某一 $O(\delta)$ 邻域内, 2)在介于这两条曲线之间的、并包含曲线 $\Phi(x, y) = 0$ 的开区域内,恒有$|\Phi(x, y)| < \delta$,而在区域A的其余部分中,则有$|\Phi(x, y)| \geqslant \delta$. 显然,在函数$F(x, y)$在区域$D$中,以及区 $\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$ 在区域(α)中,都满足引理的条件.

1) 由 P_k 点到 P'_k 点引一水平直线线段 $P_kP'_k$, P'_k 点位于 $F'_x(x, y)>0$ 区域和 B_k 点的 $O(\mu^{1/4})$ 邻域中的曲线 $F(x, y)=+\sqrt{\mu}G_m$ 上[1]. 由于在 B_k 点函数 $G(x, y)>0$, 而且连续, 同时线段 $P_kP'_k$ 位于此点的某一 $O(\mu^{1/4})$ 邻域内,因而若选择参数 μ 的数值足

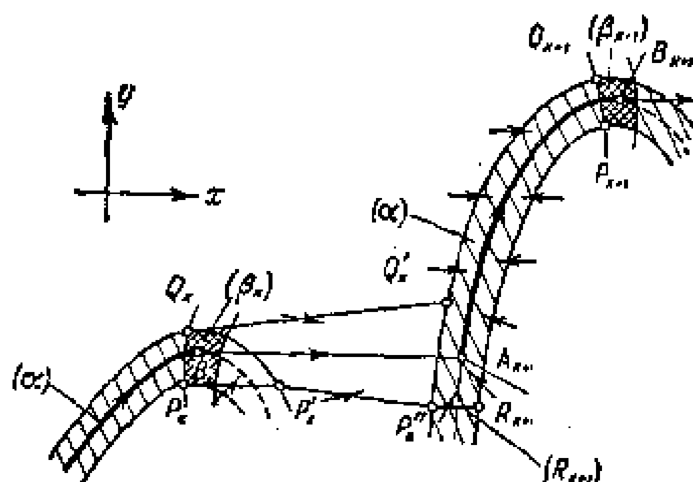


图 525

够地小,我们就永远能使函数 $G(x, y)$ 在作出的线段 $P_kP'_k$ 上也是正的. 在这种情况下,选择足够小的 μ 以后,与此线段相交的方程组(10.15a)的轨线就将由下向上通过它(在线段 $P_kP'_k$ 上 $\dot{y}>0$).

2) 由 P'_k 和 Q_k 点向右分别引斜率为 $-\sqrt{\mu}$ 的直线线段 $P'_kP''_k$ 和斜率为 $+\sqrt{\mu}$ 的直线线段 $Q_kQ'_k$, 直到 A_{k+1} 点的 $O(\sqrt{\mu})$ 邻域内与区域(α)的左边界线相交为止. 如果选择 μ 足够小,则这两个线段都将位于区域(α)的外部;因此,在此二线段上将有:

$$F(x, y)\geqslant\sqrt{\mu}\,G_m\geqslant\sqrt{\mu}\,|G(x, y)|$$

(在线段 $P'_kP''_k$ 和 $Q_kQ'_k$ 上 $F(x, y)>0$, 因为此二线段位于区间

1) 在 B_k 点的 $O(\mu^{1/4})$ 邻域内,这样的 P'_k 点是存在的,因为在 B_k 点 $F''_{xx}\neq0$. 确实如此,将函数 $F=F(x, y)$ 在 $B_k(x^*_k, y^*_k)$ 点展开为幂级数:

$$F=F'_y\eta+F''_{xx}\xi^2+2F''_{xy}\xi\eta+F''_{yy}\eta^2+\cdots,$$

其中 $\xi=x-x^*_k, \eta=y-y^*_k$, 而 $F'_y, F''_{xx}, F''_{xy},\cdots$ 为 B_k 点上的相应的导数值. 由于 P_k 和 P'_k 点具有相同的纵坐标,且 P_k 点位于 B_k 点的 $O(\sqrt{\mu})$ 邻域内,因而对于 P'_k 点必有 $|\eta|\leqslant O(\sqrt{\mu})$,而其横坐标 ξ 则由下方程所确定:

$$F''_{xx}\xi^2+b\xi+C+\cdots=0,$$

其中 b 和 c 的量级为 $\sqrt{\mu}$. 由于在 B_k 点有 $F''_{xx}\neq0$,因而 $|\xi|=O(\mu^{1/4})$,即 P'_k 点确实位于 B_k 点的 $O(\mu^{1/4})$ 邻域内.

B_kA_{k+1} 的 $O(\sqrt{\mu})$邻域内，而在此区间有 $F(x, y) > 0$)。研究一下方程组(10.15a)的相轨线与直线$\sqrt{\mu}x \pm y =$ 常数的相交情形（我们所作出的线段 $P'_kP''_k$ 和 $Q_kQ'_k$ 位于这些直线中的两条上），则不难看出，对于选择好的小 μ，方程组(10.15a)与线段 $P'_kP''_k$ 和 $Q_kQ'_k$ 相交，且进入(t增大时)带状平面内部，此带状平面位于上述两线段之间，并包含不连续极限环的 B_kA_{k+1} 段。这是因为当相点沿方程组(10.15a)的轨线运动时，根据上面曾引出的不等式，在线段 $P'_kP''_k$ 和 $Q_kQ'_k$ 的诸点上有

$$\frac{d}{dt}(\sqrt{\mu}x \pm y) = \frac{F(x, y)}{\sqrt{\mu}} \pm G(x, y) \geqslant 0.$$

3）由 P''_k 点向区域 (α) 右边界上的 R_{k+1} 点引水平线段 (P''_kR_{k+1})穿过区域(α)（在 A_{k+1} 点的 $O(\sqrt{\mu})$ 邻域内）。由于此线段位于 A_{k+1} 点的 $O(\sqrt{\mu})$邻域内，且在此点上连续函数 $G(x, y) > 0$，故当 μ 足够小时，$G(x, y)$ 在线段(P''_kR_{k+1})上也是正的；因此，方程组(10.15a)的轨线，若与此线段相交，必从下向上通过它。

4）用区域(β_i)外部的曲线 $F(x, y) = \pm\sqrt{\mu}G_m$ 的弧将 Q'_k 和 R_{k+1} 点与 P_{k+1} 和 Q_{k+1} 点相联。在这些弧上有

$$-F'_x(x, y) \geqslant \sqrt{\mu}\,|F'_y(x, y)|;$$

因此，当相点沿方程组(10.15a)的轨线运动时，在这些弧的诸点上必有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{F(x, y)\}^2 = F\{F'_x\dot{x} + F'_y\dot{y}\}$$

$$= \frac{F^2}{\mu}F'_x + F'_yFG = G_m^2\left\{F'_x \pm \sqrt{\mu}F'_y\frac{G}{G_m}\right\}^* \leqslant 0,$$

即方程组(10.15a)的相轨线，若与这些弧相交，必进入(t增大时)区域(α)的内部。

我们所作的这两条将 P_k 点和 Q_k 点与 P_{k+1} 点和 Q_{k+1} 点相联

---

* 原书为$\left\{F'_x + \sqrt{\mu}F'_y\frac{G}{G_m}\right\}$——译者注。

结的曲线构成带状平面的边界，此带状平面是区域(ε)的一部分，位于不连续极限环的 $B_kA_{k+1}B_{k+1}$ 段的某一 $O(\sqrt{\mu})$ 邻域内，包含此区段，且有方程组(10.15a)的相轨线进入其中（t 增大时）。若函数 $F(x, y)$ 和 $G(x, y)$ 的符号与图 525 上所采用的不同，也可用类似的方法在不连续极限环的各段的 $O(\sqrt{\mu})$邻域内画出区域(ε)的边界。具体地说，建造区域(ε)边界的 $P_kP'_kP''_k$ 和 $Q_kQ'_k$ 段时，需在上述分析中以 $-x$ 代替 x（若在区间 B_kA_{k+1} 上 $F(x, y) < 0$），以 $-y$ 代替 y（若在线段 A_kB_k 上 $G(x, y) < 0$）；在 A_{k+1} 点的 $O(\sqrt{\mu})$邻域内穿过区域(α)的水平线段(R_{k+1})应通过 P''_k 和 Q'_k 两点中靠下的一个点（若在线段 $A_{k+1}B_{k+1}$ 上 $G(x, y) > 0$），或通过其中靠上的一个点(若在 $A_{k+1}B_{k+1}$ 上 $G(x, y) < 0$)；然后将 P''_k 和 Q'_k 两点中靠上的一个点，若在 $A_{k+1}B_{k+1}$ 上 $G(x,y) > 0$，或靠下的一个点，若在 $A_{k+1}B_{k+1}$ 上 $G(x, y) < 0$，以及 R_{k+1} 点(即线段(R_{k+1})的右端点，若在区间 B_kA_{k+1} 上 $F(x, y) > 0$，或此线段的左端点，若在 B_kA_{k+1} 上 $F(x, y) < 0$)用曲线 $F(x, y) = \pm\sqrt{\mu}G_m$ 的弧与 P_{k+1} 和 Q_{k+1} 点相联结。

利用上述方法在不连续极限环 C_0 的每一段的附近画出区域(ε)的边界以后，我们将得出双连通区域(ε)，此区域包含不连续极限环 C_0，位于后者的某一 $O(\sqrt{\mu})$ 邻域内，且当 t 增大时方程(10.15a)的相轨线都进入此区域(做为例子，在图 524 上画出了区域(ε))。当 μ 足够小时，此区域也将不包含方程组(10.15a)的平衡状态，即同时有 $F(x, y) = 0$ 和 $G(x, y) = 0$ 的点，因为这种点不可能存在于不连续极限环上，而函数 $F(x, y)$ 和 $G(x, y)$ 又是连续的。于是，(当 μ 足够小时)在新造出的区域(ε)中，至少有一个方程组(10.15a)的稳定极限环。

现在我们来证明，方程组(10.15a)的任何一个极限环，只要它位于所画出的区域(ε)内，当 μ 足够小时必然是稳定的；从而我们亦就证明了，当 μ 足够小时，在区域(ε)内只有一个方程组(10.15a)的极限环，因为如果有若干个极限环，则其中必有不稳定的。为此目的，我们来研究极限环 C 的特征指数——沿极限环的积分

$$I=\int_C\left\{\frac{F'_x}{\mu}+G'_y\right\}dt,$$

并证明当μ足够小时，$I<0$（我们知道，条件 $I<0$ 乃是极限环C的稳定性的充分条件；参看第五章 §7）. 利用C_k点——在A_k点的$O(\sqrt{\mu})$邻域内此极限环与区域(α)之边界的交点——将极限环C分成若干段 C_kC_{k+1}. 此时

$$I=\sum I_k,$$

其中

$$I_k=\int_{C_kC_{k+1}}\left\{\frac{F'_x}{\mu}+G'_y\right\}dt$$

为沿极限环C之段 C_kC_{k+1} 的积分. 为了确定积分I_k的符号，再将极限环的段 C_kC_{k+1}，用它同曲线 $F'_x(x, y)=-\mu(G'_y)_m$（其中$(G'_y)_m$——函数 $G'_y(x, y)$ 在区域D中的最大绝对值）以及同区域(α)的边界线在B_k点的小邻域内的交点，划分成三段（图 526）. 其中第一个点（$C_k^{(1)}$点）位于B_k点的$O(\sqrt{\mu})$邻域里，第二个点（$C_k^{(2)}$）在同一个点的$O(\mu^{1/4})$邻域内[1]. 相应的有

$$I_k=I_k^{(1)}+I_k^{(2)}+I_k^{(3)},$$

其中

$$I_k^{(1)}=\int_{C_kC_k^{(1)}}\left\{\frac{F'_x}{\mu}+G'_y\right\}dt=\int_{y_k}^{y_k^{(1)}}\left\{\frac{F'_x}{\mu}+G'_y\right\}\frac{dy}{G},$$

$$I_k^{(2)}=\int_{C_k^{(1)}C_k^{(2)}}\left\{\frac{F'_x}{\mu}+G'_y\right\}dt=\int_{y_k^{(1)}}^{y_k^{(2)}}\left\{\frac{F'_x}{\mu}+G'_y\right\}\frac{dy}{G},$$

$$I_k^{(3)}=\int_{C_k^{(2)}C_{k+1}}\left\{\frac{F'_x}{\mu}+G'_y\right\}dt=\int_{x_k^{(2)}}^{x_{k+1}}\{F'_x+\mu G'_y\}\frac{dx}{F}$$

（这里 x_k, y_k, $x_k^{(1)}$, $y_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, $y_k^{(2)}$ 及 x_{k+1}, y_{k+1} 分别是C_k, $C_k^{(1)}$, $C_k^{(2)}$及C_{k+1}点的坐标）.

---

1) 曲线 $F'_x(x, y)=-\mu(G'_y)_m$ 位于曲线 $F'_x(x, y)=0$ 的$O(\mu)$邻域内，后一曲线在区域(α)范围内的那一段包括在 $B_k(x_k^*, y_k^*)$ 点的$O(\sqrt{\mu})$邻域内. 因此，$C_k^{(1)}$点也必位于B_k点的$O(\sqrt{\mu})$邻域内，即$|y_k^{(1)}-y_k^*|\leqslant O(\sqrt{\mu})$，其中$y_k^{(1)}$为$C_k^{(1)}$点的纵坐标. 对于 $C_k^{(2)}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)})$点我们有：$|y_k^{(2)}-y_k^*|\leqslant O(\sqrt{\mu})$，因此 $|x_k^{(2)}-x_k^*|\leqslant O(\mu^{1/4})$（后一不等式的证明与第 762 页下注内所引过的证明相类似）.

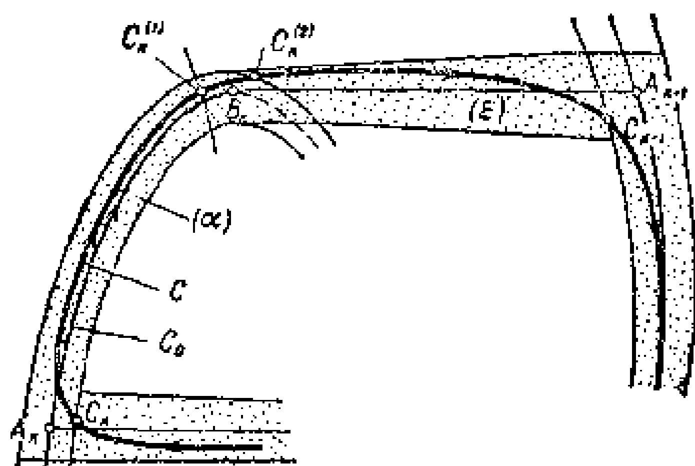


图 526

由于当 μ 足够小时在极限环的段 $C_kC_k^{(1)}$ 上 $F'_x(x, y) < -\mu(G'_y)_m \leqslant -\mu|G'_y(x, y)|$ 和 $|G(x, y)| > a$（a 为某一正数），故 $I_k^{(1)} < 0$，同时，由于在此段上可以划分出 $F'_x(x, y) < -b$（b 为某一正数）的一段，故

$$I_k^{(1)} = O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

在位于 B_k 点的某一 $O(\mu^{1/4})$ 邻域内部的段 $C_k^{(1)}C_k^{(2)}$ 上，$|x - x_k^*| \leqslant O(\mu^{1/4})$，$|y - y_k^*| \leqslant O(\mu^{1/2})$，$|F'_x(x, y)| \leqslant O(\mu^{1/4})$，因为在 B_k 点有 $F''_{xx} \neq 0$，$|G(x, y)| > a$；所以，根据中值定理

$$|I_k^{(2)}| \leqslant O(\mu^{-3/4})|y_k^{(2)} - y_k^{(1)}| \leqslant O(\mu^{-1/4}),$$

因为

$$|y_k^{(2)} - y_k^{(1)}| \leqslant O(\sqrt{\mu}).$$

最后，在位于区域(α)外部的段 $C_k^{(2)}C_{k+1}$ 上，$|F(x, y)| \geqslant \sqrt{\mu}\, G_m$，从而

$$|I_k^{(3)}| \leqslant O(\mu^{-1/2})^{1)}.$$

由此可见，积分 $I_k = \int_{C_kC_{k+1}} \left\{\frac{F'_x}{\mu} + G'_y\right\} dt$ 等于 $\frac{1}{\mu}$ 阶负量 $I_k^{(1)}$ 以及 $I_k^{(2)}$ 及 $I_k^{(3)}$ 的和，后两个量如果在 $\mu \to +0$ 时虽趋向无限大，但必较 $\frac{1}{\mu}$ 为缓慢；因此，当 μ 足够小时，在所有 C_kC_{k+1} 段上必有 $I_k < 0$，因此极限环 C 的特征指数

1）不难得出更准确的估值：$|I_k^{(3)}| \leqslant O(\ln\mu)$.

$$I = \int_C \left\{ \frac{F'_x}{\mu} + G'_y \right\} dt = \sum I_k < 0,$$

即位于区域(ε)内的极限环 C 是稳定的. 正如上面已经指出过,我们同时也就证明了,在区域(ε)中,即不连续极限环 C_0 的 $O(\sqrt{\mu})$ 邻域中,方程组(10.15a)的极限环是唯一的. 结果,上面提出的定理就完全证明了.

显然,所证明的定理使我们有可能将方程组

$$\mu\dot{x} = F(x, y), \quad \dot{y} = G(x, y) \tag{10.15a}$$

的不连续极限环当作原始(零阶)近似,并利用它在参数 μ 取不大的数值时,来计算系统(10.15a)之自振的某些特性. 例如,自振周期(取零阶近似,即 $\mu \to +0$ 时)

$$T_0 = \int_{C_0} \frac{dy}{G} = \sum \int_{A_k B_k} \frac{dy}{G}.$$

对方程组(10.15a)的相轨线在不连续极限环附近的路径上进行详细研究[93,94,158,159],就可以得出极限环方程、自振周期等等的渐近展开式. 例如,对于自振的周期,可得到表示式:

$$T = T_0 + A\mu^{2/3} + B\mu \ln \frac{1}{\mu} + C\mu + O(\mu^{4/3}),$$

其中 A, B 和 C 是决定于函数 $F(x, y)$ 和 $G(x, y)$ 在不连续极限环上的数值的数[1].

下面我们研究一些具体振动系统中的不连续自振,其"缓慢"和"迅速"运动都是由不超过二阶的方程组(10.16)和(10.17)所描述的(采用相应的简化假设).

§5. 具有一个 *RC* 回路的多谐振荡器

让我们再一次研究已经为我们所熟知的、在一定条件下产生

1) 需要指出,系数 A 与曲线 $F(x, y)=0$ 在 B_k 点上的曲率有关. 例如,当此曲线在所有 B_k 点上的曲率半径都趋向零时(即曲线 F 趋近于在 B_k 点具有折点的曲线时),系数 $A \to 0$,于是周期的校正量将具有量级 $\mu \ln \frac{1}{\mu}$(可参看第八章 §5).

不连续自振的自振系统——具有一个 RC 回路的多谐振荡（图 527）[1]．在第四章 §8 中我们已经看到，忽略所有寄生参数所建立起来的多谐振荡器模型乃是"退化的"、"有缺陷的"，这里所指的是：如果不采取一些补充假设(跳跃假设)，它就不能使我们观察到多谐振荡器的振动，甚至无法解释多谐振荡器振动的一些定性的特点．之所以如此，是因为在所弃去的小寄生参数中，有一些对于多谐振荡器中的振动过程是重要的．属于这种重要参数的有小

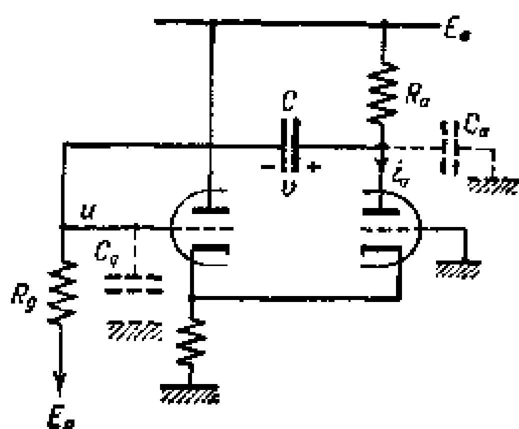


图 527

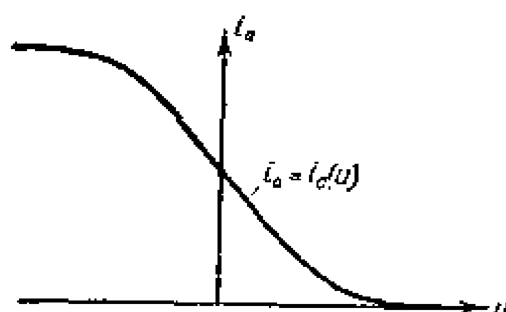


图 528

寄生电容 C_a 和 C_g，这些电容在实际电路中总是存在的(这是一些小的接装寄生电容和管内寄生电容)．

1. 振动方程． 考虑这些小寄生电容后，列出多谐振荡器的振动方程(但设 $C_a \ll C$ 和 $C_g \ll C$)[2]．若忽略栅流和屏极反应，并设电子管组的特性曲线 $i_a = i_a(u)$ (图 528) 为已知，则根据克希荷夫定律可以得出：

$$\left.\begin{aligned} \frac{E_a-(u+v)}{R_a} &= C\frac{dv}{dt}+C_a\frac{d(u+v)}{dt}+i_a(u), \\ C\frac{dv}{dt} &= \frac{u-E_g}{R_g}+C_g\frac{du}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.25)$$

显然，多谐振荡器具有唯一的平衡状态：

---

1) 参看上册第四章 §8，第五章 §12 和第八章 §5．

2) 为了建立"合格的"多谐振荡器模型，以便研究(不但定性而且定量)其中的振动，一般来说，只要考虑这些电容中的一个就足够了．

$$u = E_g,\quad v = v_0 = E_a - R_a i_a(E_g) - E_g.$$

为了简化推导，引入新的无量纲变量 x, y, $t_{新}$，其与旧变量 u, v, t 间的关系式为:

$$u = E_g + u_0 x;\quad v = v_0 + \alpha u_0 x + \beta u_0 y;\quad t_{新} = T_0 t,$$

其中，u_0, T_0 为电压和时间的比例尺，α 和 β 为某些系数. 将新变量代入(10.25)的第二方程，可得:

$$\alpha u_0 \frac{CR_g}{T_0}\dot{x} + \beta u_0 \frac{CR_g}{T_0}\dot{y} = u_0 x + \frac{C_g R_g}{T_0} u_0 \dot{x}.$$

(字母上方的圆点表示对新的无量纲时间的微分)，或选择

$$\alpha = \frac{C_g}{C} \text{ 和 } \beta C R_g = T_0,$$

则有

$$\dot{y} = x.$$

与此相类似，(10.25)的第一方程，若采用新变量，可写成形式:

$$\frac{R_a(C + C_a)}{T_0}(\alpha u_0 \dot{x} + \beta u_0 \dot{y}) + \frac{R_a C_a}{T_0} u_0 \dot{x}$$
$$= -u_0 x - \alpha u_0 x - \beta u_0 y - R_a[i_a(E_g + u_0 x) - i_a(E_g)]$$

或

$$\frac{\alpha R_a(C + C_a) + R_a C_a}{T_0}\dot{x} = -x\left[1 + \frac{C_g}{C_a} + \frac{R_a}{R_g}\left(1 + \frac{C_a}{C}\right)\right]$$
$$-\beta y - \frac{R_a}{u_0}[i_a(E_g + u_0 x) - i_a(E_g)].$$

选择

$$\beta = 1 + \frac{C_g}{C} + \frac{R_a}{R_g}\left(1 + \frac{C_a}{C}\right),$$

因而

$$T_0 = (C + C_a)R_a + (C + C_g)R_g,$$

将方程组(10.26)写成不连续振动系统所特有的形式:

$$\left.\begin{aligned} \mu\dot{x} = F(x, y) \equiv -x - y - K\cdot\varphi(x), \\ \dot{y} = x, \end{aligned}\right\} \qquad (10.26)$$

其中

$$\mu = \frac{R_a}{R_g}\ \frac{\dfrac{C_a + C_g}{C} + \dfrac{C_a + C_g}{C^2}}{\left[1 + \dfrac{C_g}{C} + \dfrac{R_a}{R_g}\left(1 + \dfrac{C_a}{C}\right)\right]^2}$$

为小的正参数，它表征寄生电容的微小程度（当 $C_a \ll C$ 和 $C_g \ll C$ 时，参数 $\mu \ll 1$），

$$K = \frac{SR_g}{1 + \frac{C_g}{C} + \frac{R_a}{R_g}\left(1 + \frac{C_a}{C}\right)}$$

为电路的传输系数，S 为电子管组特性曲线的互导在平衡状态处的绝对值：

$$S = -\left(\frac{di_a}{du}\right)_{u=E_g}$$

以及

$$\varphi(x) = \frac{1}{u_0 S}\left[i_a(E_g + u_0 x) - i_a(E_g)\right]$$

为电子管组的折算无量纲特性曲线（显然，$\varphi'(x) \leqslant 0$，$\varphi(0) = 0$，$\varphi'(0) = -1$）。当 $C_a \ll C$ 和 $C_g \ll C$ 时，变量 $x = \frac{u - E_g}{u_0}$ 和 $y \approx \frac{v - v_0}{\beta u_0}$ 分别与左三级管栅压 u 和电容器 C 的电压 v 的交变分量成正比例；

$$\mu \approx \frac{R_a}{R_g} \frac{\frac{C_a}{C} + \frac{C_g}{C}}{\left[1 + \frac{R_a}{R_g}\right]^2},\ K \approx \frac{SR_a}{1 + \frac{R_a}{R_g}};$$

时间比例尺

$$T_0 \approx C(R_a + R_g).$$

还应当指出，电压比例尺 u_0 仍是任意的，可以适当地选择它，以简化 $\varphi(x)$ 的表达式。

为了简单起见，下面我们只研究对称情形，即设所选取的电子管组的特性 $i_a = i_a(u)$ 以及 E_g 使得折算特性曲线 $\varphi(x)$ 是 x 的奇函数（$\varphi(-x) \equiv -\varphi(x)$），而且当 $|x|$ 增大时 $|\varphi'(x)|$ 单调减小（此时 $-1 \leqslant \varphi'(x) \leqslant 0$）。

2. $\mu \to +0$ 时的相平面 x, y. 电压 u 的跳跃. 下面我们在小 μ 情况，更准确些说：在 $\mu \to +0$ 的极限情况，研究相平面 x, y 的相轨线划分．首先在相平面上作出曲线 F：

$$F(x, y) \equiv -x - y - K\varphi(x) = 0$$

或

$$y = -x - K\varphi(x), \tag{10.27}$$

此曲线为多谐振荡器的"退化"模型(即 $C_a = C_g = 0$ 或 $\mu = 0$ 的模型)的相线．由方程组(10.26)中可以导出,当 $\mu \to +0$ 时相速度 $\dot{x}$ 只在曲线 F 的微小 $O(\mu)$ 邻域内保持有限值，而在此曲线的小邻域(例如,大小为量级$\sqrt{\mu}$的邻域)外部,则发生相点的"迅速"运动($\mu \to +0$ 时,在曲线 F 上方 $\dot{x} \to +\infty$,在其下方 $\dot{x} \to -\infty$),但 $\dot{y} = x$ 却到处都保持有限值．因此,"迅速"运动的相轨线接近于水平直线 $y =$ 常数，即栅压 u "跳跃"时,电容器电压 v 可以看成是不变的．相点沿接近于直线 $y = y_0 =$ 常数之轨线的"迅速"运动("跳跃")的近似方程，可由(10.26)的第一方程，将其中的 y 代之以近似值 y^0,得出:

$$\mu\dot{x} = -y^0 - x - K\varphi(x). \tag{10.28}$$

由于传输系数 K 的大小不同,可能出现两种情况.

当 $K < 1$ 时,在"退化"系统的整个相线上

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -1 - K\varphi'(x) < 0,$$

因此,所有"迅速"运动轨线都走向此曲线 F (图 529, a)．所以,如果对应于多谐振荡器初始状态的点位于曲线 F 的小邻域内部，则相点继续运动时,将不会越出此邻域(更准确些说，是在曲线 F 的附近运动)[1]．与此相对应,当 $K < 1$ 而参数 μ 的数值足够小(即 $C_a \ll C$ 和 $C_g \ll C$)时,多谐振荡器的振动可用"缓慢"运动方程来描述(μ 越小越准确),将寄生电容忽略,或者换句话说，将一阶模型($\mu = 0$)的相曲线 F 的方程(方程(10.27))代入(10.26)的第二方程,即得出此方程:

$$[1 + K\varphi'(x)]\dot{x} + x = 0. \tag{10.29}$$

在此情况(即 $K < 1$)下，寄生电容,若确实很小的话,对于多谐振

---

1) 如果对应于多谐振荡器初始状态的点位于曲线 F 的小邻域外部，则相点将沿相应的"迅速"运动轨线"跳跃"到曲线 F 的小邻域内部，然后将在相线 F 的附近运动．在极限情况中,当 $\mu \to +0$ 时,"缓慢"运动将是沿曲线 F 本身的运动.

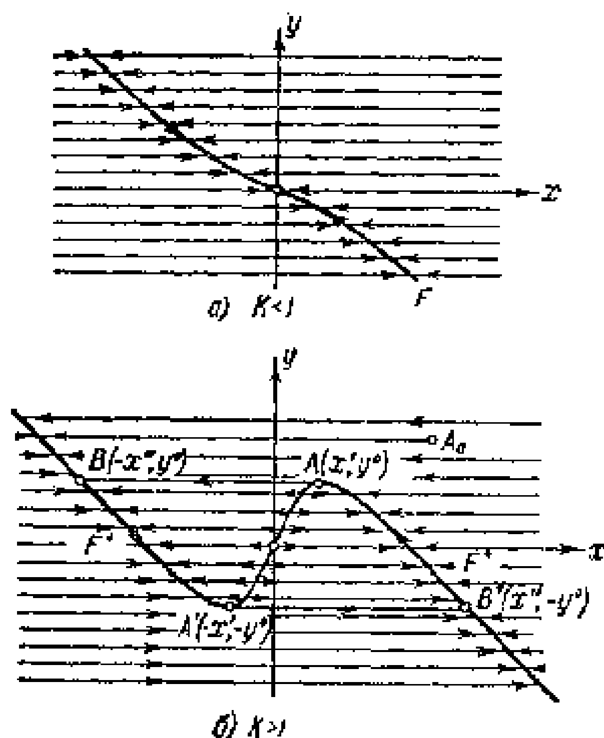


图 529

荡器的振动过程将不起重要作用，因而可忽略不计．显然，不论初始条件如何，都将建立起平衡状态 $x=0$，$y=0$（或 $u=E_g$，$v=v_0$），因为当 $K<1$ 时，对于所有的 x 都有 $1+K\varphi'(x)>0$，因而根据方程(10.29)，当 $t\to+\infty$ 时，$x\to 0$．

当 $K>1$ 时，情况就完全不同了．此时不难看出，无论考虑寄生参数（$\mu>0$）或是不考虑它们($\mu=0$)，平衡状态(0,0)都是不稳定的．此时，在"退化"模型的相线 F 上有一线段 $-x'\leqslant x\leqslant +x'$($x'>0$ 是方程 $1+K\varphi'(x)=0$ 的唯一根)，其上各点不满足小寄生电容的可忽略条件：在此线段上

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-1-K\varphi'(x)\geqslant 0.$$

"迅速"运动的相轨线将离开"退化"系统相线的这一线段（此线段中尚含有平衡状态(0,0)；图 529,б)．由此可见，当寄生电容很小时（$\mu\ll 1$，或更正确些说，在 $\mu\to+0$ 的极限情况中）多谐振荡器将以"跳跃"的形式离开所有 $|x|\leqslant x'$ 的状态，而且"跳跃"时变量 x（即左三极管的栅压 u）亦作跳跃式的变化，而变量 y（即多谐振荡器电容 C 上的电压 v）则保持不变．这样，考虑到对于多谐振荡器的振动过程起重要作用（$K>1$ 时）的任意小寄生参数 C_a 和 C_g 而建立起多谐振荡器的模型以后，我们就从对它的动力学研究中，得出曾在上册第四章 §8 中应用过的跳跃假设．

不难看出，所有"迅速"运动的轨线都走向"退化"模型的相线

F 的 F^+部分的微小邻域，在这些部分上的点都满足寄生电容的可忽略条件：

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -1 - K\varphi'(x) < 0,$$

亦即，都走向曲线 F 上的斜率为负的那些段上：$|x| > x'$[1]。只有在这些段的微小的 $O(\mu)$ 邻域内，相点才在曲线 F 的附近近似地（μ 越小越准确）按照方程(10.29)作“缓慢”运动（$\mu \to +0$ 时，x 的变化速度为有限值）。在极限情况中，即 $\mu \to +0$ 时，这些“缓慢”运动的轨线将趋向于曲线 F 的 $|x| > x'$ 的段。这样一来，就得出了多谐振荡器相平面在极限情况 $\mu \to +0$ 时的相轨线划分，如图529，6所示。当 μ 充分小时，相平面的相轨线划分则甚接近于这一相轨线划分。

由于在曲线 F 的 $|x| > x'$ 的段上，$1 + K\varphi'(x) > 0$，因而在这里 $|x|$ 将随时间减小，从而根据“退化”模型的动力学（根据方程(10.29)），相点必到达 A 点或 A' 点（此点上，$x = \pm x'$，$y = \pm y^0 = \pm[x' + K\varphi(x')]$），由此以“跳跃”的形式沿“迅速”运动的轨线 $y=$常数“跳到”相应的 $B(-x'', y^0)$ 点或 $B'(x'', -y^0)$点，然后重新开始“缓慢”运动，如此一直运动下去。为了寻求跳跃终点，在所研究之问题中，没有必要去研究“迅速”运动方程(10.28)，——它可以由跳跃过程中变量 y 的值（即电容 C 的电压 v）的不变条件，由“跳跃”的起点单值地确定出来，根据(10.27)这个条件可给出确定跳跃终点横坐标的方程：

$$x'' + K\varphi(x'') = -\{x' + K\varphi'(x')\}. \qquad (10.30)$$

显然，闭曲线 $ABA'B'A$（图529，6）是在任何初始条件下都将建立起来的极限环。此极限环也就是描绘多谐振荡器的“不连续”自振的数学图象，此种振动由“缓慢”运动（栅压 u 或 x 的变化速度为有限值）与“迅速”、“跳跃”运动（$\mu \to +0$ 时 $\dot{x} \to \infty$）周期地

---

1) 在曲线 $F(x, y) = 0$ 上，$F_x + F_y\left(\frac{dy}{dx}\right)_{F=0} = 0$，即$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{F=0} = -\frac{F_x}{F_y} = +F_x$，这是由于 $F_y = -1$ 的缘故。

交替组成. 可以证实,当 μ 很小时,在相平面上同样存在有极限环(图 530),与极限环 $ABA'B'A$ 很接近,并当 $\mu\to+0$ 时退缩到此极限环上(参看前一小节). 和从 A_0 点开始的相轨线(图529,6)

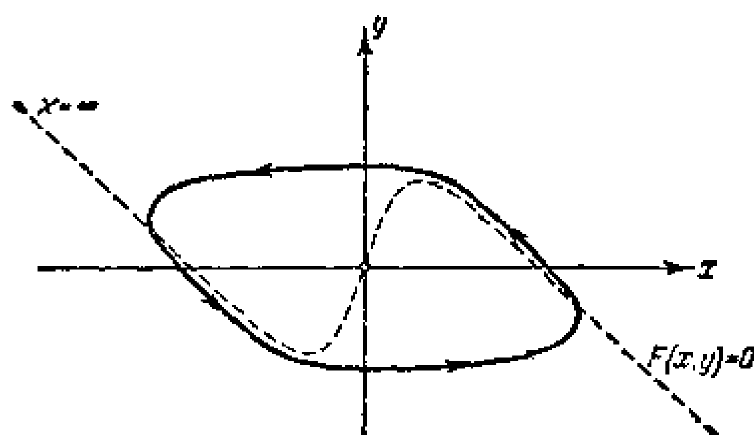


图 530

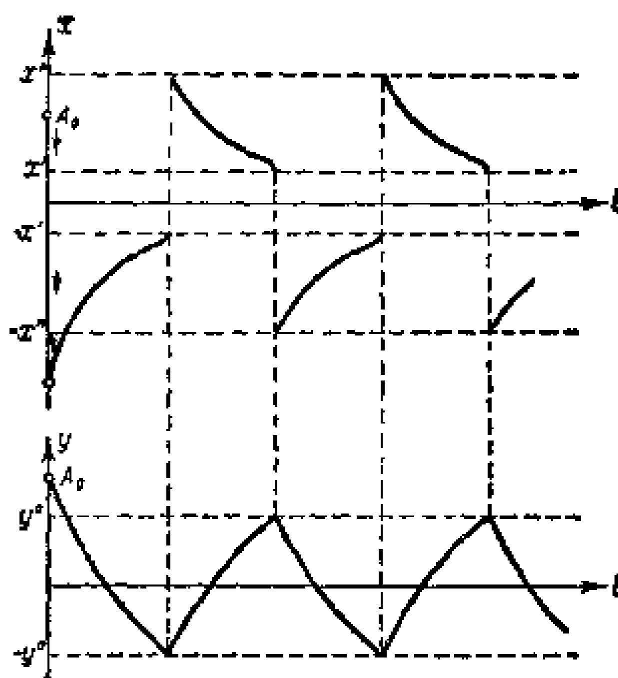


图 531

相对应的,变量 x 和 y 的振动波形图,定性地表示在图 531 上: 变量 x, 即栅压 u 的振动,具有“不连续的”性质;变量 y, 即电容器 C 的电压 v 的振动是连续的,并具有“齿型”的波形.

如果计算出相点沿极限环上的“缓慢”运动段 $B'A$ 和 BA' 上

运动所需的时间(跳跃的延续时间忽略不计)，显然，我们就得到自振的周期($\mu \to +0$ 时，或者说，在 μ 很小时的近似值)．在“缓慢”运动轨线 F^+ 上

$$dt_{新} = -\frac{1 + K\varphi'(x)}{x} dx,$$

因此，自振周期(在所研究的对称情况中，它等于相点沿段 $B'A$ 运动所需时间的两倍)为

$$\tau = 2\int_{x'}^{x''} \frac{1 + K\varphi'(x)}{x} dx$$

(采用无量纲时间单位)，或为

$$T = T_0\tau = 2C(R_a + R_g)\int_{x'}^{x''} \frac{1 + K\varphi'(x)}{x} dx$$

(采用普通单位)．

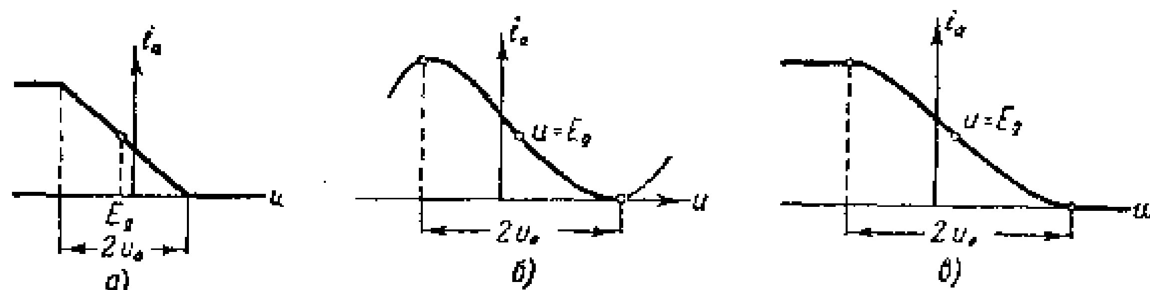


图 532

令电子管组特性曲线取某些具体表示式，我们来计算多谐振荡器的自振周期．当电子管具有分段线性特性曲线时(图532，a)，若取特性曲线下降段的“长度”的一半作为电压的比例尺 u_0，则

$$\varphi(x) = \begin{cases} +1 & 当\ x < -1\ 时, \\ -x & 当\ |x| < 1\ 时, \\ -1 & 当\ x > 1\ 时, \end{cases} \quad \varphi'(x) = \begin{cases} 0 & 当\ |x| > 1\ 时, \\ -1 & 当\ |x| < 1\ 时. \end{cases}$$

由此可得 $x' = 1$[1]，$x'' = 2K - 1$，于是根据上册第四章§8和第八章§5中所得的结果[2]，自振周期为

1) 当特性曲线为分段线性时，相点在缓慢运动后的跳跃始点为特性曲线的折点 $x = \pm 1$，因为寄生电容的可忽略条件对于所有的 $|x|<1$ 都不满足(在这里 $F'_x = K - 1>0$)，而只在 $|x|>1$(在这里 $F'_x = -1<0$)时，才满足．

2) 此表示式正是第八章§5第6小节中得到的自振周期的渐近展开式中的最大项；参看(8.60)．

$$T = 2C(R_a + R_g)\ln(2K - 1)。$$

当特性曲线以三次多项式逼近时（图 532，б），若取特性曲线互导等于零的两个电压之差的一半作为电压比例 u_0，则有：

$$\varphi(x) = -x + \frac{x^3}{3},\quad \varphi'(x) = x^2 - 1.$$

不连续自振的跳跃始点的横坐标可由下方程中得出：

$$1 + K(x^2 - 1) = 0,\text{ 即 } x' = \sqrt{\frac{K-1}{K}}.$$

此时，根据(10.26)，跳跃终点的横坐标 $\pm x''$ 决定于方程决定：

$$x'' + K\left(-x'' + \frac{x''^3}{3}\right) = -\left\{x' + K\left(-x' + \frac{x'^3}{3}\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{3}(K-1)\sqrt{\frac{K-1}{K}},$$

不难确信，此方程具有 x'' 的唯一实解：

$$x'' = 2\sqrt{\frac{K-1}{K}}.$$

因此

$$\tau = 2\int_{x'}^{x''}\left[Kx - \frac{K-1}{x}\right]dx = (3 - 2\ln 2)(K-1)$$

$$\approx 1.6(K-1)$$

以及

$$T \approx 1.6C(R_a + R_g)(K-1)^{1)}.$$

最后，我们来计算当特性曲线下降段为三次多项式时（图532，в）多谐振荡器自振周期。这种特性曲线，我们在第五章 § 12 中研究具有二个 RC 回路之振荡器和具有一个 RC 回路之多谐振荡器时曾经采用过。对于此种特性曲线，若取下降段“长度”的一半作

---

1) A. A. 道洛德尼钦（Дородницын）[52] 曾对三次特性曲线情况得出多谐振荡器自振周期的渐近展开式，若采用我们所用的符号，可将它写成形式：

$$\tau = 1.614(K-1) + 7.014(K-1)^{-1/3}\mu^{2/3} - \frac{11}{9}\frac{\mu}{K-1}\ln\frac{1}{\mu}$$

$$- \frac{\mu}{K-1}\left\{\frac{22}{9}\ln(K-1) - 0.087\right\} + \cdots$$

我们所得出的表示式 $\tau \approx 1.6(K-1)$ 为此展开式的最大项。

为电压比例尺 u_0，则有：

$$\varphi(x)=\begin{cases}+\dfrac{2}{3} & \text{当 } x<-1 \text{ 时},\\ -x+\dfrac{x^3}{3} & \text{当 } |x|\leqslant 1 \text{ 时},\\ -\dfrac{2}{3} & \text{当 } x\geqslant 1 \text{ 时};\end{cases}$$

$$\varphi'(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } |x|\geqslant 1 \text{ 时},\\ x^2-1 & \text{当 } |x|\leqslant 1 \text{ 时};\end{cases}$$

而 $x'=\sqrt{\dfrac{K-1}{K}}$（与上例相同），x'' 则决定于方程：

$$x''-\frac{2}{3}K=-\{x'+K\varphi(x')\}=\frac{2}{3}(K-1)\sqrt{\frac{K-1}{K}},$$

即

$$x''=\frac{2}{3}\left\{(K-1)\sqrt{\frac{K-1}{K}}+K\right\}^{1)}.$$

此时

$$\tau=2\int_{x'}^{1}\left\{Kx-\frac{K-1}{x}\right\}dx+2\int_{1}^{x''}\frac{dx}{x}$$

$$=1-(K-1)\ln\frac{K}{K-1}+2\ln\frac{2}{3}\left[(K-1)\sqrt{\frac{K-1}{K}}+K\right]$$

以及

$$T=C(R_a-R_g)\left\{1-(K-1)\ln\frac{K}{K-1}\right.$$
$$\left.+2\ln\frac{2}{3}\left[(K-1)\sqrt{\frac{K-1}{K}}+K\right]\right\}.$$

§6. 不连续机械振动

受到很大摩擦力之小质量的物体，在一定条件下可能作机械

1）在这里我们假设 $x''>1$；不难看出，若 $K>\frac{4}{3}$，则此条件满足。如果 $1<K<\frac{4}{3}$，则在多谐振荡器的自振过程中，电子管组将只在特性曲线的下降段上工作，从而自振周期将可以用上例中得出的公式来表示。

振动[69]，我们下面将研究这种振动．为了使问题提得具体些，我们假定，这里所指的是一种制动装置，其略图表示在图 533上[1]．对于此种装置，我们有如下运动方程：

$$J\ddot{\varphi} = -K\varphi + M(\Omega - \omega)$$

或与其等价的一阶方程组：

$$\dot{\varphi} = \omega,\ J\dot{\omega} = -k\varphi + M(\Omega - \omega), \qquad (10.31)$$

其中 φ 为制动片的转角(相对于弹簧力矩等于零的位置)，J 为制动片的惯性矩，k 为系统的弹性系数，Ω 为轴的角速度（下面我们设 $\Omega=$ 常数)，$M(\Omega-\omega)$为表示干摩擦力矩与相对速度 $\Omega-\omega$ 之间关系的函数(图 534)．

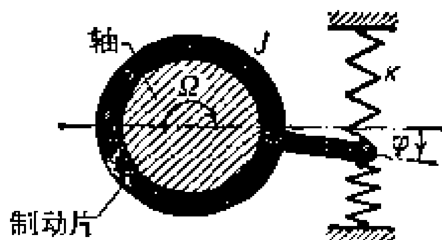


图 533

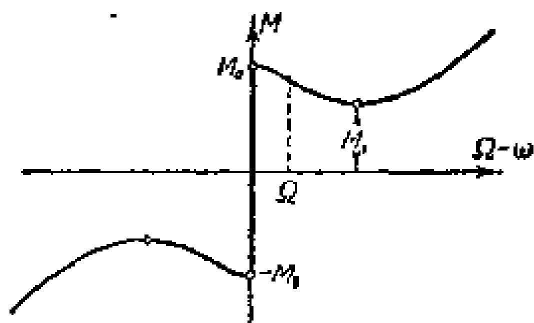


图 534

严格地讲，摩擦力矩M不仅是相对速度 $\Omega-\omega$ 的，而且还是角 φ 的函数；具体地说，当 $\Omega-\omega=0$ 时，

$$M = \begin{cases} M_0 & \text{当 } k\varphi > M_0 \text{ 时}, \\ k\varphi & \text{当 } |k\varphi| \leqslant M_0 \text{ 时}, \\ -M_0 & \text{当 } k\varphi < -M_0 \text{ 时}, \end{cases}$$

其中 M_0 为静摩擦力矩的最大值(亦即，制动片和轴没有相对运动时，摩擦力矩为弹簧力矩——$k\varphi$ 所平衡，若后者的绝对值不超过静摩擦力矩 M_0)．下面我们将假定特性曲线具有下降段，在其上摩擦力矩M随相对速度的增大而减小．只有当特性曲线具有此种下降段时，才能够解释为什么在我们所研究的这种机械系统中

1) 需要指出，这种装置乃是通常的制动装置和用以测量功率的普朗尼(Prony)制动块的模型(当然是极度简化的)．因此，下面有关此种系统中的振动所讲的一切，只能作为在制动器以及普朗尼制动块中，常观察到的振动的简化理论．

会出现自振.

我们所研究的系统具有唯一的平衡状态:

$$\varphi=\varphi_0,\quad \omega=0,$$

而且角 φ_0 在平衡状态中显然决定于条件:

$$k\varphi_0=M(\Omega).$$

则此平衡状不稳定(系统发生自激,从而其中将建立起自振),如果

$$M'(\Omega)<0$$

(参看上册第一章 § 6); 今后我们将认为此条件是满足的. 如果 $-M'(\Omega)\ll\sqrt{kJ}$, 从而摩擦特性曲线的非线性并不显著(在我们所关心的速度区间内), 则系统的自振将接近正弦形(这种振动可以应用前一章中所阐述过的范德波尔方法和庞卡莱方法进行计算).

现在我们来研究另外一种极限情形, 设制动片具有很小的惯性矩

$$J\ll\frac{[M'(\Omega)]^2}{k},$$

以后我们将会看到, 这样一来自振将是张驰的,亦即,显著不同于正弦形的振动. 在这种情况下, 振动过程将明显地分解为相互交替的两种显著不同类型的运动.

1) 在第一种运动的状态中, 在弹簧力矩为摩擦力矩所平衡(或几乎平衡), 虽然惯性矩 J 很小, 但系统仍具有比较小的加速度 $\dot{\omega}$, 这就使得在通过这些状态的运动中, 速度 ω 的变化比较缓慢. 在此区域内, $J\dot{\omega}$ 项很小:

$$J|\dot{\omega}|\ll k|\varphi|\approx|M(\Omega-\omega)|,$$

从而可以忽略不计. 因此, 这些 ω 变化比较缓慢的状态在相平面 φ, ω 上所对应的点,都位于曲线 F:

$$F(\varphi,\omega)\equiv-k\varphi+M(\Omega-\omega)=0$$

的微小邻域内,此曲线显然是"退化"系统($J=0$)的相线; 当 J 减小并趋向于零时,此邻域向曲线 F 退缩.

2) 在第二种运动的状态中, 摩擦力矩与弹簧力矩彼此不平

衡，由于制动片的惯性矩 J 相当小，因而加速度 $\dot{\omega}$ 非常大．速度 ω 变化非常迅速的这些状态，在相平面 φ, ω 上所对应的点，位于同一曲线 F 的某一微小邻域的外部，$J \to +0$ 时此邻域同样向 F 退缩．在这个速度 ω 变化迅速的区域内，当 $J \to +0$ 时，$\dot{\omega} \to \infty$（在曲线 F 左方 $\dot{\omega} \to +\infty$，在其右方 $\dot{\omega} \to -\infty$），而速度本身 $\dot{\varphi} = \omega$ 则保持有限值．在此区域内，当 $J \to +0$ 时

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{J\omega}{-k\varphi + M(\Omega - \omega)} \to 0,$$

即其中布满接近于垂直线 $\varphi =$ 常数的相轨线，相点沿这些垂直线"跳跃"地运动（当 $J \to +0$ 时 $\dot{\omega} \to \infty$）．

于是，我们得出极限情况 $J \to +0$ 的相平面之相轨线划分，如图 535 所示．在曲线 F 外的整个平面上，布满着"无限大"加速度的垂直相轨线，这些直线从无限远和从曲线 F 上具有

$$F'_\omega = -M'(\Omega - \omega) > 0$$

的那些段（即对应于摩擦特性曲线下降段开始，走向曲线 F 的其余段 F^+，后者即图 535 上以粗线表示的，它显然是"有限"加速度（即速度 ω 的变化比较慢）相轨线的极限位置．只有在"退化"系统的相线 F 的这些段 F^+ 上，实际系统所具有的小惯性矩 J 对于它的运动过程才是不重要的，因而系统的运动可以用"退化"方程组来描述，即

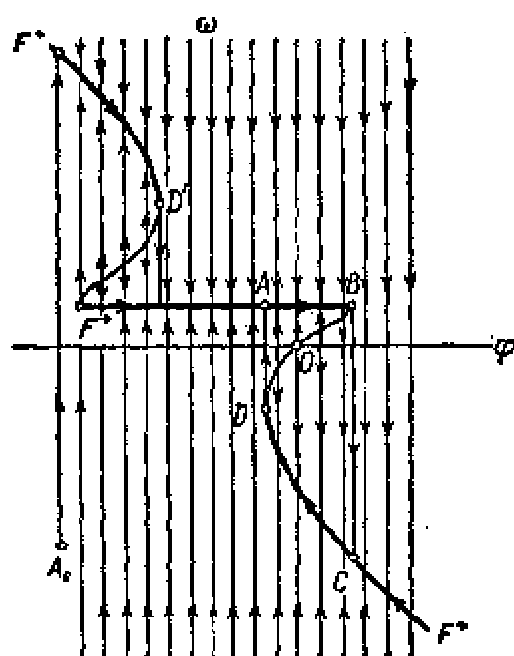


图 535

$$-k\varphi + M(\Omega - \omega) = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega. \qquad (10.32)$$

如果令 $J = 0$，即假定方程组(10.32)永远适用，则我们将得到"有缺陷的"一阶模型，其相线 F 含有相轨线的止点（图 535 中的 B, D, D' 各点）．这些点不是平衡状态，而另一方面，在曲线 F 上方程组(10.32)又没有从这些点走出的相轨线．可见，采用这种模型，我们就无法研究系统的运动．矫正

这种“有缺陷的”模型有两个途径：或者实际考虑制动片的小（甚至任意小的）惯性矩，或者对相点由相轨线的止点开始的跳跃，以相应的方式提出补充假设.

应指出，相轨线的止点在曲线 F 上划分出对应于摩擦特性曲线下降段的弧，当惯性矩 J 为任意小正值时，相点不可能在其附近运动. 换句话说，“退化”系统的相线含有这样的弧段，其上制动片的任意小的惯性矩是对于系统运动性质起重要决定作用的参数.

不难看出，根据“退化”系统的动力学(根据方程组(10.32))，我们所研究的系统不可能永远处于轨线 F^+ 上的点所对应的状态中；或迟或早，相点沿 F^+ 运动的结果，必将进入 B, D 或 D' 中的一个点，从而“跳入”“无限大”加速区域. 沿相应的跳跃轨线（BC, DA 或 $D'A'$)，相点以跳跃的方式迅速地重新返回到某一“有限”加速度轨线 F^+ 上，如此等等(当系统状态发生跳跃变化时，系统速度 ω 作跳跃式的变化，而坐标 φ 则保持不变). 结果，最多在两次有限加速度运动之后(例如从图 535 中的 A_0 点开始的运动)，系统中就建立起不连续的周期自振，这在相平面上对应于极限环 $ABCDA$（图 535)，它是由有限和“无限大”加速度运动交替组成的.

此极限环上的 AB 段对应于制动片被轴“牵动”的运动；制动片与轴同时以速度 Ω 作等速运动，这时弹簧发生变形——弹簧力矩增大，但与此同时，摩擦力矩也相应地增大，且总保持与弹簧力矩相等. 当弹簧力矩等于最大摩擦力矩时(在 B 点)，速度的大小和方向都发生跳跃式的改变，而弹簧张力则保持不变；与此相对应，相点由 B 点“跳到”C 点. C 点对应于同一摩擦力矩

$$M(\Omega-\omega_C)=M_0,$$

并重新位于速度 ω 变化比较缓慢的相轨线上——轨线 F^+ 上[1].

---

[1] 实际上，“跳跃”时弹簧的张力稍有变化，因为事实上跳跃不可能瞬时地完成，但惯性矩 J 越小，则跳跃的延续时间也越短，因而坐标 φ 以及弹簧张力的变化也就越小. 速度跳跃时(由 Ω 到 ω_c)，坐标 φ 变化值的量阶可以根据如下考虑进行大致的估值. 由于实际系统不能不具有一定的惯性矩 J，因而速度发生跳跃时，系统的动能也将有变化 $\frac{1}{2}J\Delta(\omega^2)$. 动能的这一变化量必须与弹簧张力和摩擦力所作的功:

$$\frac{1}{2}J\Delta(\omega^2)=\int_{\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi}[-k\varphi+M(\Omega-\omega)]\,d\varphi\approx\int_{\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi}[-M_0+M(\Omega-\omega)]\,d\varphi,$$

在这以后将发生由方程组（10.32）确定的速度和坐标的连续变化，一直到相点沿轨线 CD 运动到 $D(\omega=\omega_D)$ 点为止，此点对应于摩擦特性曲线上的极小值．由此状态重新出现速度的跳跃（由 ω_D 到 Ω），而坐标则保持不变（更准确些说，应当是几乎不变），$\varphi=\frac{M_1}{k}$，其中 M_1 为摩擦力矩的极小值（图 534）．以后的运动将以同样的方式进行；制动片在自振．角 φ 和速度 ω 之自振的波形图分别定性地表示在图 536 上．

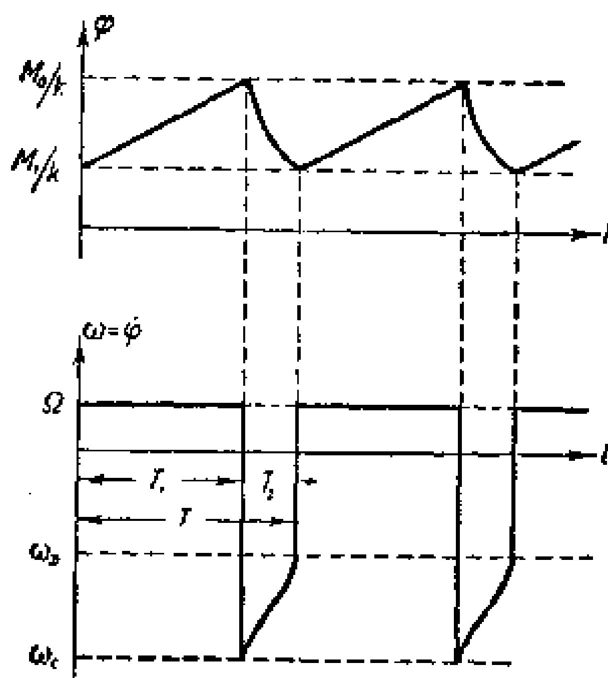


图 536

坐标 φ 的自振"振幅"可以根据最大和最小摩擦力矩之差（根据 M_0-M_1）进行计算；具体地说，它（振动全幅度的一半）等于

$$\varphi_0=\frac{1}{2}\,\frac{M_0-M_1}{k}.$$

为了计算周期，必须计算出相点沿轨线 F^+ 运动由 A 到 B 和由

相等因为在所研究的这种跳跃中

$$\varphi\approx\text{常数}=\frac{M_0}{k}.$$

如果引入摩擦力矩在跳跃过程中的平均值 $M_{平均}$，则 $\frac{1}{2}J\Delta(\omega^2)\approx-(M_0-M_{平均})\Delta\varphi$，由此可得到角速度跳跃时坐标 φ 的变化量：

$$\Delta\varphi\approx-\frac{1}{2}\,\frac{J\Delta(\omega^2)}{M_0-M_{平均}}.$$

C到D(图 535)所需的时间. 至于极限环上由B到C和由D到A这两段,那么在 $J\to+0$ 时相点将瞬时地通过它们,而当J足够小时通过它们的速度也非常大,以致对自振周期的计算并无显著影响. 由于在段 AB 上 $\dot{\varphi}=\Omega$,故通过它的时间等于:

$$T_1=\frac{M_0-M_1}{k\Omega}.$$

相点通过段 CD 的时间 T_2,可以通过对方程组(10.32)在此段上的积分来确定:

$$T=\int_{M_0/k}^{M_1/k}\frac{d\varphi}{\omega}=-\frac{1}{k}\int_{\omega_C}^{\omega_D}\frac{M'(\Omega-\omega)}{\omega}\,d\omega,$$

因为方程组(10.32)可以写成:

$$k\omega=-M'(\Omega-\omega)\frac{d\omega}{dt}. \tag{10.32a}$$

计算出 T_2(例如,用图解积分法)以后,我们将求出自振周期:

$$T=T_1+T_2.$$



图 537



图 538

前面已经讲过,实际上观察不到速度的瞬时变化,因为实际系统总是具有一定的(尽管是很小的,但却是有限的)惯性矩,从而使"跳跃"不是具有无限大的,而是非常大的,但是有限的加速度. 因此,当 $J\neq0$ 时,速度"迅速"变化的相轨线将不是直线,而必然稍微有些弯曲. 然而当惯性矩足够小,而弹簧力矩和摩擦力矩很大时,此种弯曲实际上

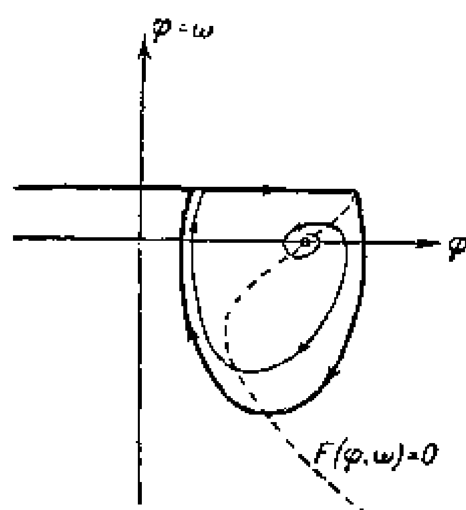


图 539

是完全观察不到的．但如果惯性矩增大，则过程的性质将显著变化．在图 537 和 538 上表示出对于不同的惯性矩用实验方法得出的制动片的振动曲线．制动片的惯性矩越大，曲线的形状就越加接近谐振动波形，于是“张弛摆”将变成弗罗德摆——似谐自振系统．根据大惯性矩的制动片的振动波形(图 538) 所绘制的相平面(图 539)，与此平面在 $J\to+0$ 的极限情况中的相轨线划分(图 535) 有显著的区别．制动片的相当大的惯性矩和缓了速度的跳跃．

§7．两个不连续电振荡发生器

与上面刚刚研究过的机械张弛系统极其相似的电系统，有最简单的不连续(张弛)电振动发生器：氖管电路(或电弧电路)和负阻管振荡器．

1. 氖管电路． 利用电流的跳跃假设，即假定氖管点燃和熄灭时，通过的电流发生跳跃的变化，而氖管(或电容器 C 上，亦是一样)的电压则保持不变，我们曾于第四章 §6(第 2 小节)中，研究过这种电路中的不连续振动．这个跳跃假设并不是当时所取一阶模型的推论(不是方程 (4.30) 的推论)，而是从电路中电流与电压的有限性这种补充物理概念出发得到的．

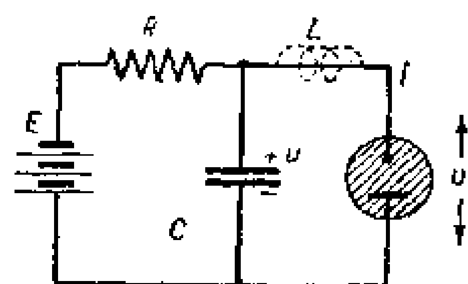


图 540

现在我们来简单地研究同一个电路，考虑其中一些重要的寄生参数(但认为它们是足够小的)，从而做为特例，可以得出通过氖管的电流强度在电容器 C 的电压保持“不变”的条件下所发生的“跳跃”乃是系统动力学的推论．若考虑图 540 上的氖管电路中以虚线所表示的小寄生电感 L[1]，则得出氖管电路的振动方程如下：

1) 在对于电路中的过程起重要作用的小寄生参数中，除安装电感外，尚需指出氖管中气体放电的惯性．此种惯性可以采用列入某种小的“等价”电感与氖管串联的方法来反映．下面我们就将认为，所谓 L 指的就是这种“等价”电感与安装寄生电感之和．

$$
\left.\begin{aligned}
C\frac{du}{dt} &= \frac{E-u}{R} - i,\\
L\frac{di}{dt} &= u - v,\\
i &= \varphi(v),
\end{aligned}\right\} \qquad (10.33)
$$

其中 $\varphi(v)$ 为表示通过氖管的电流强度与其电压 v 之关系的函数，即氖管的静态特性方程；其反函数，对于点燃的氖管已是单值函数，我们用 $v=\psi(i)$ 表示之．我们知道，氖管的特性曲线（如图 541 所示）具有下降段（$0<i<I_1$ 时）．下面我们将假设，在所研究电路中，由关系式：

$$
u=v,\quad i=\frac{E-v}{R}=\varphi(v)
$$

确定的平衡状态(u_0, i_0)是唯一的，位于此下降段上，因而是不稳定的．

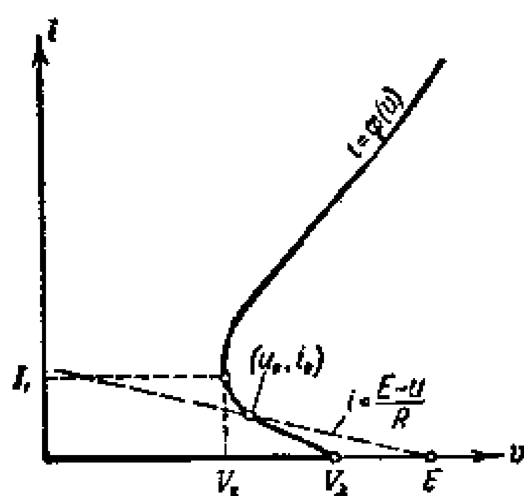


图 541

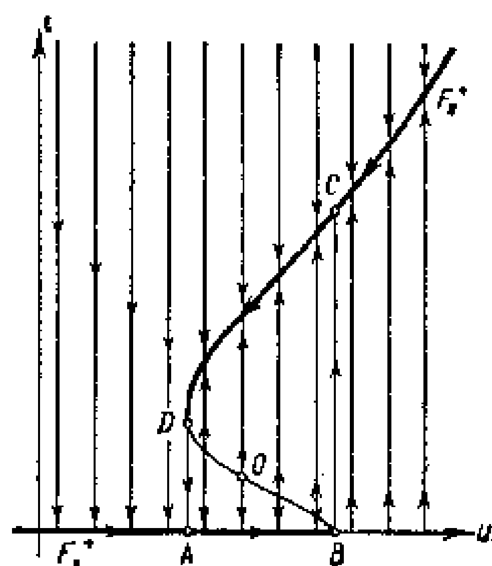


图 542

对此平衡状态所列出的特征方程，不难看出，将具有如下形式：

$$
LCR\lambda^2+[L+CR\psi'(i_0)]\lambda+R+\psi'(i_0)=0;
$$

因此，平衡状态(u_0, i_0)，如果位于特性曲线的下降段上，而且是唯一的，即 $-R<\psi'(i_0)<0$，则当 $L<-CR\psi'(i_0)$时（此条件当 L 足够小时显然成立）是不稳定的．为了使平衡状态是唯一的，而且位于下降段上，必须使 E 和 R 足够大（$E>V_3$，$R>R_{临界}$；关于此问题的详细阐述参看上册第四章 §7 第 2 小节）．

下面我们来作出相平面 u, i 划分成方程组(10.33)的轨线的极限情况($L \to +0$),首先画出曲线 F:

$$F(u, i) \equiv u - \psi(i) = 0$$

"退化"模型的相线(图 542),从中划分出段 F_1^+ 和 F_2^+,在这两段上满足小寄生电感 L 的可忽略条件:

$$F_i' = -\psi'(i) < 0.$$

在此曲线外部,当 $L \to +0$ 时,$\frac{di}{dt} \to \infty$(在曲线 F 右侧 $\frac{di}{dt} \to +\infty$,在其左侧$\frac{di}{dt} \to -\infty$),而 $\frac{du}{dt}$则为有限值. 因此,相平面上位于曲线 F 外部的区域, 当 $L \to +0$ 时就是系统状态的"跳跃"变化区域,其中布满电流强度跳跃的垂直相轨线——轨线 $u =$ 常数,它们由无限远以及曲线 F 上对应于氖管特性曲线下降段开始,走向曲线 F_1^+ 和 F_2^+. 换句话说,在 F_1^+ 和 F_2^+ 以外的区域中, 通过氖管的电流强度发生跳跃, 与此同时电容器 C 上的电压 u 保持不变(与此相对应,当 L 充分小时, 在此区域内电流强度 i 发生极为迅速的变化,而电压 u 则几乎不变,因为这些迅速运动的相轨线当 L 很小时接近于直线 $u =$ 常数). 当 $L \to +0$ 时系统状态的"缓慢"变化, (即电流强度 i 和电压 u 具有有限变化速度之状态的变化),只能发生在曲线 F_1^+ 和 F_2^+ 上(更准确些,当 L 很小时在这些曲线的附近). 在这里,电路中的振动可以满意地用退化系统 ($L = 0$)的方程:

$$i = \varphi(u),$$

$$RC\frac{du}{dt} = E - u - R\varphi(u),$$

来描述.

由于在系统状态的"缓慢"变化之轨线 F_1^- 和 F_2^+ 上没有平衡状态,相点沿着它们运动时分别走向 B 和 D 点,并由这些点开始电流强度的跳跃,因而在任何初始条件下,系统中都将建立起不连续(张弛)自振,后者在相平面上对应于极限环 $ABCDA$ (图 542),在这一振动中电流强度 i 具有不连续性质,而电压 u 的振动则呈"齿

型"波形(图 543). 我们不准备计算自振的振幅和周期,因为它们显然可用上册第四章 § 6 中所得出的公式来表达.

由此可见，在所研究的电路中，安装电感和氖管中气体放电的惯性，对于电路中振动过程的进行乃系重要的因素(尽管它们很小). 只有考虑到它们以后，我们所建立的动力学模型才能足够完全地反映出电路的动力学，才使我们有可能不必利用引入一些补充的讨论或假设，来研究电路中的振动，同时所得的结果在定性上和一定程度的定量上都能与实验资料相吻合.

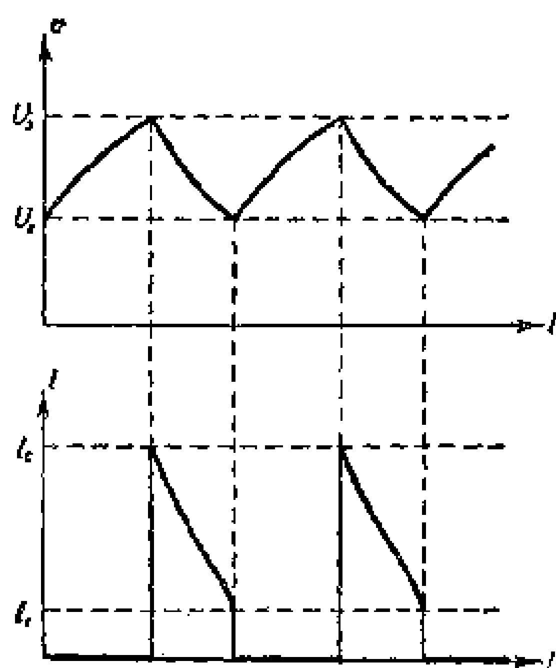


图 543

2. 负阻管不连续振荡器. 负阻管不连续张弛振荡器的电路图表示在图 544 上;其振动(考虑小寄生电容 C_a)由下列方程组描述:

$$\left.\begin{aligned} L\frac{di}{dt} &= E_a - u - Ri, \\ C_a\frac{du}{dt} &= i - i_a, \\ i_a &= \varphi(u), \end{aligned}\right\} \qquad (10.34)$$

其中 $i_a = \varphi(u)$ 为四极管特性方程(四极管的这种特性曲线定性地表示在图 545 上;很重要的特点在于它具有下降段：当 $U_1 < u < U_2$ 时 $\varphi'(u) < 0$)[1].

---

1) 若忽略寄生电容 C_a, 则得出一阶模型, 其相线(电压 u 的曲线)将含有相轨线的止点 $u = U_1$ 和 $u = U_2$. 这种模型仍然是"有缺陷的", 这里所指的是利用它无法研究系统的振动、甚至无法定性地解释电路中的振动规律. 为了研究负阻管振荡器中的振动, 必须对此种模型补充以相应的跳跃假设, 或者实际考虑进去重要的寄生参数中的某一参数(电路中的这种参数就是寄生电容 C_a).

振荡器的平衡状态显然决定于方程：

$$i=\frac{E_a-u}{R}=\varphi(u).$$

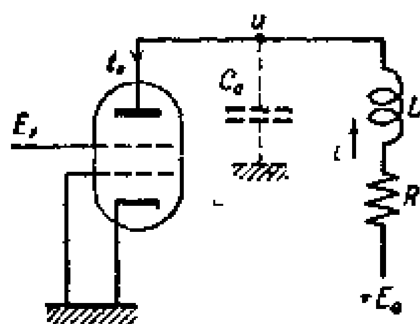


图 544

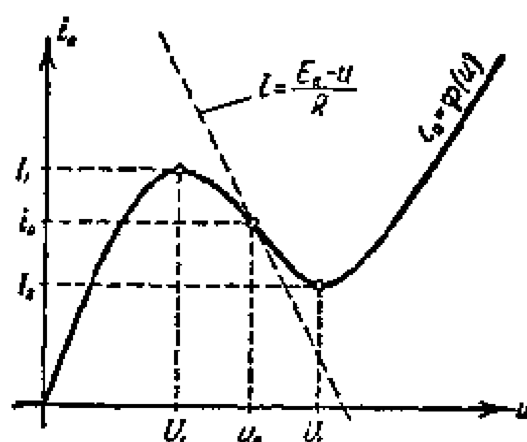


图 545

以后我们将假设电路参数 E_a, R 的数值使得电路具有唯一的平衡状态(u_0, i_0)，且位于四极管特性曲线的下降段上(图 545)。此时，此平衡状态不稳定，因为 C_a 足够小，于是电路将发生自激。

不难看出，对应于振荡器平衡状态(u_0, i_0)的特征方程可写成如下形式：

$$\begin{vmatrix} L\lambda+R & 1 \\ -1 & C_a\lambda+\varphi'(u_0) \end{vmatrix} \equiv C_aL\lambda^2+[C_aR+L\varphi'(u_0)]\lambda+1+R\varphi'(u_0)=0.$$

如果平衡状态位于特性曲线的下降段上而且是唯一的，则有 $-\frac{1}{R}<\varphi'(u_0)<0$；因此，此平衡状态当 $C_a<-\frac{L}{R}\varphi'(u_0)$ 时(此条件在 C_a 足够小时是满足的)不稳定。

为了研究 C_a 很小时电路的振动，我们作出相平面 u, i 在极限情况 $C_a\to+0$ 中的轨线划分，如图 546 所示。在以方程 $F(u,i)=i-\varphi(u)=0$ 决定之曲线 F 的外部，即"退化"模型$(C_a=0)$的相线外部，四极管电压 u 在寄生电容 C_a 足够小时的变化速度可以任意大：$C_a\to+0$ 时 $\frac{du}{dt}\to\infty$，而且在曲线 F 的上方 $\frac{du}{dt}\to+\infty$，在其下方 $\frac{du}{dt}\to-\infty$，而 $\frac{di}{dt}$ 则处处都是有限的。因此，在相平面的这一区域内布满轨线 $i=$ 常数，相点沿着这些轨线以

"无限大"相速度运动，这就是四极管电压 u 的"跳跃"轨线(电流强度 i 保持不变)． 这些轨线由无限远以及曲线 F 上对应于特性曲线下倾部分的段 BD 开始，走向曲线 F 的其余部分 F_1^+ 和 F_2^+，在这两部分上满足小寄生电容 C_a 的可忽略条件：

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -\varphi'(u) < 0.$$

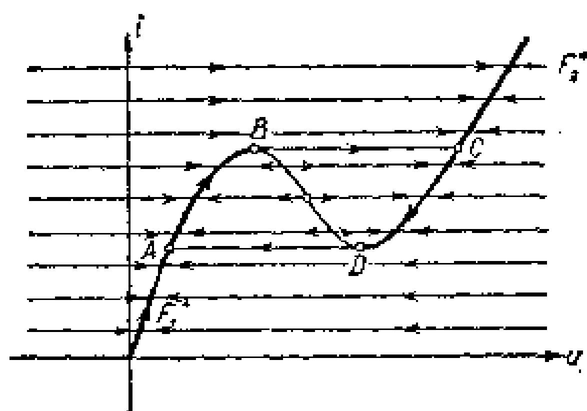


图 546

因此，相点由于"跳跃"的结果落到曲线 F_1^+ 或 F_2^+ 上以后，将以电压 u 的有限变化速度(甚至在 $C_a\to+0$ 时)沿该曲线运动，即曲线 F_1^+ 和 F_2^+ 乃是系统状态的"缓慢"变化轨线[1]．由于在 F_1^+ 和 F_2^+ 上满足寄生电容 C_a 的可忽略条件，因而小电容 C_a 在这里可以忽略，于是电路的振动方程(当四极管电压"缓慢"变化时)可写成如下一阶方程形式：

$$i=\varphi(u),\quad L\frac{di}{dt}+Ri=E_a-u.$$

在轨线 F_1^+ 和 F_2^+ 上 $\frac{du}{dt}\neq0$，$\frac{di}{dt}\neq0$ (这里没有平衡状态)，而且在 F_1^+ 上 $\frac{du}{dt}>0$，在 F_2^+ 上 $\frac{du}{dt}<0$；因此，相点沿轨线 F_1^+ (沿轨线 F_2^+)运动时，经过有限时间间隔后，必落到 B 点(D 点)上，由此再沿相应的跳跃轨线 $i=$常数"跳到"轨线 F_2^+的 C 点(轨线 F_1^+ 的 A 点)．由此可以得出结论：在相平面上存在有极限环 $ABCDA$，系统的所有轨线都将进入这一极限环．与此相对应，在任何初始条件下，电路中都将建立起自振，在振动过程中，不同于氖管电路，电压 u 的振动具有不连续性质，而电流强度 i 的振动则呈"齿型"

1) 更准确些说，系统状态"缓慢"变化相轨线位于曲线 F_1^+ 和 F_2^+ 的微小邻域内，并当 $C_a\to+0$ 时向后者趋近．曲线 F_1^+ 和 F_2^+ 本身在 $C_a\neq0$ 时则为垂直切线的等倾线．

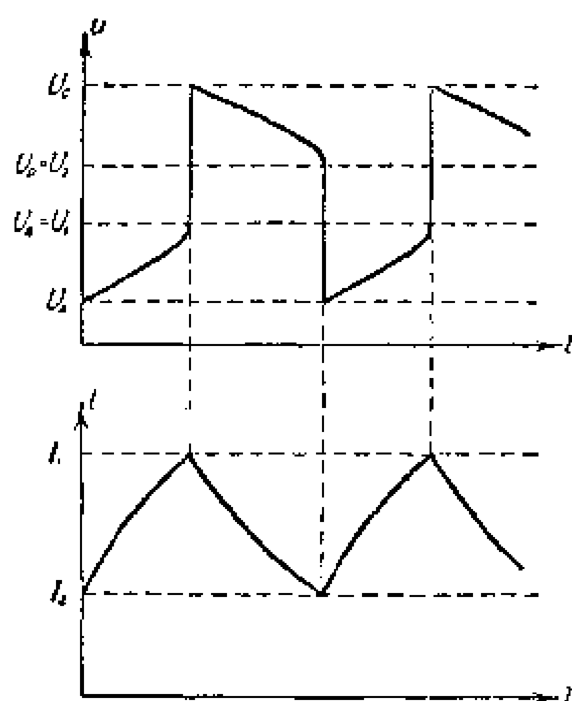


图 547

波形(图 547)[1]. 电流强度和电压的最大振动幅度显然分别等于 $I_B - I_A = I_1 - I_2$ 和 $U_C - U_A$. 自振周期 T 由相点在"缓慢"运动轨线 F_1^+ 和 F_2^+ 的两段 AB 和 CD 上运动所需的时间构成(由 B 跳跃到 C 和由 D 到 A 所需时间忽略不计),不难看出,它等于

$$T = L\int_{U_A}^{U_B} \frac{\varphi'(u)du}{E_a - u - R\varphi(u)} + L\int_{U_C}^{U_D} \frac{\varphi'(u)du}{E_a - u - R\varphi(u)}$$

(此表示式中的积分,举例来说,当四极管特性曲线以分段线性函数近似表示时,可以很容易计算出).

§ 8. 弗吕豪夫(Frühauf)电路

现在我们来研究一种由弗吕豪夫提出的张弛振荡器电路[155,142]. 在此电路中(图 548),很重要的一点在于电子管本身构成闭合电路的区段,因而必须注意电子管与电阻 R 之间的电压分配. 这就使我们必须去考虑在此电路中起原则性作用的屏极反应. 因此,在研究弗吕豪夫电路时,我们将假定屏流不仅是栅压,而且还是屏压的函数. 具体地说,我们将设屏流是所谓"控制"电压 $u_{控} = u_g + Du_a$ 的单值单调增函数,即:

$$i_a = f(u_g + Du_a),$$

1) 对于所有由于忽略寄生参数而归结为一阶微分方程的电张弛系统来说,这种图象是共同的:如果电路的非线性元件的伏安特性 $i=\varphi(u)$ 为 N 形(如图 546 所示类型),则在电路的不连续振动中,将出现电压 u 的跳跃,而电流强度 i 则将连续地变化. 反过来,当非线性元件的特性 $i = \varphi(u)$ 为"S"形(类似氖管的特性曲线)时,电压 u 将连续变化,而电流强度 i 的振动则只有不连续性质.

其中D为电子管的渗透率——电子管放大系数的倒数（$D<1$）。此外，下面我们将假设此函数的反函数

$$u_g + Du_a = U(i_a)$$

也是单值的。

1. "退化"模型. 若忽略所有的寄生参数（包括寄生电容）和栅流，并认为两电子管是完全一样的，则得出描述电路中振动的方程组：

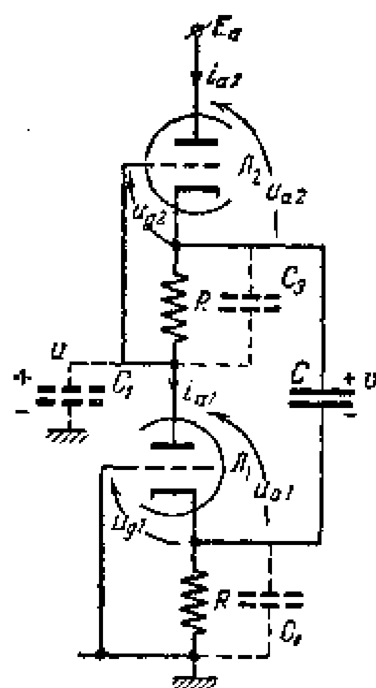


图 548

$$i_{a1} = f(u_{g1} + Du_{a1}),$$
$$i_{a2} = f(u_{g2} + Du_{a2}),$$
$$C\frac{dv}{dt} = i_{a2} - i_{a1},$$
$$u_{g1} = -Ri_{a2},\ u_{g2} = -Ri_{a1},$$
$$v = u_{a1} - u_{g2} = E_a - u_{a2} + u_{g1},$$

其中 u_{g1}, u_{g2}, u_{a1}, u_{a2} 分别为电子管 $Л_1$ 和 $Л_2$ 上的栅压和屏压（以两电子管的阴极做为计算起点）。

引入无量纲电流：

$$x = \frac{i_{a1}}{I_0} \text{ 和 } y = \frac{i_{a2}}{I_0},$$

其中 I_0 为饱和电流或某种别的电流强度比例尺。此时

$$u_{g1} = -RI_0 y,\ u_{g2} = -RI_0 x,$$
$$u_{a1} = RI_0\frac{\phi(x)+y}{D},\ u_{a2} = RI_0\frac{\phi(y)+x}{D},$$

其中

$$\phi(z) = \frac{1}{RI_0}U(I_0 z)$$

为电子管的无量纲（反）特性，表示无量纲控制电压 $\frac{u_g + Du_a}{RI_0}$ 与无量纲屏流 $\frac{i_a}{I_0}$ 的依赖关系：在电容器C上的电压

$$v = \frac{RI_0}{D}\{\psi(x) + Dx + y\}$$

$$= \frac{RI_0}{D}\left\{\frac{DE_a}{RI_0} - \psi(y) - Dy - x\right\}, \qquad (10.35)$$

$$RC\frac{dv}{dt} = RI_0(y - x);$$

利用(10.35),并从中解出导数,则有:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{D}{CR}\frac{x-y}{\Delta(x,y)}\{1 + D + \psi'(y)\}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{D}{CR}\frac{x-y}{\Delta(x,y)}\{1 + D + \psi'(x)\}, \end{aligned}\right\} \qquad (10.36)$$

其中

$$\Delta(x, y) = [D + \psi'(x)][D + \psi'(y)] - 1. \qquad (10.36a)$$

从得出的诸方程中可以看出,我们所研究的乃是一阶系统(1/2 自由度系统),因为根据(10.35)变量 x 和 y 以如下关系式彼此联系着:

$$\Phi(x, y) \equiv \psi(x) + \psi(y) + (1 + D)(x + y) = \frac{DE_a}{RI_0}, \quad (10.37)$$

而方程(10.36)则彼此等值(其中一个方程可由另一个方程和关系式(10.37)中导出).

由于 y 或 x 难以消除,且变量 x 和 y 完全等价性,我们将采用相点沿画在平面 x, y 上(更确切地说,在其 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ 象限上)的相线 Φ:

$$\Phi(x, y) = \frac{DE_a}{RI_0}$$

上的运动来描述系统的振动. 这一相线,以及方程(10.36)的轨线划分,都关于分角线 $y = x$ 对称. 其次,在此相线上

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + D + \psi'(x)}{1 + D + \psi'(y)} < 0, \qquad (10.36b)$$

即 y 随着 x 的增加而减小,因为 $\psi'(x) > 0$ 且 $\psi'(y) > 0$; 因此,若 ψ' 为连续函数(我们将如此假设),则相线 Φ 是处处光滑的曲线,而且不可能是闭的. 与此相对应,我们所研究的这种电路也不可能作连续周期振动,因为方程组(10.36)的右端是相线 Φ 的点的单

值函数.

下面我们来研究相点在相线 Φ 上的运动. 首先我们指出，方程组(10.36)具有唯一的平衡状态(x_0, y_0)，位于分角线 $x=y$ 上，并根据(10.37)，此平衡状态由方程：$\psi(x_0)+(1+D)x_0=\frac{1}{2}\frac{DE_a}{RI_0}$ 确定. 其次,根据方程组(10.36),相点在相线 Φ 的具有 $\Delta(x,y)>0$ 的各点上，将沿趋向平衡状态(x_0, y_0)的方向运动,而在具有 $\Delta(x,y)<0$ 的各点上,则沿离开此平衡状态的方向运动. 因此,电路的平衡状态稳定,若 $\Delta(x_0,y_0)>0$；不稳定,若 $\Delta(x_0,y_0)<0$.

在平面 x, y 上画出对分角线 $x=y$ 对称的曲线

$$\Delta(x,y)=0, \qquad (10.38)$$

为简单起见称之为曲线 Γ. 若此曲线存在[1],则可能出现两种情形：

1）参数 $\frac{DE_a}{RI_0}$ 所取的数值使得相曲线 Φ 不与曲线 Γ 相交. 此时在 Φ 上到处都有 $\Delta(x,y)>0$,于是相点(因而也就是所研究的系统)在任何初始条件下,随着 t 的增加都将趋近于平衡状态(x_0, y_0)[2]

2）参数 $\frac{DE_a}{RI_0}$ 所取的数值使得相线 Φ 与曲线 Γ 相交. 在这种情况下，在曲线 Φ 上存在有和直线 $x=y$ 彼此对称的诸点 $\gamma(x',y')$，在其上有 $\Delta(x,y)=0$，因此它们将是方程组(10.36)的相轨线的止点. 这些点不是平衡状态,而与此同时,相点在任意初始条件都趋向它们(但在曲线 Φ 上却没有从 γ 点走出的轨线).

相线上出现轨线的止点,和在所有情形中一样,说明所取模型是“有缺陷”的，说明在电路中有的参数对电路中的振动起重要作

1）当 $\psi_{极小}<1-D$ 时此曲线显然存在,因为此时在分角线 $x=y$ 上有这样一些点,其中 $\Delta(x,y)<0$,而另一方面在坐标轴附近(当 x 或 y 很小时)$\Delta(x,y)>0$,因为在那里 $\psi'(x)$ 或 $\psi'(y)$ 可以是任意大的;因此,根据函数 $\Delta(x,y)$ 的连续性必存在有 $\Delta(x,y)=0$ 的点之几何轨迹,即曲线 Γ. 如果电子管特性具有饱和电流 I_s，则当 $z\to I_s/I_0$ 时 $\psi'(z)\to+\infty$，此时曲线 Γ 将是闭的.

2）如果曲线 Γ 不存在,则对于任意的 E_a 都将得出此种结果，因为此时在任意相线 Φ(对于任意 E_a)的所有点上,都有 $\Delta(x,y)>0$.

用，但由于我们的"幼稚"("由于它们的微小")而被忽略；最后，这亦说明有出现不连续振动的可能性．为了对后者进行研究，我们必须或考虑重要小参数，或对我们所取的"有缺陷"的一阶模型，补充以一定方式表述的跳跃假设．

2. 跳跃假设． 首先我们采用对一阶"退化"模型（方程组(10.36)）补充以跳跃假设的方法．为了确定起见，令相线Φ与曲线Γ相交于两点：$\gamma_1(x_1', y_1')$和$\gamma_2(x_2', y_2')$，而且$x_2' = y_1'$和$y_2' = x_1'$（图549）．由于这些相轨线的止点总是相线线段的边界点，在此相线上为我们所忽略的小参数（或更确切地说，是其中的某些小参数）对振荡器中的振动起重要作用，故所取的"退化"模型在此曲线上不适于描述电路中的振动，因此首先应当从相线Φ的三段$A_1\gamma_1$，$\gamma_1\gamma_2$和γ_2A_2中，指出在那些段上，寄生参数很小时，方程组(10.36)能以一定的准确度反映电路的振动．

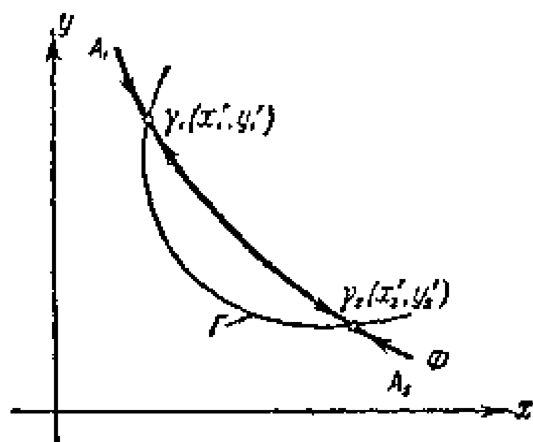


图 549

关于电路中振动的性质，我们将采用如下假设：

1) 在相线Φ的满足$\Delta(x, y) > 0$的段$A_1\gamma_1$和$A_2\gamma_2$上，被我们忽略的小寄生参数对于电路中的过程不起重要作用，因而在那里电路状态作"缓慢"变化，后者由方程组(10.36)所描述．与此相反，在段$\gamma_1\gamma_2$上，只发生相点的"迅速"运动，使它离开$\gamma_1\gamma_2$；在那里方程组(10.36)不但在定量上而且在定性上也不能反映电路的振动规律[1]．

---

1) 在第4小节中，将提出此假设的根据，方法是考虑重要的寄生电容来建立电路的"合格的"模型．可以提这样一点做为假设的某种依据，这就是，我们所选取的一阶模型显然是合格的（在其相线上没有相轨线的止点），若模型的整个相线位于$\Delta(x,y)>0$的区域中．而段$A_1\gamma_1$和$A_2\gamma_2$恰好位于此区域内．

2）当相点根据方程（10.36）沿相线 Φ 的 $A_1\gamma_1$（或 $A_2\gamma_2$）段运动而到达 γ_1（或 γ_2）以后，它将瞬时跳跃到相线 Φ 的某一段 $A_1\gamma_1$（或 $A_2\gamma_2$）内部的 $B_1(x_1'', y_1'')$（或 $B_2(x_2'', y_2'')$）点，后者由下述跳跃条件确定：

$$\left.\begin{aligned} y'' + \phi(x'') + Dx'' &= y' + \phi(x') + Dx', \\ x'' + \phi(y'') + Dy'' &= x' + \phi(y') + Dy', \\ \text{而且}\qquad \Delta(x'', y'') &> 0. \end{aligned}\right\} \tag{10.39}$$

这些跳跃条件通常可由电路中电流及电压的有限性假设中得出，由此假设中可以推导出，电容器 C 上的电压 v（参看(10.35)）在电子管屏流发生跳跃时必须保持不变（提醒一下，x 和 y 分别正比于 i_{a1} 和 i_{a2}）。

如果方程组(10.39)能根据给定的跳跃起点 γ（根据 γ_1 或 γ_2），单值地确定位于段 $A_1\gamma_1$ 或 $A_2\gamma_2$ 内部的跳跃终点 B（B_1 或 B_2），则采用我们对振动性质所作的假设，就能够研究电路中由相线 Φ 的段 $A_1\gamma_1$ 和 $A_2\gamma_2$ 的诸点所表示的状态开始的振动．电路的这些振动显然将是周期的和不连续的．

至于曲线（B）的实分枝——当参数 $\frac{DE_g}{RI_0}$ 取所有可能的数值时，根据(10.39) 与 γ 点相对应的 B 点的集合——的存在性和数目，则在最一般的情形下，我们还无法说出什么．如果曲线（B）存在，则它对于对角线 $x=y$ 对称，并在后者的诸点上与曲线 Γ 相切；除此而外，它将是闭的（若电子管的特性曲线具有饱和）．我们还指出，方程组(10.39)的前两个方程在平面 x, y 上，除曲线(B)外，还确定双重曲线，后者与曲线 Γ 相重合．但曲线 Γ 的诸点并不位于 $\Delta(x, y)>0$ 的，区域

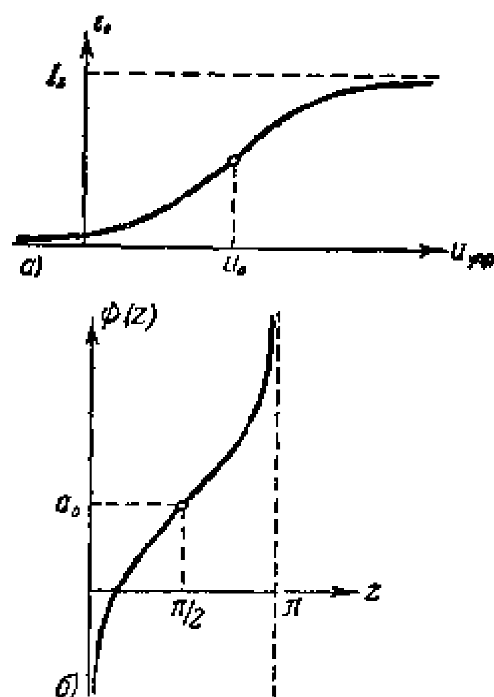


图 550

内，因此可以不必进行研究。

根据给定点 γ（根据给定的跳跃起点），如果方程组(10.39)确定出若干个 B 点，则必须对跳跃假设提出补充规定，以使 γ 点和 B 点彼此间有单值的对应。

3. 电路的不连续振动. 为了对此类振动作进一步的研究，必须给出电子管屏流特性曲线的具体解析表达式. 我们将以如下函数逼近特性曲线，即(图 550, a)：

$$i_a = \frac{I_s}{2} + \frac{I_s}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi S}{I_s}(u_{控} - u_0),$$

其中 I_s 为饱和电流，S 为特性曲线的最大互导，u_0 为使 $i_a = \frac{1}{2}I_s$ 和 $\frac{di_a}{du_{控}} = S$ 的控制电压值. 由此方程中解出控制电压 $u_{控} = u_g + Du_a$，并设电流强度比例常数为 $I_0 = \frac{I_s}{\pi}$，即

$$x = \pi\frac{i_{a1}}{I_s},\ y = \pi\frac{i_{a2}}{I_s}\ (0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi),$$

则得到电子管的折算(反)特性曲线为：

$$\frac{u_{g1} + Du_{a1}}{RI_0} = \psi(x) = a_0 - a\operatorname{ctg} x,$$

$$\frac{u_{g2} + Du_{a2}}{RI_0} = \psi(y) = a_0 - a\operatorname{ctg} y,$$

其中 $a = \frac{1}{RS}$ 和 $a_0 = \frac{\pi u_0}{RI_s}$；而且 $\psi' \geqslant a$ (图 550, 6). 此时，根据(10.36)，(10.37)，(10.38)和(10.39)可以得出：

相线 Φ 的方程为

$$(1 + D)(x + y) - a(\operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y) = b, \qquad (10.37')$$

其中

$$b = \frac{\pi DE_a}{RI_s} - 2a_0;$$

相点沿相线的运动方程为：

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{x - y}{\Delta(x, y)}\left\{1 + D + \frac{a}{\sin^2 y}\right\},$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{x - y}{\Delta(x, y)}\left\{1 + D + \frac{a}{\sin^2 x}\right\}, \Bigg\} \qquad (10.36')$$

其中 $\tau = \frac{Dt}{RC}$ 为新的无量纲时间；

曲线 Γ——跳跃起点的轨线——的方程为

$$\Delta(x, y) \equiv \left(D + \frac{a}{\sin^2 x}\right)\left(D + \frac{a}{\sin^2 y}\right) - 1 = 0, \quad (10.38')$$

以及跳跃条件为:

$$\left.\begin{aligned} y'' - a\operatorname{ctg} x'' + Dx'' &= y' - a\operatorname{ctg} x' + Dx', \\ x'' - a\operatorname{ctg} y'' + Dy'' &= x' - a\operatorname{ctg} y' + Dy'. \end{aligned}\right\} \quad (10.39')$$

由于屏流只能在 $0 \leqslant i_a \leqslant I_s$ 范围内变化，故在平面 x, y 上只有属于正方形 $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$ 的那些点才具有物理意义．同时不难看出，当参数 b 取任意值时相线 Φ 都通过此正方形的顶点 $A_1(0, \pi)$ 和 $A_2(\pi, 0)$（图 551），而且当 $b = \pi(1 + D)$ 时，相线 Φ 为直线 $x + y = \pi$．其次，由于 $\Delta(x, y) \geqslant \Delta\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (D + a)^2 - 1$，故当 $D + a < 1$，即

$$RS(1 - D) > 1$$

时，由方程 (10.38) 确定的曲线 Γ 存在；并为一闭曲线，且关于直线:

$$x = y; \quad x + y = \pi;$$

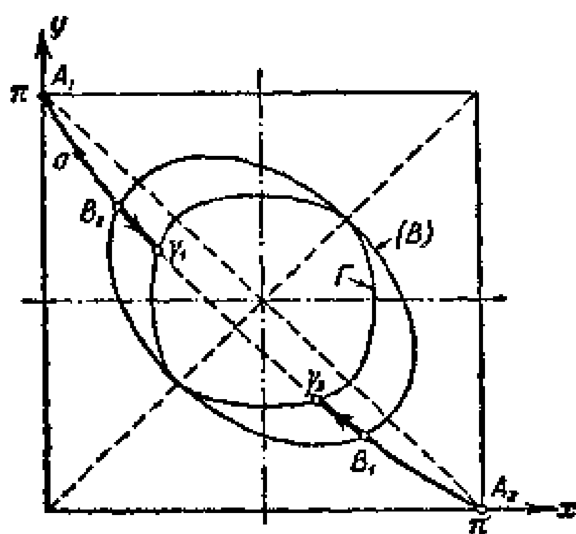


图 551

$$x = \frac{\pi}{2};\ y = \frac{\pi}{2}$$

对称．当 $D + a < 1$ 时，由方程组(10.39′)确定的曲线(B)同样存在，位于 $\Delta(x, y) > 0$ 的区域里，即曲线 Γ 的外部，亦为一闭曲线，并关于直线 $x = y$ 以及 $x + y = \pi$ 对称，同时每一个跳跃起点 γ 都有一唯一跳跃终点 B 在分角线 $x = y$ 的另一侧与之对应．

因此，相点的运动（为确定起见设其由 a 点开始）具有如下性质(图 551)：由 a 点开始运动后，相点沿相线 $A_1\gamma_1$ 到达 γ_1 点，由此以跳跃的方式转到相线 $A_2\gamma_2$ 上的 B_1 点．然后沿曲线 $A_2\gamma_2$ 运动，重新到达曲线 Γ 上的 γ_2 点，由此跳跃到 B_2 点，然后沿相线 $A_1\gamma_1$ 运动到 γ_1 点，如此一直运动下去．这样一来，电路中就建立起变量 x 和 y（即电子管屏流和电阻 R 上的电压）的周期性不连续振动，对应于"不连续"极限环 $B_1\gamma_2 \overset{\div}{\longrightarrow} B_2\gamma_1 \overset{\div}{\longrightarrow} B_1$，后者由两段"缓慢"运动轨线 $B_1\gamma_2$ 和 $B_2\gamma_1$ 以及两个跳跃轨线 $\gamma_1 \overset{\div}{\longrightarrow} B_1$ 和 $\gamma_2 \overset{\div}{\longrightarrow} B_2$ 组成．

下面我们来探讨一下，在什么参数值下可能出现不连续振动．显然为此必须：1）曲线 Γ 存在（具有实分枝）；2）相线 Φ 的方程(10.37′)中的常数 b 必须取这样的数值，使得相线 Φ 与曲线 Γ 相交．我们已经看到，如果

$$a < 1 - D,$$

则曲线 Γ 存在．如果由关系式

$$x_0 = y_0,\ 2(1 + D)x_0 - 2a \operatorname{ctg} x_0 = b$$

所确定的平衡状态上，$\Delta(x_0, y_0) = \left(D + \frac{a}{\sin^2 x_0}\right)^2 - 1 < 0$，或者换句话说，$\sin x_0 \leqslant \sqrt{\frac{a}{1 - D}}$，第二条件是满足的．将后一不等式代入确定平衡状态的方程，将得出曲线 Φ 与曲线 Γ 的相交条件：

$$2(1 + D)\arcsin\sqrt{\frac{a}{1 - D}} - 2a\sqrt{\frac{1 - D}{a} - 1} < b$$

$$< 2(1+D)\left\{\pi - \arcsin\sqrt{\frac{a}{1-D}}\right\} - 2a\sqrt{\frac{1-D}{a} - 1},$$

其中 arc sin 取第一象限的数值,平方根值取正号.

由于计算相点沿任意相线 Φ 运动时的自振周期在数学上极为困难,故我们将只限于对 $b=\pi(1+D)$,即相线为直线 $x+y=\pi$ 的情况,求出周期的表示式. 相点在此相直线上的"缓慢"运动方程(在方程(10.36′)中代入 $x+y=\pi$)显然可写成如下形式:

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{dy}{d\tau} = \frac{\pi - 2x}{\frac{a}{\sin^2 x} + D + 1},$$

由此可得自振周期(采用普通时间单位)

$$T = \frac{RC}{D}\left\{2a\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{(\pi - 2x)\sin^2 x} - (1-D)\ln\frac{\pi - 2x_1}{\pi - 2x_2}\right\},$$

其中 x_1 和 x_2 分别为相线 Φ 在分角线 $x=y$ 一侧与曲线(B)和 Γ 的交点的横坐标.

4. 寄生电容的考虑. 在本小节的结尾,我们用只考虑一个重要参数的方法建立电路的"合格的"模型,并指出,关于弗吕豪夫电路的振动性质所采用的假设,是如何从这种模型的性质中导出的. 在各种虽然小但重要的寄生参数中,对电路振动过程起主要作用的,显然是寄生电容(在图 548 中以虚线表示的). 对于我们所要达到的目的来说,只须考虑其中一个就足够了(这些电容中的任何一个都使屏流和电阻 R 上的电压不可能发生跳跃). 为了不破坏电路的对称性,以后我们只考虑小寄生电容 C_1. 在这种情况下,电路的振动方程将为(采用图 548 中的标记):

$$C\frac{dv}{dt} = i_{a2} + \frac{u_{g2}}{R} = -i_{a1} - \frac{u_{g1}}{R},$$

$$C_1\frac{du}{dt} = -\frac{u_{g2}}{R} - i_{a1},$$

$$v = u_{a1} - u_{g2} = E_a - u_{a2} + u_{g1},$$

$$u = u_{a1} - u_{g1} = E_a - u_{a2} + u_{g2},$$

$$i_{a1} = f(u_{g1} + Du_{a1}),\ \ i_{a2} = f(u_{g2} + Du_{a2}).$$

上述诸方程构成一个二阶微分方程组．如果引入无量纲电流

$$x = \frac{i_{a1}}{I_0}, \quad y = \frac{i_{a2}}{I_0},$$

电容 C 和 C_1 上的无量纲电压

$$z = \frac{v}{RI_0}, \quad w = \frac{u}{RI_0},$$

无量纲时间

$$t' = \frac{t}{RC},$$

以及小参数

$$\mu = \frac{C_1}{C},$$

则上述诸方程可化为下列无量纲形式：

$$\left.\begin{aligned} \mu \dot{w} &= \frac{Dx + y + \phi(x) - Dz}{1 - D} = F(w, z), \\ \dot{z} &= \frac{Dy - x - \phi(x) + Dz}{1 - D} = G(w, z), \end{aligned}\right\} \qquad (10.40)$$

因为 x，y 彼此之间以及和 w 及 z 以如下方程相联系：

$$(1 + D)(x + y) + \phi(x) + \phi(y) = \frac{DE_a}{RI_0} \qquad (10.40a)$$

以及

$$w = \frac{\phi(y) - \phi(x) + (1 + D)z}{1 - D}, \qquad (10.40b)$$

上列二式用 w 和 z 的某种函数的形式表示出 x 和 y（和以前一样，$\phi = \frac{u_g + Du_a}{RI_0}$ 为无量纲控制电压，而此电压是以电子管无量纲屏流的函数形式表示出的）．

作为所得二阶系统的相面，我们在 x，y，z 空间取选由方程 (10.40a) 确定的柱面 Φ^*（此柱面的导线为平面 x，y 上的曲线 Φ，其母线则与 z 轴平行），并在其上画出曲线 F：

$$F(w, z) = 0,$$

——"退化"系统（$\mu=0$）的相线（图 552）．在曲线 F 上计算出 $\frac{\partial F}{\partial w}$．将函数 $F(w, z)$ 以及表示式(10.40a)和(10.40b)对 w 微分之（令 z 为常量），我们有：

$$(1-D)\frac{\partial F}{\partial w}=[D+\psi'(x)]\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial w},$$

$$[1+D+\psi'(x)]\frac{\partial x}{\partial w}+[1+D+\psi'(y)]\frac{\partial y}{\partial w}=0,$$

$$-\psi'(x)\frac{\partial x}{\partial w}+\psi'(y)\frac{\partial y}{\partial w}=1-D,$$

由此消去$\frac{\partial x}{\partial w}$和$\frac{\partial y}{\partial w}$,可得:

$$\frac{\partial F}{\partial w}=-\frac{\Delta(x, y)}{[1+D+\psi'(x)]\psi'(y)+[1+D+\psi'(y)]\psi'(x)}.$$

由于此表示式的分母永远为正(因为 $\psi'>0$),故小寄生电容 C_1 的可忽略条件$\left(\frac{\partial F}{\partial w}<0\right)$显然可归结为不等式

$$\Delta(x, y)>0,$$

并在曲线 F 的"上升"段 $F^+\left(\frac{\partial z}{\partial x}>0\right)$上这个条件是满足的[1]。

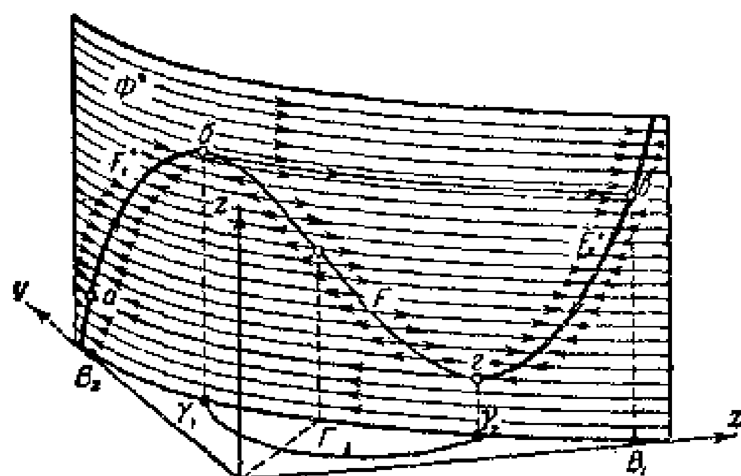


图 552

---

1) 在曲线 F 上,有

$$1+D+\psi'(x)+[1+D+\psi'(y)]\frac{dy}{dx}=0$$

以及

$$D\frac{dz}{dx}=D+\psi'(x)+\frac{dy}{dx}=D+\psi'(x)-\frac{1+D+\psi'(x)}{1+D+\psi'(y)}$$

$$=\frac{\Delta(x, y)}{1+D+\psi'(y)}.$$

由于 $1+D+\psi'(y)>0$, 故 $\left(\frac{dz}{dx}\right)_{F=0}$ 的符号与 $\Delta(x, y)$ 的符号相同.

由此可见，只有在“退化”系统之相线的这些段 F^+ 的微小邻域内，才可以忽略小寄生电容 C_1（当然必须有 $C_1 \ll C$），——只有在那里“缓慢”运动轨线（$\mu \to +0$ 时其相速度为有限值）才接近于曲线 F，从而相点的运动（$C_1 \ll C$ 时）可用“退化”方程：

$$F = 0 \quad 或 \quad z = \frac{y + Dx + \psi'(x)}{D}$$

以及

$$\dot{z} = y - x$$

来描述，不难看出，上列诸方程与方程组（10.36）是等价的．这样一来，我们就对第 2 小节中关于电路振动性质所采用的假设的第一项建立了根据．

其次，当 $\mu \to +0$ 时在曲线 F 外部 $\dot{w} \to \infty$，且在曲线 F 上方 $\dot{w} \to +\infty$，在其下方 $\dot{w} \to -\infty$，而与此同时 $\dot{z}$ 则保持有限值．因此，当 $\mu \to +0$ 时，在相面 Φ^* 上位于曲线 F 外部的区域中，布满“迅速”运动的相轨线 $z =$ 常数，相点沿着这些轨线，在曲线 F 上方向右（沿 w 和 x 的增加方向），在曲线 F 下方向左（沿 w 和 x 的减方向）作“跳跃”运动，即趋向曲线 F 的段 F^+．

如果电路是自激的，即如果在平衡状态上 $\Delta < 0$，则曲线 F 具有 z 的极大值和极小值，这些值同时也是“缓慢”运动相轨线 F^+的边界点，因为在这些点上 $\Delta(x, y)$ 和 $\dfrac{\partial F}{\partial w}$同时等于零[1]．在这些点上，相点的“缓慢”运动转换为沿相应轨线 $z =$ 常数的“迅速”的跳跃式的运动，后者使相点重新落到段 F^+中的一段上．在这些跳跃过程中 z（也就是电容器 C 上的电压 v）保持不变（$\mu \to +0$ 时），由此即可得出跳跃条件（10.39）．

与跳跃条件（10.39）不同，相面的“迅速”运动轨线划分，在所有情况下都能保证跳跃起点和终点的单值对应，包括曲线 F 上 z 的极大值和极小值各有一个以上的情况在内．具体地说，根据这种相轨线划分，跳跃将从 z 的极大点（极小点）开始，沿轨线 $z =$ 常

1）图 552 对应于曲线 F 具有一个极大点（$б$ 点）和一个极小点（$г$ 点）的情况，因此有两个 F^+ 段：F_1^+ 和 F_2^+．这些点在平面 x, y 上的投影显然位于曲线 Γ 上．

数，向右（向左）到直线 $z=$ 常数与曲线 F 的最近一个交点为止。

在图 552 上表示出了自激电路的相面的极限（$\mu\to+0$ 时）相轨线划分，当 $\mu\ll 1$，即 $C_1\ll C$ 时，此相面的划分与上述划分很相近。显然，在任意初始条件下，电路中都将建立起不连续自振，在相面上它对应于极限环 *абвга*（其在平面 x, y 上的投影为不连续极限环 $B_2\gamma_1 \dashrightarrow B_1\gamma_2^* \dashrightarrow B_2$）。

这样，既便是只考虑一个重要的寄生电容所建立起来的"合格的"电路模型，就使我们有可能完整地研究弗吕豪夫电路中的振动，而不必求助于任何补充的假设。

§9. 屏极电路中含有电感的多谐振荡器

前面我们已经看到，研究自振系统的问题可以显著地得到简化，如果重要的振动参数中有一个很小，因为这样一来系统的运动就可以分成简单的"迅速"运动和"缓慢"运动。第一种运动以方程组(10.17)或一定方式表述的跳跃假设来描述；第二种运动则可由方程组（10.16）来描述，后者在建立时不考虑寄生参数，因而具有较低的阶次。

下面我们着手研究较复杂的不连续振动系统，其"缓慢"运动方程为二阶方程。作为第一个例子，我们选取已经熟知的具有一个 RC 回路的多谐振荡器，但具有感性的屏极负荷（图 553）（为使问题获得某些简化，我们将忽略屏极负荷中的欧姆电阻）。

1."缓慢"运动方程. 忽略所有寄生参数、栅流和屏极反应后，根据克希荷夫定律列出多谐振荡器的振动方程如下（采用图553中的标记）：

$$L\frac{di}{dt}=E_a-(u+v),$$

$$i=i_a(u)+\frac{u-E_g}{R},$$

---

* 原书为 $B_2\gamma_1$——译者注。

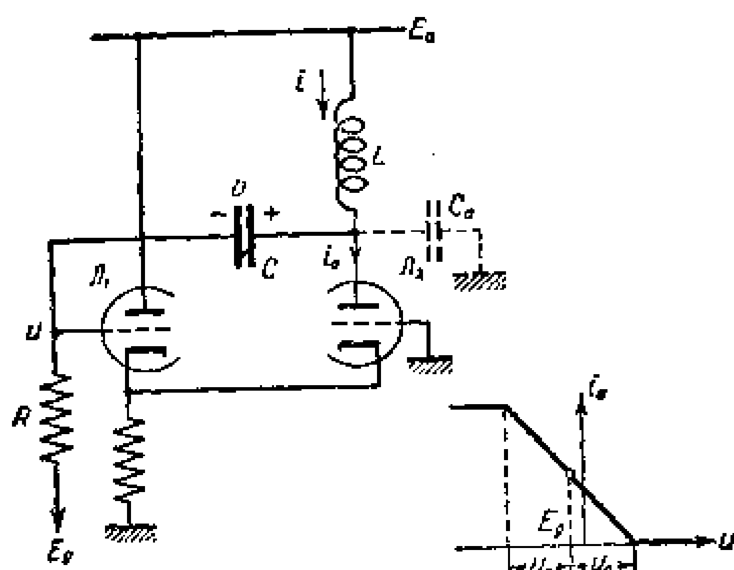


图 553

$$C\frac{dv}{dt}=\frac{u-E_g}{R},$$

上述方程为两个一阶方程的方程组(与此相对应，多谐振荡器的状态可用相平面 u, v 上的点来表示)．显然，电路具有唯一的平衡状态，在此状态上

$$u=E_g,\quad i_a=i_a^0=i_a(E_g),$$
$$i=i_a^0,\quad v=v_0=E_a-E_g.$$

为了简化对多谐振荡器振动的研究，我们将电子管组的特性 $i_a=i_a(u)$ 用分段线性函数来逼近，并设栅偏压 E_g 所选取的数值使得对应于平衡状态的工作点位于特性曲线下降段的中点上．

引入新的无量纲变量 x, y, z, 令其正比于电压 u 和 v 以及电流 i 的交变分量，即：

$$x=\frac{u-E_g}{u_0},\ y=\beta\frac{v-v_0}{u_0},\ z=\frac{R}{u_0}(i-i_a^0),$$

其中 u_0 为电子管组特性曲线下降段的“长度”的一半．引入新的无量纲时间

$$t_{新}=\frac{t}{\sqrt{LC}},$$

以及电子管组的无量纲特性曲线

$$\varphi(x) = \frac{1}{u_0 S}[i_a(E_g + u_0 x) - i_a(E_g)]$$

$$= \begin{cases} +1 & \text{当 } x < -1 \text{ 时}, \\ -x & \text{当 } |x| \leqslant 1 \text{ 时}, \\ -1 & \text{当 } x > +1 \text{ 时}, \end{cases}$$

其中 S 为特性曲线下降段的互导的绝对值．此时，若选择 $\beta = R\sqrt{\frac{C}{L}}$，则可将多谐振荡器方程化为如下无量纲形式：

$$\left.\begin{aligned} \dot{z} &= -2hx - y, \\ z &= x + k\varphi(x), \\ \dot{y} &= x, \end{aligned}\right\} \tag{10.41}$$

其中

$$k = SR \text{ 及 } h = \frac{\beta}{2} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}},$$

或消去 z 后，得：

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{2hx + y}{1 + k\varphi'(x)}, \\ \dot{y} &= x. \end{aligned}\right\} \tag{10.41a}$$

采用电子管组的分段线性特性曲线 $\varphi(x)$ 以后，相平面显然将划分为三个线性区域：1) $|x| < 1$；2) $x > +1$ 以及 3) $x < -1$．由于当 $|x| < 1$ 时 $\varphi'(x) = -1$，故在包含唯一的平衡状态($x = 0$, $y = 0$)的第一个区域中，方程组(10.41a)将写成线性方程组形式：

$$(1 - k)\dot{x} = -2hx - y,$$

$$\dot{y} = x,$$

其特征方程为

$$(1 - k)\lambda^2 + 2h\lambda + 1 = 0.$$

因此，平衡状态(0,0)在 $k < 1$ 时稳定，$k > 1$ 时不稳定．

下面我们只研究后一种情况：$k > 1$——自激多谐振荡器的情况(不难看出，$k < 1$ 时随着时间的增长，所有相轨线都趋向唯一的稳定平衡状态，即在这种情形下，无任何自振发生)．

我们来研究方程组(10.41a)的相轨线在直线 $x = \pm 1$ (即线

性区域的边界线）附近的走向．由于在穿过这些直线时，表示式 $1+k\varphi'(x)$ 改变符号(因为 $k>1$)，因而这些直线上的点，或更正确些，半直线 $x=+1,\ y>-1$ 和 $x=-1,\ y<+1$ 上的点，乃是相轨线的止点．这些点不是平衡状态，但相轨线却从两侧趋向它们．

由此可见，忽略寄生参数使我们得到"有缺陷的"多谐振荡器模型——这种模型不能用以研究多谐振荡器的振动：方程组(10.41a)将系统"引向"直线 $x=\pm 1$ 上的这样一些状态，这些状态既不是平衡状态，而另一方面，从中又没有相轨线走出．因此，为了获得"合格的"多谐振荡器模型，我们必须或者对方程组(10.41a)补充以相应的跳跃假设，或者考虑电路的重要参数．

在研究由双位式自动操舵仪控制的船的振动时(第八章§6)，我们也曾在相平面上得出相轨线的止点线，然后对微分方程组做了补充确定，从而使相点沿此曲线的运动成为可能；相点的这种运动对应于实际上观察到的所谓双位式自动操舵仪的"滑动"工作状态．

在现在研究的多谐振荡器问题中，对相点沿半直线 $x=+1,\ y>-1$ 和 $x=-1,\ y<+1$ 的运动若进行此种补充确定，则除走向无限远外，将给不出任何即便是定性上与实验资料相符合的结果．

还应当指出，若多谐振荡器的屏极负荷由电阻 R_a 和电感 L 组成，则对于此种多谐振荡器将得到同样"有缺陷的"模型(具有相轨线的止点线)．因此，在具有一个 RC 回路的多谐振荡器中(本章§4)，考虑屏极电路中的寄生电感并不能使我们建立起"合格的"多谐振荡器模型．

2. 考虑寄生电容 C_a 时多谐振荡器的方程． 考虑屏极接点的小寄生电容 C_a(我们接着就会看到，考虑它以后我们就有充分可能建立多谐振荡器的"合格的"模型)，我们来建立多谐振荡器的振动方程．根据克希荷夫定律，我们有：

$$L\frac{di}{dt}=E_a-(u+v),$$

$$i=i_a(u)+C\frac{dv}{dt}+C_a\frac{d(u+v)}{dt},$$

$$C\frac{dv}{dt}=\frac{u-E_g}{R},$$

若采用变量 x, y, z, $t_{新}$, 并忽略表示式 $C+C_a$ 中的小电容 C_a, 则有:

$$\left.\begin{aligned}\mu\dot{x}&=z-x-k\varphi(x)\equiv F(x,z),\\\dot{y}&=x,\\\dot{z}&=-2hx-y,\end{aligned}\right\}\tag{10.42}$$

其中 $\mu=\frac{RC_a}{\sqrt{LC}}$ 为小的正参数，它表示寄生电容 C_a 的微小程度(其余标记与(10.41)相同)。

若设 $\mu=0$，即忽略小寄生电容 C_a，则重新得出方程组(10.41)或(10.41a)——系统的"缓慢"运动方程，但这些方程并不是在"退化"系统($C_a=0$)的整个相面 F:

$$F(x,z)=0\ 或\ z=x+k\varphi(x)$$

上都能成立的，而只是在满足小寄生电容 C_a 的可忽略条件:

$$F'_x=-1-k\varphi'(x)<0,$$

即 $|x|>1$ 的那一部分 F^+ 上才能成立[1]。

在面 F^+ 的微小邻域外部，相点作"迅速"运动(在这里当 $\mu\to+0$ 时 $\dot{x}\to\infty$，即 x 跳跃地变化)。而且，"迅速"运动轨线当 μ 很小时接近于直线 $y=$常数，$z=$常数，并在面 F 的上方沿 x 的增加方向($z>x+k\varphi(x)$ 及 $\mu\to+0$ 时 $\dot{x}\to+\infty$)，在面 F 的下方($z<x+k\varphi(x)$)则沿 x 的减小方向(运动)。相空间 x, y, z 对于方程组 (10.42) 之相轨线的极限划分，即当 μ 很小时与之接近的相轨线划分，定性地表示在图 554* 上，其中并表示出了极限环；下面我们将会看到，此种极限环当 $\mu\to+0$ 时确实是存在的。

这样一来，研究这种考虑小寄生电容 C_a 所建立的多谐振荡器

---

1) 我们研究 $k>1$ 的情况；此时，当 $|x|<1$ 时 $F'_x=k-1>0$。如果 $k<1$，则在整个面 $F=0$ 上都满足小寄生电容 C_a 的可忽略条件；与此相对应，在不含 C_a 的多谐振荡器模型的相平面 x, y 上，也将没有相轨线的止点线。

需要指出的是，"退化"模型的相面 F 与平面 x, y 彼此同拓扑(它们的点彼此单值连续对应)。因此，我们可以用相点沿平面 x, y ($|x|>1$) 而不是沿面 F^+ 的运动，来反映系统的"缓慢"运动。

* 图上之 F^+ 原书为 Γ^+，原图中亦没有 F^-。——译者注。

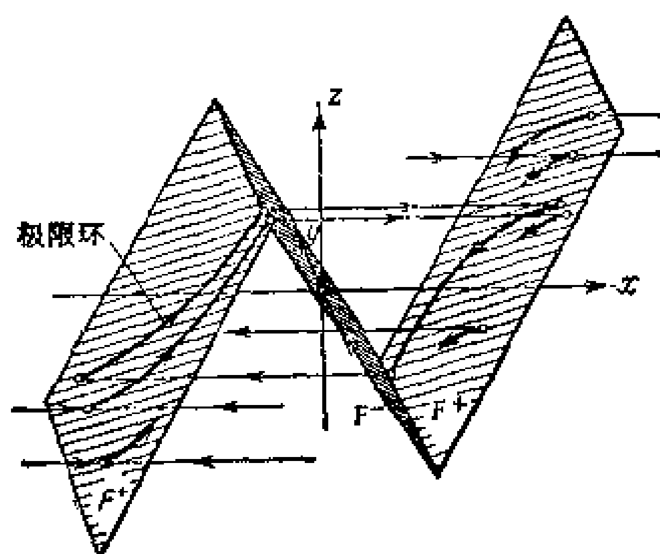


图 554

模型，就使我们对电路的振动性质得出如下结论（$C_a \to +0$ 时）：

1）电路中发生不连续振动，因为所有"迅速"运动轨线都走向面 F^+，然后转变为"缓慢"运动轨线，而后者又在面 F^+ 的边界线（即 $x = \pm 1$ 处）重新转变为"迅速"运动轨线。

2）相点的"缓慢"运动只发生在面 F^+：

$$z = x + k\varphi(x),\quad |x| > 1$$

上；只有 $|x| > 1$ 时，方程组（10.41）或（10.41a）才能反映电路的振动规律[1]。

3）当相点作"迅速"运动（跳跃）时，变量 x（或电子管 $Л_1$ 的栅压 u）瞬时变化，而变量 y 和 z（即电容器 C 上的电压 v 和屏极负荷上的电流 i）则保持不变[2]。

3. 电路的不连续振动. 根据电路振动的上述特点，下面我们对电路的不连续振动进行详细研究，并证明自振的存在。

上面已经指出过，系统的"缓慢"运动只发生在 $|x| > 1$ 时，因此它们是由线性方程

1）与此相反，"迅速"运动相轨线离开"退化"模型相面 F 的 F^- 部分（$|x| < 1$），因此，在那里不存在任何"缓慢"运动，从而方程组（10.41）不成立。

2）系统状态跳跃地变化时，电压 v 和电流强度 i 的不变条件，也可从电路中电压和电流的有限性这一补充假设中导出。

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -2hx - y, \\ \dot{y} &= x, \end{aligned}\right\} \tag{10.41b}$$

所描述的，因为 $|x|>1$ 时 $\varphi'(x)=0$. 由于方程组(10.41b)的特征方程可写成：

$$\lambda^2 + 2h\lambda + 1 = 0, \tag{10.43}$$

故在电路状态“缓慢”变化的过程中，其性状的性质只与参数 $h=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$ 的大小有关. 具体地说，如果 $h>1$，即 $L<\frac{1}{4}CR^2$，则特征方程的两个根都是负实根，从而系统的运动将是非振荡的. 在画斜线的带形平面 $|x|<1$外部(在此带状平面中方程组(10.41b)不成立)，系统的相轨线的形状将与具有稳定结点的线性振动系统情况完全一样(图 555)[1]. 如果 $h<1$ (或 $L>\frac{1}{4}CR^2$)，则系统的运动(在“缓慢”运动中)将与稳定焦点位于原点的线性振动系统相同，因而在画斜线的带状平面 $|x|<1$ 外部的相轨线亦将具有

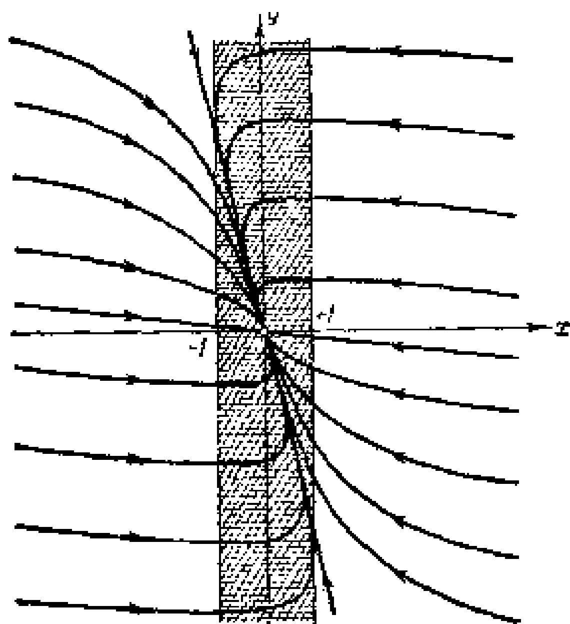


图 555

1) 我们将用相点在平面 x, y 而不是在相空间 x, y, z 中的运动，来反映系统的振动. 很明显，采用这种研究方法时，在平面 x, y 上的“迅速”和“缓慢”运动的相轨线 B 是相空间 x, y, z 中的相轨线的投影，因而可以彼此相交.

螺线线段的形状（图 556）．无论在前一种或后一种情形中，垂直切线等倾线都是直线 $y=-2hx$，而水平切线等倾线则为 $x=0$ 轴（但后者位于方程组(10.41b)成立的区域以外）．相轨线上的箭头（图 555 和 556）表示相点的运动方向，此方向由该区域中 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 所具有的符号来决定．应当指出的是*，相点在方程组(10.41b)的相轨线上运动时，并不像通常那样沿着时针的旋转方向，而是逆着这个方向，这是因为 y 并不单纯是 $\dot{x}$，而是与 x 和 $\dot{x}$ 以如下关系式相联系：

$$y=-\dot{x}-2hx.$$

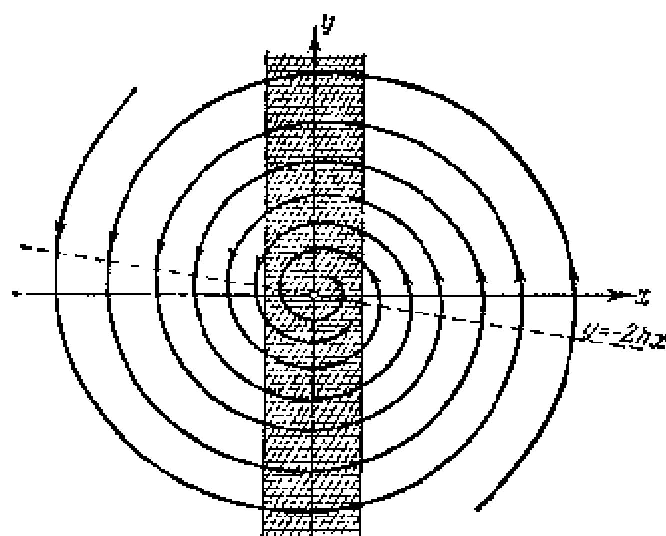


图 556

不难看出，无论参数 h 的数值如何，"缓慢"运动相轨线都到达直线 $x=\pm 1$，由这里开始，相点沿相应的"迅速"运动轨线：$y=$ 常数（和 $z=$ 常数）跳跃地离开．跳跃后相点到达的位置，可由变量 y 和 z 在跳跃时间内不变的条件来确定．由于跳跃终点（在空间 x, y, z 中）重新位于面 $z=x+k\varphi(x)$ 上，故其坐标 (x_2, y_2) 与跳跃起点坐标 (x_1, y_1)（其中 $x_1=\pm 1$）以如下方程彼此联系：

$$y_2=y_1,$$

* 以下这一句话，可以更明确地改述为："相点沿相轨线运动的方向，和以前我们见到的并不一致，因为关系式 $\dot{x}=y$ 不成立，但在此处有 $\dot{y}=x$(10.41b)，即当 $x>0$ 时，y 增加，而当 $x<0$ 时 y 减少"——译者注．

$$x_2 + k\varphi(x_2) = x_1 + k\varphi(x_1),$$

并可由上述方程单值地求出:

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= y_1, \\ x_2 &= -(2k-1)x_1. \end{aligned}\right\} \tag{10.44}$$

因此，相点沿跳跃轨线 $y =$ 常数运动穿过直线 $x = +1$ 时将跳到直线 $x = -(2k-1)$上;与此相反,穿过直线 $x = -1$ 时则将跳到直线 $x = 2k - 1$ 上. 跳跃以后，相点将重新沿"缓慢"运动轨线继续运动,直到落到直线 $x = \pm 1$ 上为止，如此往复不已. 这样一来，"缓慢"运动和跳跃相轨线的线段就构成了多谐振荡器的相轨线(更正确些,是其正半轨线)，反映出它的不连续振动(图 557 和 558). 下面我们来证实,这些轨线将渐近地趋向($t \to +\infty$ 时)稳定极限环.

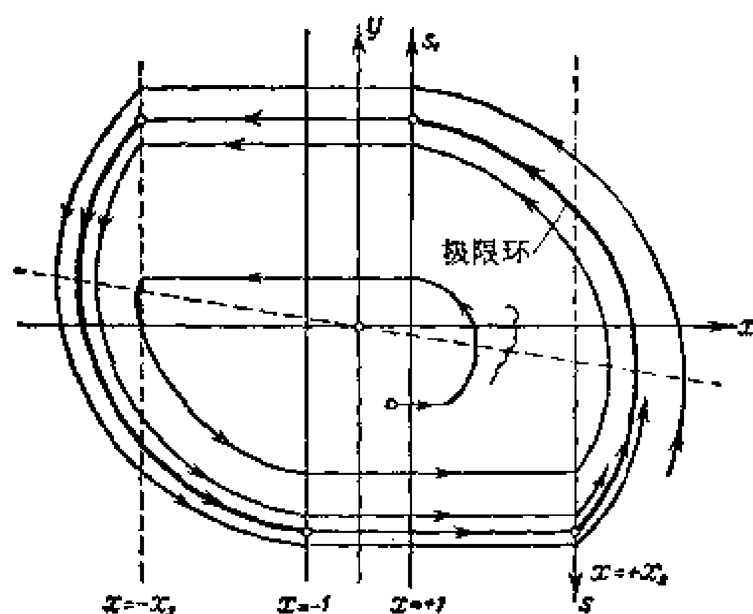


图 557

我们将从电感 L 足够大$\left(L > \frac{1}{4}CR^2,\text{ 即 } k < 1\right)$的情况开始研究. 对于这种情况，我们得出如图 557 所示的平面 x, y 的轨线划分(轨线由"缓慢"运动的螺线弧和跳跃直线轨线 $y =$ 常数的线段组成). 此轨线划分关于原点对称,因为无论"缓慢"运动方程组(10.41b)以及跳跃条件(10.44)对于以 $-x$, $-y$ 置换 x, y 来

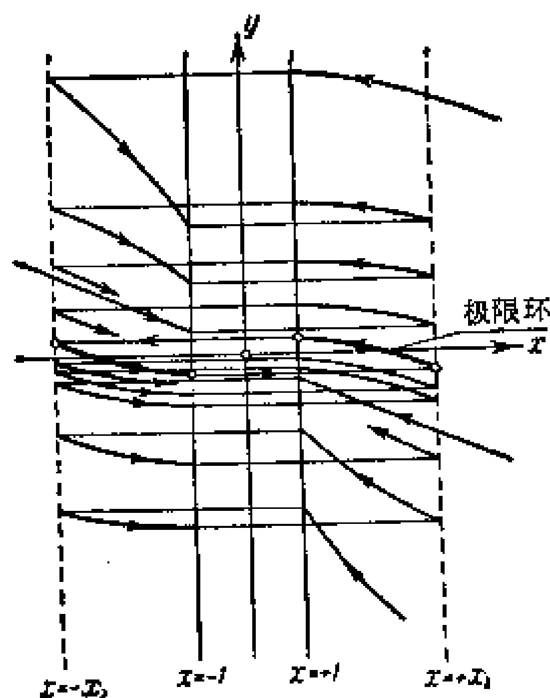


图 558

说，都具有不变性．因此，为了研究电路的振动(例如，证明极限的存在及其稳定性)，我们只需研究直线 $x=x_2=2k-1$ 的点 $y=-s$ 对直线 $x=+1$ 的点 $y=s_1$ 的点变换 $s_1=f(s)$ 就够了，此变换是由半平面 $x>1$ 上的"缓慢"运动轨线所实现的．变换的不动点显然对应于极限环．

研究方程组(10.41b)的某一相轨线，令其在 $t=0$ 时由点 $(x_2,-s)$ 出发：

$$x=e^{-ht}\left[x_2\cos\omega t-\frac{hx_2-s}{\omega}\sin\omega t\right],$$

$$y=e^{-ht}\left[-s\cos\omega t+\frac{x_2-hs}{\omega}\sin\omega t\right],$$

其中 $\omega=\sqrt{1-h^2}$(当 $h<1$ 时特征方程(10.43)具有共轭复根 $\lambda_{1,2}=-h\pm j\omega$)．设 $t=\dfrac{\tau}{\omega}$ 时，相点沿此轨线运动到达直线 $x=+1$ 的点 $y=s_1$ (显然，$0<\tau<\pi$)．此时有

$$1=e^{-\gamma\tau}\left[x_2\cos\tau+\left(\frac{s}{\omega}-\gamma x_2\right)\sin\tau\right],$$

$$s_1=e^{-\gamma\tau}\left[-s\cos\tau+\left(\frac{x_2}{\omega}-\gamma s\right)\sin\tau\right],$$

其中 $\gamma=\dfrac{h}{\omega}=\dfrac{h}{\sqrt{1-h^2}}$．从上述关系式中解出 s 和 s_1，则得到对应函数 $s_1=f(s)$ 的参数表示式：

$$\left.\begin{aligned}s&=\omega\frac{e^{\gamma\tau}-x_2(\cos\tau-\gamma\sin\tau)}{\sin\tau},\\ s_1&=\omega\frac{x_2e^{-\gamma\tau}-(\cos\tau+\gamma\sin\tau)}{\sin\tau}.\end{aligned}\right\}\qquad(10.45)$$

所得连续函数的图象(当 $0<\tau<\pi$ 时)定性地表示在图 559 上. 由于 $\tau \to +0$ 时 $s \to -\infty$, $s_1 \to +\infty$, 而 $\tau \to \pi-0$ 时 $s \to +\infty$, $s_1 \to +\infty$, 且 $s_1 < s$,因而这两条曲线必有交点(至少是一个)——所研究的点变换的不动点 s^*. 与之相对应的参数 τ 的数值 ($\tau = \tau^*$)显然决定于方程:

$$e^{\gamma\tau} - x_2(\cos\tau - \gamma\sin\tau) = x_2 e^{-\gamma\tau} - (\cos\tau + \gamma\sin\tau)$$

或

$$e^{\gamma\tau} + \cos\tau + \gamma\sin\tau = x_2\{e^{-\gamma\tau} + \cos\tau - \gamma\sin\tau\}, \quad (10.46)$$

而且不难看出,其解为单值的. 这样,点变换 $s_1 = f(s)$ 具有唯一的不动点 s^*, 而在平面 x, y 上则有唯一的极限环. 此极限环是稳定的,因为在不动点上

$$\left|\frac{ds_1}{ds}\right| < 1.$$

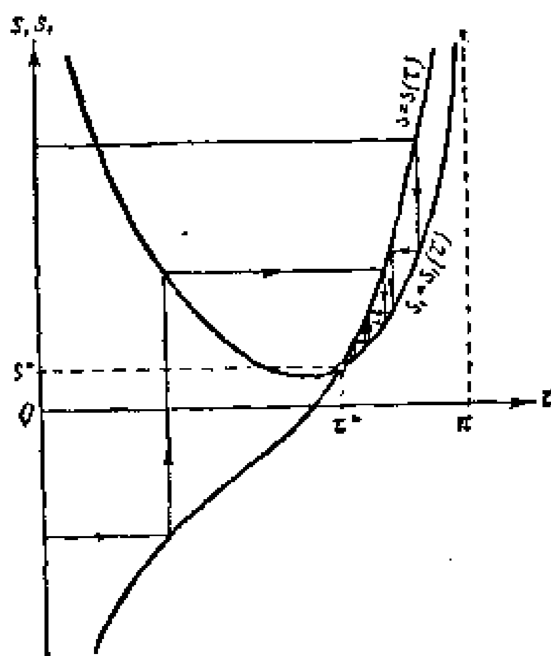


图 559

这样一来，我们就证实了：在所研究的电路中将建立起并保持有不连续的自振. 这些振动的波形,一般来讲,将显著地区别于正弦形,因为 x(即电子管 $Л_1$ 的栅压)以及电子管 $Л_2$ 的屏压在某些区域内发生跳跃式的变化.

由于平面 x, y 的轨线划分的对称性，故自振的周期，若采用

无量纲时间单位，则显然等于 $2\frac{\tau^*}{\omega}$；若采用普通单位，则为

$$T = \frac{2\sqrt{LC}}{\sqrt{1-h^2}}\tau^*, \tag{10.47}$$

（和以前一样，在计算自振周期时我们忽略了"迅速"运动——跳跃——的延续时间）。很明显，T 小于 $T' = \frac{2\pi\sqrt{LC}}{\sqrt{1-h^2}}$——处处都以方程组（10.41b）描述的振动系统中所发生之衰减振动的"条件周期"——因为瞬时跳跃的存在使得相点旋转一周比此种振动系统的相点迅速些（正因为如此，所以 $\tau^* < \pi$）。

下面我假定 L 非常大$\left(L \gg \frac{1}{4}CR^2\right)$，即 $h \ll 1$（以及 $\gamma \ll 1$），并对此情况计算出自振的周期和振幅。在（10.46）中令 $\gamma = 0$，则得出 τ^* 的零次近似：

$$\tau^* = \pi,$$

因而自振周期 T 在 L 足够大时，必定接近于无电阻的 LC 电路的振动周期——周期 $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$。为了确定 γ 很小时周期的校正量，引入

$$a = \pi - \tau^*.$$

此时，将 $\tau^* = \pi - a$ 代入（10.46）则得出决定 a 的方程

$$e^{\gamma(\pi-a)} - \cos a + \gamma \sin a = x_2[e^{-\gamma(\pi-a)} - \cos a - \gamma \sin a] \tag{10.46a}$$

或者将方程中的函数展开为幂级数，则得：

$$\gamma\pi + \frac{\gamma^2(\pi-a)^2}{2} + \cdots + \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4!} + \cdots - \gamma\frac{a^3}{3!} + \cdots$$
$$= x_2\left[-\gamma\pi + \frac{\gamma^2(\pi-a)^2}{2} + \cdots + \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4!} + \cdots + \gamma\frac{a^3}{3!} - \cdots\right] \tag{10.46b}$$

由此可以推出，a 的量级为 $\gamma^{1/2}$，因此可由如下关系式确定：

$$\gamma\pi + \frac{a^2}{2} = x_2\left(-\gamma\pi + \frac{a^2}{2}\right) + O(\gamma^2),$$

即

$$a = \sqrt{\frac{2\pi k}{k-1}}\,\gamma^{1/2} + O(\gamma^{3/2})^{1)}. \qquad (10.47a)$$

这样一来，当 $L \gg \frac{1}{4} CR^2$ 时(即 $h = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \ll 1$ 时)

$$T = 2\pi\sqrt{LC}\left\{1 - \sqrt{\frac{2k}{\pi(k-1)}}\,h^{1/2} + O(h^{3/2})\right\}. \qquad (10.47b)$$

我们看到，周期校正量的量级为 $h^{1/2}$，因此是比较大的(为了进行比较，我们在这里提醒一下：在普通电子管振荡器中周期校正量的量级为 h^2)。

将(10.47a)代入(10.45)，得出 $\bar{s}$，即变量 y 的自振振幅：

$$\bar{s} = \frac{2k + O(\gamma)}{\sin a} = \sqrt{\frac{2k(k-1)}{\pi h}} + O(h^{1/2}).$$

由于 h 很小时"缓慢"运动相轨线接近于圆周 $x^2 + y^2 =$ 常数，因而变量 x 的自振振幅与此数值近似相等。若将无量纲变量转换为有量纲变量，则可得到电压 u (电子管 $Л_1$ 的栅压)以及 v (电容 C 的电压)的振幅的表示式：

$$U_0 = u_0\bar{s} = u_0\sqrt{\frac{2k(k-1)}{\pi}}\,h^{-1/2} + O(h^{1/2}),$$

$$V_0 = u_0\frac{\bar{s}}{2h} = u_0\sqrt{\frac{k(k-1)}{2\pi}}\,h^{-3/2} + O(h^{-1/2}).$$

由于 h 很小时 $V_0 \gg U_0$，故电子管 $Л_2$ 的屏压 $u + v$ 的振幅显然近似等于 V_0。所有这些振幅都随 L 的增大(或者说随

---

1) 不难得出周期校正量渐近展开式的次一项。在(10.46)中设 $a = a_0\gamma^{1/2} + a_1$，其中 $a_1 = O(\gamma^{3/2})$，以及 $a_0 = \sqrt{\frac{2\pi k}{k-1}}$，则从得到的方程中可确定渐近展开式的次一项，此方程为：

$$\frac{\gamma^2\pi^2}{2} + a_0\gamma^{1/2}a_1 - \frac{a_0^4\gamma^2}{4!} = x_2\left[\frac{\gamma^2\pi^2}{2} + a_0\gamma^{1/2}a_1 - \frac{a_0^4\gamma^2}{4!}\right] + O(\gamma^{5/2}),$$

即

$$a_1 = \left(\frac{a_0^3}{4!} - \frac{\pi^2}{2a_0}\right)\gamma^{3/2} + O(\gamma^2),$$

因此，

$$a = \sqrt{\frac{2\pi k}{k-1}}\left\{\gamma^{1/2} + \left[\frac{1}{12}\,\frac{\pi k}{k-1} - \frac{\pi}{4}\,\frac{k-1}{k}\right]\gamma^{3/2}\right\} + O(\gamma^2).$$

$h = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$的减小)而增大[1]。

下面我们就转入研究小L的情况,或者说,$h > 1$的情况. 在这种情况下,特征方程(10.43)的根为负实根,因而系统在"缓慢"运动过程中的性状将与结点型奇点位于原点的线性系统相同(图555). 特别是,在"缓慢"运动区域,即$|x| > 1$区域内,存在有两条直线相轨线(其斜率为特征方程(10.43)的根λ_1和λ_2的倒数). 对应于小L情况的平面x, y的相轨线划分表示在图558上(相点的运动轨线由"缓慢"运动相轨线的线段和"迅速"运动——跳跃——轨线$y =$常数的线段组成).

详细的研究表明,在这种情况下,亦存在有稳定的周期运动,由两个有限速度运动和两个跳跃组成,并在任何初始条件下都能够建立起来(这一论断,举例来说,可以用建立并研究相应的点变换的方法予以证明). 相点沿极限环所作的这些运动也就反映了多谐振荡器中的不连续自振. 这些振动的振幅可以很容易求出:变量x的变化发生在x_2和$-x_2$之间,即变量x的自振振幅等于$x_2 = 2k - 1$(这样一来,电子管$Л_1$的栅压u的振幅则为$U_0 = (2k - 1)u_0$). 至于自振周期,则将相点沿极限环"缓慢"运动的各个部分对t取积分,即可计算出.

但如果L很小($L \ll \frac{1}{4} CR^2$,但当然仍须使$L \gg \frac{R^2C_a^2}{C}$和$\mu \ll 1$),则周期的计算问题还可大大简化. 此时$h \gg 1$,从而在"缓慢"运动区域中(但在直线$y = -2hx$的某一微小邻域外)相轨线接近于水平直线[2]. 与此相对应,极限环将接近$y = 0$轴;因此,相点

---

1) 由于电子管$Л_1$的屏压振幅随电感的增大而增大(以$L^{3/4}$的速度),因而我们忽略屏流而建立起来的多谐振荡器理论,显然在L足够大时就将不再是合理的.

2) 在直线$y = -2hx$的微小邻域外部,$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2hx + y} \simeq -\frac{1}{2h} \simeq -0$. 因此,变量$y$的自振振幅在所研究的$h \gg 1$情况下,近似地等于$\frac{1}{2}\frac{x^2 - 1}{2h} = \frac{k-1}{2h}$,而电容器$C$上的电压$v$的振幅则为:

$$V_0 \approx \frac{u_0}{2h}\frac{k-1}{2h} = \frac{(k-1)L}{CR^2}u_0.$$

沿极限环作“缓慢”运动时，$\dot{x} \approx -2hx$ 或 $\frac{dx}{dt} = -\frac{R}{L}x$（$t$ 为普通时间），因而 $dt = -\frac{L}{R}\frac{dx}{x}$. 将此方程右边由 x_2 到 1 积分之，则得出自振的半周期为：

$$\frac{T}{2} = -\frac{L}{R}\int_{x_2}^{1}\frac{dx}{x} = \frac{L}{R}\ln x_2,$$

于是，自振周期等于：

$$T = \frac{L}{R}\ln(2k-1). \tag{10.47c}$$

值得注意的是，在所研究的情况中，电容 C 对周期的数值并无显著



图 560

影响；其所以如此是因为当L很小时，我们得到频率比较高的不连续振动，在此振动过程中电容C几乎来不及充放电（我们已经看到，此电容电压的振幅等于 $V_0=\frac{(k-1)L}{RC^2}u_0\ll u_0$）.

我们详细地研究了大电感和小电感L这两种极端情况，并对研究自振过程时通常出现的一些问题得到了答案. 这就是说，我们阐明了有关自振的振幅，周期，波形，以及它们的建立过程的性质等问题. 我们之所以局限于大L和小L两种情况，只是为了简化叙述. 一般来讲，完全可以取L的其它中间数值，来研究所有这些问题. 在图 560 上表示出利用阴极射线示波器对所研究电路摄制的平面 $u, u+v$ 上的相图照片（在示波管的偏转电极上加上电子管 $Л_1$ 的栅压和 $Л_2$ 的屏压）[1].

照片是按L的减小次序排列的. 在这些照片上所示的周期过程的性质，一般来讲，同我们在理论研究中得出的图象是吻合的.

§10. "万 能" 电 路

上面（本章）所研究过的各种系统中，只能有不连续振动. 但是亦还有这样一些系统，其中既可能出现连续振动，又可能出现不连续振动，并当系统的某一参数变化时可相互转化（当此参数通过某一临界值，即分枝值时）. 例如，如图 561 所示的所谓的"万能"电路[125]就属于这一种（其平衡状态的性质已在上册第五章 §4 中研究过）. 这种电路是介于双环 RC 回路似正弦（因之，亦是连续的）振荡器（参看上册第五章 §12 和第八章 §5）与具有一个 RC 回路之多谐振荡器间的一种"中间"电路：电位计 r 的触点在最下位置时$\left(\beta=\frac{r_1}{r}=0\right)$，"万能"电路变为第一种电路；当触点在最上位置$\left(即\ \beta=\frac{r_1}{r}=1\right)$，从而电容 C_2 与电容 C_1 呈并联时，则变为

1）关于如何利用阴极射线示波器获得相平面的相图，参看附录 II.

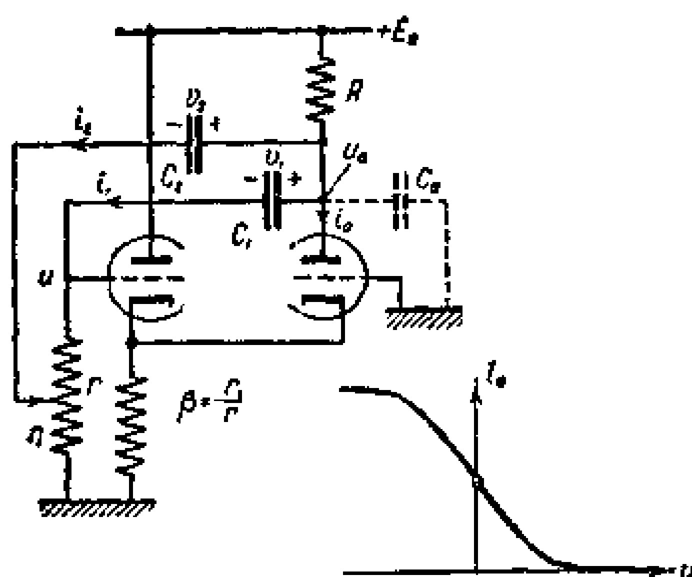


图 561

第二种电路. 因此可以预期，当电位计触点从最下位置向上移动时（β 由 0 向 1 变化时），电路中必出现连续振动向不连续振动的过渡. 对电路进行的研究可证实这一点.

若忽略栅流和屏极反应，以及除小寄生电容 C_a(在图 561 中以虚线表示的)以外的所有寄生参数，则"万能"电路的振动方程可根据克希荷夫定律写成如下形式(采用图 561 的标记):

$$\frac{E_a - u_a}{R} = i_a(u) + C_a\frac{du_a}{dt} + i_1 + i_2,$$

$$C_1\frac{dv_1}{dt} = i_1,\ C_2\frac{dv_2}{dt} = i_2,$$

$$u = r(i_1 + \beta i_2),\ u_a = u + v_1,\ v_2 = v_1 + (1-\beta)ri_1,$$

若采用变量 u, v_1 和 $z = ri_1$ (当 $C_a \ll C_1$, C_2 时)则为:

$$\left.\begin{aligned} \mu\dot{u} &= E_a - Ri_a(u) - \left(1+\frac{R}{\beta r}\right)u + (1-\beta)\frac{R}{\beta r}z - v_1, \\ \dot{v}_1 &= z,\ (1-\beta)\dot{z} = \frac{C_1}{\beta C_2}u - \left(1+\frac{C_1}{\beta C_2}\right)z, \end{aligned}\right\} \quad (10.48)$$

其中 $\mu = \frac{RC_a}{rC}$ 为小正参数，它表征寄生电容 C_a的微小程度($0 < \mu \ll 1$)，而字母上方的圆点则表示对无量纲时间 $t' = \frac{t}{rC_1}$的微分.

电子管组的特性曲线 $i_a = i_a(u)$ 表示在图 561 上；为了更加确定起见，下面我们假设特性的互导

$$S(u) = -\frac{di_a}{du}$$

在电路的平衡状态上($u = 0$ 时)具有最大值($=S_0$)，并随$|u|$的增加而单调地减小，最后趋向于零。

如果忽略小寄生电容 C_a，即设方程组(10.48)中 $\mu = 0$，则此种系统的状态集合在空间 u, z, v_1 中将构成曲面 F:

$$\left.\begin{aligned} &F(u, z, v_1) = 0, \\ \text{其中}\quad &F(u, z, v_1) = E_a - Ri_a(u) \\ &\quad -\left(1 + \frac{R}{\beta r}\right)u + (1-\beta)\frac{R}{\beta r}z - v_1 \end{aligned}\right\} \qquad (10.49)$$

即(10.48)中第一方程（导数项含有小系数μ的方程）的右端．空间 u, z, v_1 中的曲面F与坐标平面 u, z 同拓扑；因此可用此平面上的轨线来反映“缓慢”运动．根据(10.19)，我们有小寄生电容 C_a的可忽略条件：

$$\frac{\partial F}{\partial u} = RS(u) - 1 - \frac{R}{\beta r} < 0. \qquad (10.49a)$$

在这里显然可能出现两种情况．

当 $RS_0 < 1 + \dfrac{R}{\beta r}$，或者说

$$\beta < \beta_{临界} = \frac{R}{r}\frac{1}{RS_0 - 1}$$

时，条件(10.49a)对 $C_a = 0$ 的系统在整个相面F上都是满足的．在这种情况下，小寄生电容 C_a 对电路中的振动过程不是重要的，可将其忽略；在研究“万能”电路的振动时，可将其看成是一个自由度的振动系统，并以方程(10.49)和(10.48)中最后两个方程来描述．这显然是因为当 $\beta < \beta_{临界}$ 时，由于 C_a 很小($\mu \to +0$)而在空间 u, z, v_1 中曲面F的外部出现的所有“迅速”运动轨线，都走向这一曲面(图 562)．由这些方程中消去一个变量，例如 v_1，则得到变量 u, z 的微分方程：

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{u} &= \frac{\frac{R}{\beta r}\frac{C_1}{\beta C_2}u - \left[1+\frac{R}{\beta r}\left(1+\frac{C_1}{\beta C_2}\right)\right]z}{1+\frac{R}{\beta r} - RS(u)} \\
\dot{z} &= \frac{C_1}{\beta(1-\beta)C_2}u - \left(1+\frac{C_1}{\beta C_2}\right)\frac{z}{1-\beta},
\end{aligned}\right\} \qquad (10.50)
$$

式 (10.50) 具有正则右端 (第一方程右端的分母处处都是正值)。利用这些方程就使我们能够探讨所研究电路的性状，并对其振动作出相应的结论。

如果自激条件

$$
RS_0 > 1 + \frac{R}{r}\frac{C_1 + C_2}{C_1 + \beta C_2} \qquad (10.51)
$$

不满足，则唯一的平衡状态($u = 0$, $z = 0$)为稳定焦点或结点，所有相轨线都趋向它。在这种情况下，不论初始条件如何，电路都将趋向平衡状态，即其中无论连续的自振还是不连续的自振都不会出现。

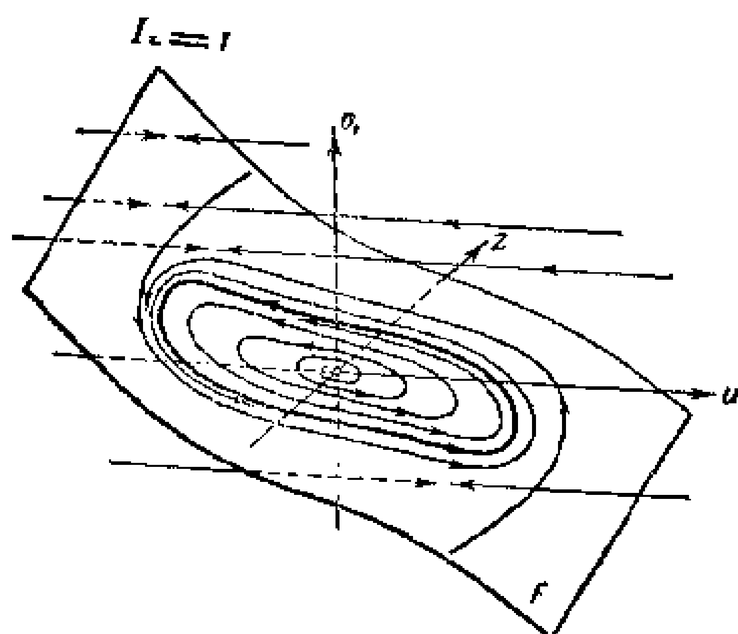


图 562

如果自激条件(10.51)成立(但仍有 $RS_0 < 1 + \frac{R}{\beta r}$)，则唯一的平衡状态 (0,0) 为不稳定焦点或结点；若采用前面关于电子管组特

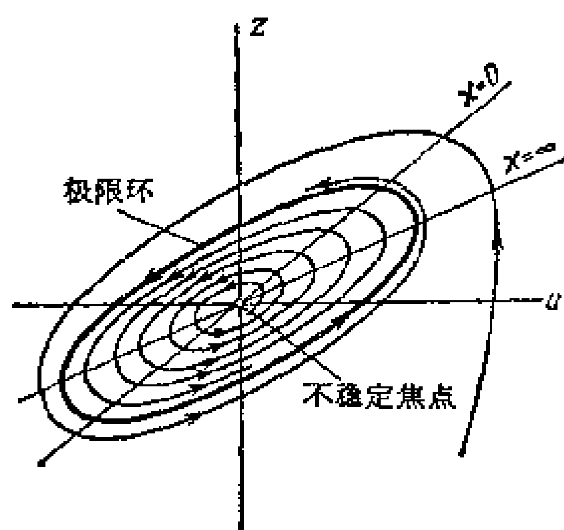


图 563

性 $i_a=i_a(u)$ 所作的假设，则在平面 u, z 上将存在有唯一的稳定极限环，所有其余相轨线都向它趋近（图 563 和 564）。图 563 和 564 所示之平面 u, z 的相轨线划分是采用方程组（10.50）的图解积分法绘制出来的（等倾线法）。其中第一个对应于平衡状态为不稳定焦点的情况，第二个对应于平衡状态为不稳定结点的情况。这样一来，在任何初始条件下，电路中都将建立起连续的自振，因为相点的运动速度，无论在极限环上或在整个平面 u, z 上，都是有限的（无论寄生电容 C_a 如何小，都是如此）。

若 $RS_0 > 1 + \frac{R}{\beta r}$，即：

$$\beta > \beta_{临界} = \frac{R}{r} \frac{1}{RS_0 - 1}, \tag{10.52}$$

则情况就完全不同。当此条件满足时，由于 $S(u)$ 的连续性，以及 $S(u)$ 随 $|u|$ 的增加由 S 变到 0 的单调性，显然在左三极管栅压 u 中，必有这样一个数值 u^*，使得 $RS(\pm u^*) = 1 + \frac{R}{\beta r}$，而且当 $|u| < u^*$ 时有 $RS(u) > 1 + \frac{R}{\beta r}$，因此，小寄生电容 C_a 的可忽略条件（条件 (10.49a)）就不再满足了。所以相空间 u, z, v_1 中的

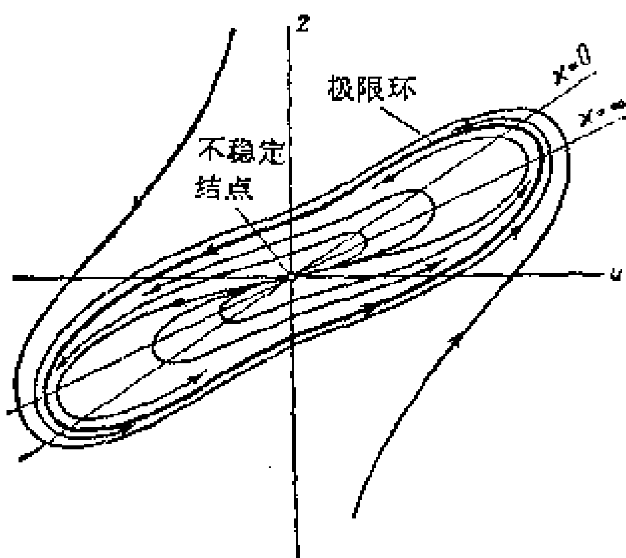


图 564

“迅速”运动轨线必离开曲面 F——不考虑寄生电容 C_a 时的相面——上的带状区 $|u| < u^*$，亦即，当 $|u| \leqslant u^*$ 时，在所研究的电路中只可能存在相点的“迅速”运动——电压 u 的跳跃，这种跳跃式的运动，当然是不满足忽略小寄生电容 C_a 而建立起来的方程组(10.50)的．与此相反，在曲面 F 的其余部分($|u| > u^*$ 部分)上，由于条件(10.49a)满足，“迅速”运动轨线走向曲面 F，因而在其附近相点的运动（电路的振动）可以满意地用“缓慢”运动方程组(10.50)来描述，如果寄生电容 C_a 真是很小的．

这样一来，当 $\beta > \beta_{临界}$ 时，我们就得出如图 565 所示的相空间 u, z, v_1 的相轨线划分，这对应于电路的不连续振动．在曲面 F 的 F^+ 部分：$|u| > u^*$ 上，相点作“缓慢”运动（$\mu \to +0$ 速度为有限值），其运动轨线当 C_a 足够小时($\mu \to +0$ 时)由方程组(10.50)确定．在 F^+ 的外部当 $\mu \to +0$ 时 $\dot{u} \to \infty$，但 $\dot{z}$ 和 $\dot{v}_1$ 则保持有限值，因此，在那里相点沿“迅速”运动轨线 $z =$ 常数，$v_1 =$ 常数作“迅速”运动(跳跃)[1]．由于在曲面 F 上方 $\dot{u} \to -\infty$ ($\mu \to +0$ 时)，在其下方 $\dot{u} \to +\infty$，故所有“迅速”轨线必走向曲面 F^+，然后转到“缓慢”轨线上去．“缓慢”运动轨线本身则在 $u = +u^*$ 或

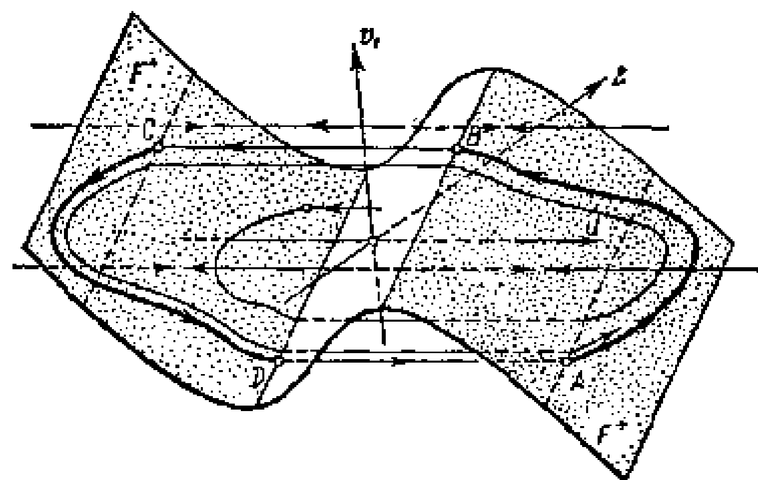


图 565

1) 电压 u 跳跃时，z 和 v_1 的不变条件也可以从电路中电流与电压之有限性的补充(物理)假设中得出．如果电路中的电流是有限大的(不可能无限大)，则电容器 C_1 和 C_2 上的电压 v_1 和 v_2 不可能跳跃式地改变($\dot{v}_1$ 和 $\dot{v}_2$ 必须是有限值)，这样，在瞬时跳跃时，v_1 和 $v_2 - v_1 = (1-\beta)ri_1 = (1-\beta)z$，即 z 是不变的．

$u=-u^*$ 时转变为跳跃轨线．由这些相互交替的"迅速"和"缓慢"运动轨线的线段，也就"缝接"成相点的运动轨线——所研究的电路在空间 u, z, v_1 中的相轨线．可以证实，所有相轨线（当 $t\to+\infty$ 时）都趋近于唯一的稳定极限环．由此可见，当 $\beta>\beta_{临界}$ 时，无论初始条件如何，电路中都建立起不连续自振．

在图 566 上表示出空间 u, z, v_1 的这种相轨线划分在坐标平面 u, z 上的投影．在区域 $|u|>u^*$ 中的"缓慢"运动轨线是根据方程组(10.50)，采用图解积分方法绘制出的；跳跃轨线为直线 $z=$常数，而且从点$(\pm u^*, z_1)$开始的跳跃轨线，其终点$(\mp u^{**}, z_2)$显然可由如下关系式中确定：

$$z_2=z_1;\quad Ri_a(\mp u^{**})\mp\left(1+\frac{R}{\beta r}\right)u^{**}=Ri_a(\pm u^*)\pm\left(1+\frac{R}{\beta r}\right)u^*$$

（这样一来，直线 $u=-u^{**}$ 和 $u=+u^{**}$ 就构成了跳跃轨线终点的集合）．我们看到，所有轨线都渐近地趋近于（$t\to+\infty$ 时）极限环 $ABCDA$，后者由两条"缓慢"运动轨线线段 AB 和 CD，以及两条"迅速"运动轨线线段 BC 和 DA 组成[1]．

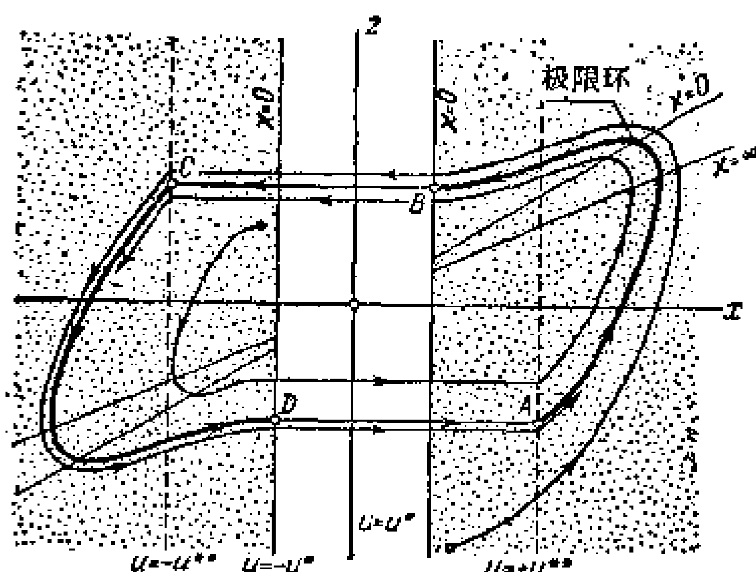


图 566

1) 关于极限环的存在性，以及所有轨线都向它趋近这一论断的严格证明，举例来说，对于电子管特性为分段线性的情况，可以采用建立和研究直线 $u=+u^*$ 对直线 $u=-u^*$ 的点变换（此变换是由系统的轨线所实现的）的方法进行．

应该指出，连续振动在 $\beta=\beta_{临界}$ 时向不连续振动的过渡本身是连续的：若 β 由较小的数值($\beta<\beta_{临界}$)向 $\beta_{临界}$ 逼近，则电压 u 在直线 $u=0$ 上的变化速度无限增大，并当 $\beta=\beta_{临界}$ 时达无限大；另一方面，由于跳跃的结果而引起电压 u 的变化($=u^{**}+u^{*}$)，则由 $\beta=\beta_{临界}$ 时的零值开始，当 $\beta>\beta_{临界}$ 时，随 β 的增加而增加。

§11. 间歇振荡器

在现代无线电技术中，为了获得短的脉冲电压，常采用所谓的间歇振荡器[65,71,91]，在图 567 上给出了间歇振荡器的一种电路。

间歇振荡器乃是一种具有电感反馈的振荡器，其中电子管几乎在整个自振周期内，都处于闭塞状态。电子管开启时，在变压器的栅极线圈内感应起正的电压，结果使电子管栅压 u 迅速达到很大的正值(到几百伏特)，从而电子管中出现甚大的屏流和栅流。这些电流通过变压器线圈，在其输出线圈内感应起电压脉冲。与此同时，栅流脉冲为电容器 C 充电，引起栅压 u 减小；因此，经过某一时间间隔以后(通常为周期的很小一部分)，电子管重新闭塞(因为屏流减小时在变压器的栅极线圈中感应起负电压，引起电子管的闭塞)[1]。在周期的其余部分上，电子管处于闭塞状态，没有栅流，电容器 C 通过 R 放电。栅压 u 逐渐增大，并经过某一时间间隔(其持续时间具有量级 RC)后，达到使电子管开启的数值，于是间歇振荡器发出下一个脉冲。

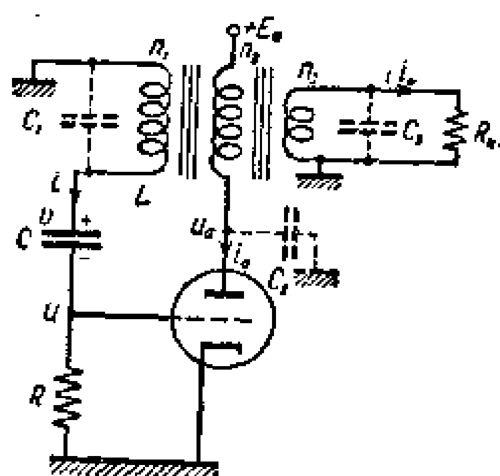


图 567

1) 这里我们所指的是间歇振荡器的闭塞状态的容性恢复情况，当 $\frac{L}{C}$ 足够大时就出现这种情况。

1. 振动方程. 在研究间歇振荡器的自振时，我们既不能忽略栅流，也不能忽略屏极反应，因为它们在间歇振荡器中起着重要的作用：在发出脉冲的时间内，电子管中有甚大的栅流，向电容器 C 充电，并在脉冲的末尾使电子管闭塞，而屏压 u_a（由于变压器屏极线圈上的电压降很大）则降低到非常小的数值，从而就限制了屏流和栅压脉冲的大小。因此，我们将假定屏流既是栅压的，也是屏压的函数，即：

$$i_a = i_a(u, u_a);$$

而与此同时，为了对问题做一定的简化，我们将假定栅流只与栅压有关，即：

$$i_g = i_g(u)$$

（当间歇振荡器中所应用的电子管为五极管时，这一假设会得到足够好的满足）。

其次，为了发出陡边沿的脉冲，必须使间歇振荡器的变压器具有最小的漏磁通和最小的线圈电容（为了达到这种要求，通常变压器都由环型铁心构成）。因此，很自然地首先假设（作为第一次近似），在变压器中完全不存在漏磁通，即变压器铁心的所有（横）截面上的磁通都相等。采用这种假设以后，在任何线圈的每一匝中，所通过的磁通都决定于所有线圈中的安匝总数，并等于

$$\Phi = \frac{L}{n_1^2}(n_1 i - n_2 i_a + n_3 i_H) = \frac{L}{n_1}(i - k i_a + k' i_H),$$

其中 L 为变压器栅极线圈的电感，n_1, n_2 和 n_3 为栅极、屏极和输出线圈的匝数，$k = \frac{n_2}{n_1}$ 和 $k' = \frac{n_3}{n_1}$ 为栅极线圈与屏极和输出线圈之间的变压比；i 为电容器 C 的电路中的电流，i_H 为负荷电流（图567）；以后我们把

$$I = i - k i_a + k' i_H \qquad (10.53)$$

称为（变压器铁心的）磁化电流[1]. 此时，在变压器的栅极、屏极和

1）我们假设，变压器的栅极和屏极线圈的绕法是这样的，它使变压器中由电流 i 和 i_a 所造成的分磁通具有相反的符号。只有满足这种条件，才能获得激励间歇振荡器所必需的正反馈。

输出线圈中所感应的电动势，将分别等于

$$-\frac{d}{dt}(n_1\Phi)=-L\frac{dI}{dt},\qquad +\frac{d}{dt}(n_2\Phi)=kL\frac{dI}{dt}$$

以及

$$-\frac{d}{dt}(n_3\Phi)=-k'L\frac{dI}{dt}.$$

除此而外，若忽略电路的一切寄生参数(特别是变压器绕组的小电容和电子管的极间电容)，则得出间歇振荡器的振动方程：

$$\left.\begin{aligned}-L\frac{dI}{dt}&=u+v=\frac{E_a-u_a}{k}=\frac{R_Hi_H}{k'},\\ C\frac{dv}{dt}&=i=\frac{u}{R}+i_g(u),\end{aligned}\right\}\tag{10.54}$$

其中 R_H 为外负荷电阻，并设其为纯电阻(欧姆电阻). 代入磁化电流 I 的表示式(10.53)以后，得：

$$I=\frac{u}{R}+i_g(u)-ki_a(u,\ u_a)+\frac{k'^2}{R_H}\frac{E_a-u_a}{k}=I(u,u_a).\tag{10.53a}$$

并消去电容 C 上的电压

$$v=\frac{E_a-u_a}{k}-u,\tag{10.54a}$$

则有：

$$L\left\{\frac{1}{R}+S_g(u)-kS(u,\ u_a)\right\}\frac{du}{dt}$$

$$+L\left\{\frac{k^2}{Ri(u,u_a)}+\frac{k'^2}{R_H}\right\}\frac{1}{k}\frac{du_a}{dt}=\frac{E_a-u_a}{k},$$

$$-\frac{du}{dt}-\frac{1}{k}\frac{du_a}{dt}=\frac{1}{C}\left[\frac{u}{R}+i_g(u)\right],$$

其中 $S_g(u)$, $S(u,u_a)$ 和 $R_i(u,u_a)$ 分别为栅流特性的互导，屏流特性的互导，以及电子管的内阻，即

$$S_g(u)=\frac{di_g}{du},\ S(u,u_a)=\frac{\partial i_a}{\partial u},\ \frac{1}{R_i(u,u_a)}=\frac{\partial i_a}{\partial u_a}.$$

若由上述方程中解出诸导数，则得：

$$Lg(u,u_a)\frac{du}{dt}=\frac{u_a-E_a}{k}-\frac{L}{C}\left\{\frac{k^2}{R_i(u,u_a)}+\right.$$

$$+\frac{k'^2}{R_H}\Big\}\Big[\frac{u}{R}+i_g(u)\Big],$$

$$L_g(u, u_a)\frac{1}{k}\frac{du_a}{dt}=\frac{E_a-u_a}{k}$$

$$-\frac{L}{C}\Big\{\frac{1}{R}+S_g(u)-kS(u, u_a)\Big\}\Big[\frac{u}{R}+i_g(u)\Big], \qquad (10.55)$$

其中

$$g(u, u_a)=\frac{1}{R}+S_g(u)+\frac{k^2}{R_i(u, u_a)}+\frac{k'^2}{R_H}-kS(u, u_a).$$

显然，间歇振荡器具有唯一的平衡状态，决定于方程组：

$$u_a-E_a=0, \qquad u+Ri_g(u)=0,$$

亦即，若忽略 $u\leqslant 0$ 时的栅流，则在平衡状态上，

$$u=0, \qquad u_a=E_a.$$

不难看出，在间歇振荡器的平衡状态上，特征方程可写成如下形式：

$$\begin{vmatrix} Lg(0,E_a)\lambda+\frac{L}{C}\Big[\frac{k^2}{R_i(0,E_a)}+\frac{k'^2}{R_H}\Big]\Big[\frac{1}{R}+S_g(0)\Big] & -1 \\ \frac{L}{C}\Big[\frac{1}{R}+S_g(0)-kS(0,E_a)\Big]\Big[\frac{1}{R}+S_g(0)\Big] & Lg(0,E_a)\lambda+1 \end{vmatrix}=0$$

或

$$Lg(0, E_a)\lambda^2+\Big\{1+\frac{L}{C}\Big[\frac{k^2}{R_i(0, E_a)}+\frac{k'^2}{R_H}\Big]$$

$$\times\Big[\frac{1}{R}+S_g(0)\Big]\Big\}\lambda+\frac{1}{C}\Big[\frac{1}{R}+S_g(0)\Big]=0.$$

下面我们只研究间歇振荡器的唯一平衡状态是不稳定的，因而使间歇振荡器发生自激的情况，即设启激条件

$$g(0, E_a)=\frac{1}{R}+S_g(0)+\frac{k^2}{R_i(0, E_a)}+\frac{k'^2}{R_H}$$

$$-kS(0, E_a)<0 \qquad (10.56)$$

是满足的。

2. 电压和电流的跳跃. 当条件(10.56)满足时，在相平面 u, u_a 上必存在某一曲线(以后将用 Γ 表示)，在其各点上

$$g(u,\ u_a)=0,\tag{10.57}$$

而且 u 和 u_a 的变化速度变为无限大. 确实如此，当 $|u|$ 足够大时，屏流特性的互导 $S(u,u_a)$ 很小(当 u 为负值时——由于电子管处于闭塞状态，当 u 取大的正值时——则由于屏极反应)[1]，即 $g(u,u_a)>0$. 另一方面，根据条件(10.56)有 $g(0,E_a)<0$. 从这些以及从 $S_g(u)$, $S(u,u_a)$, $[R_i(u,u_a)]^{-1}$, 因之还有 $g(u,u_a)$ 为连续函数的假设，就可以推导出：在平面 u, u_a 上必存在有连续几何曲线 $g(u,u_a)=0$，即曲线 Γ. 此曲线的形状如图 568 所示.

函数 $g(u,u_a)$ 在通过曲线 Γ 时，改变自己的符号，这一点对于我们很重要；因此，此曲线的一部分上的点必为相轨线的止点. 由此可见，忽略电路的所有小寄生参数，包括电路的小寄生电容和变压器中的漏磁通在内，我们将得到间歇振荡器的"有缺陷的"模型，在它的相平面上存在有相轨线的止点，因而不能用以研究电路的振动. 因此，我们就不得不设法改变间歇振荡器的动力学模型，或对电路振动的性质做出必要的假设，或考虑某些虽然数值很小，但对间歇振荡器中的振动过程却起重要作用的小寄生参数.

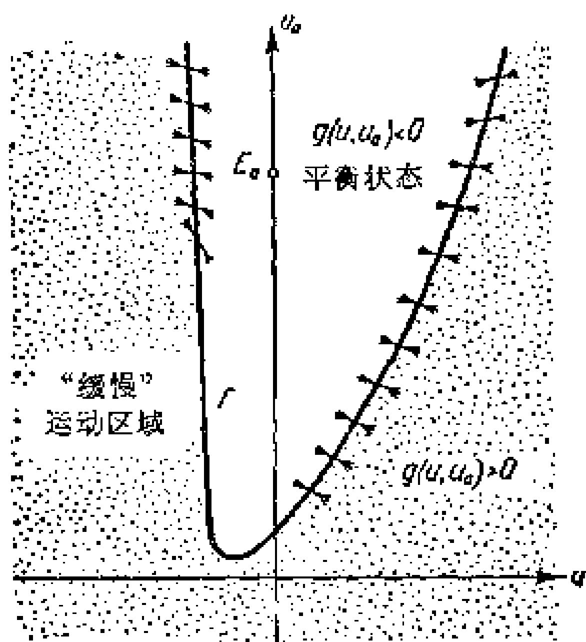


图 568

和以前一样，相平面上出现相轨线的止点说明，不考虑寄生参数所建立起来的方程组(10.55)，不能在 u 和 u_a 取所有值时，都正确地反映间歇振荡器的振动规律；换句话说，平面 u, u_a 被曲线 Γ 所分隔开的两个区域中，有一个区域，在其中某些未被考虑到的寄生参数起着重要的作用，因而在那里方程组(10.55)就不能用以描述电路的振动. 因此，首

1) 当栅压取大的正值时(即屏流很大时)，屏流几乎不再与栅压有关，而主要决定于屏压.

先必须解决的问题是，在平面 u, u_a 的哪一个区域中小寄生参数对于间歇振荡器的振动过程是不重要的，因而方程组(10.55)以一定的准确度反映其中之振动的规律.

关于间歇振荡器的振动性质，我们将采用如下补充假定：

1) 在区域

$$g(u, u_a) > 0$$

中，电路的小寄生参数不起重要作用，因而间歇振荡器的振动("缓慢"运动)由方程组(10.55)所描述（下面这种情况在一定程度上可以做为此假设的依据：在区域 $g(u, u_a) > 0$ 里，有 u, u_a 的这种值域，在其中电子管是闭塞的，且在其中小寄生参数看来是不起重要作用的).

2) 如果相点在平面 u, u_a 上(在区域 $g(u, u_a) > 0$ 内)，沿方程组(10.55)的轨线运动到曲线 Γ 上，那么然后它就将瞬时地跳跃到另外一点，而这一点又重新位于"缓慢"运动区域 $g(u, u_a) > 0$ 中.

3) 假定在电路中，电压与电流的值是有界的，我们必须认为在瞬时跳跃时间内，电容器 C 上的电压 v 和变压器线圈中的磁通是保持不变的[1]；由于在"缓慢"运动过程中，电压 v 在跳跃前后以关系式(10.54a)与 u 和 u_a 相联系，而通过变压器线圈的磁通则完全决定于磁化电流 $I = I(u, u_a)$（参看(10.53a)），因而跳跃终点 (u^*, u_a^*) 与曲线 Γ 上的跳跃起点 (u, u_a) 以如下关系式彼此联系：

$$\left.\begin{aligned} u^* + \frac{u_a^*}{k} &= u + \frac{u_a}{k}, \\ I(u^*, u_a^*) &= I(u, u_a). \end{aligned}\right\} \tag{10.58}$$

利用上述补充假设和方程组(10.15)，就足以研究间歇振荡器的振动过程.

下面我们来考虑图567中以虚线表示的变压器线圈的小寄生电容(图中

---

1) 若在瞬时跳跃时间内，电压和某一线圈中的磁通改变了有限值，则电流 $i = C\frac{dv}{dt}$ 以及相应线圈中的感应电动势必为无限大，这与电路中电压与电流的有限性假设是矛盾的.

C_2 为屏极线圈电容与电子管输出电容的合成电容，C_3 为输出线圈电容与间歇振荡器输出电路电容的合成电容)，并研究由此建立起来的三阶模型，从而证明上面对间歇振荡器的不连续振动性质所作的假设；其它小寄生参数(包括变压器的漏磁通在内)，我们仍然忽略不计。对于此种模型可以写出如下的振动方程：

$$-L\frac{dI^*}{dt}=u+v=\frac{E_a-u_a}{k}=\frac{u_{出}}{k'},$$

$$C\frac{dv}{dt}=\frac{u}{R}+i_g(u)=i(u),$$

其中

$$I^*=i+C_1\frac{d(u+v)}{dt}-k\left[i_a+C_2\frac{du_a}{dt}\right]+k'\left[\frac{u_{出}}{R_H}+C_3\frac{du_{出}}{dt}\right]$$

$$=i(u)-ki_a(u,u_a)+\frac{k'^2}{R_H}\frac{E_a-u_a}{k}-\frac{C'}{k}\frac{du_a}{dt}$$

$$=I(u,u_a)-\frac{C'}{k}\frac{du_a}{dt}$$

为磁化电流(在此表示式中 $C'=C_1+k^2C_2+k'^2C_3$ 为一小等价电容，与变压器栅极线圈并联)。从上述诸方程中消去 $u=\frac{E_a-u_a}{k}-v$，可得三阶微分方程组(变量为 I^*，v 和 u_a)：

$$\left.\begin{aligned}&L\frac{dI^*}{dt}=\frac{u_a-E_a}{k},\\&C\frac{dv}{dt}=i=i\left(\frac{E_a-u_a}{k}-v\right),\\&\frac{C'}{k}\frac{du_a}{dt}=I\left(\frac{E_a-u_a}{k}-v,u_a\right)-I^*=F(u_a,v,I^*).\end{aligned}\right\}\qquad(\alpha)$$

根据方程组(α)，当 $C'\to+0$ 时，在相空间 u_a, v, I^* 中曲面 F：

$$F(u_a,v,I^*)\equiv I-I^*=0$$

的外部，$\frac{du_a}{dt}\to\infty$，但$\frac{dv}{dt}$ 和 $\frac{dI^*}{dt}$ 则保持有限值。因此，在曲面 F 的外部，系统的相点将沿轨线：

$$v=常数，I^*=常数\qquad(\beta)$$

作“迅速”运动。在此运动过程中，电压 u 和 u_a 跳跃地变化，而电容器 C 上的电压 v 和通过变压器线圈的磁通则保持不变。

我们知道，这些“迅速”运动轨线(β)走向曲面 F 上满足

$$\frac{\partial F}{\partial u_a}<0\ 或\ g(u,u_a)>0$$

的那一部分，因为

$$k\frac{\partial F}{\partial u_a}=-\frac{\partial I}{\partial u}+k\frac{\partial I}{\partial u_a}=-\frac{1}{R}-S_g(u)+kS(u,u_a)$$

$$-\frac{k^2}{R_i(u,u_a)}-\frac{k'^2}{R_H}=-g(u,u_a);$$

与此相反，相点则以跳跃的方式离开曲面 F 上具有 $g(u,u_a)<0$ 的那一部分。因此，相点的"缓慢"运动（$C'\to+0$ 时变量具有限速度之间歇振荡器状态的"缓慢"变化）只出现在曲面 F^+：

$$I^*=I(u,u_a),\quad u=\frac{E_a-u_a}{k}-v,\quad g(u,u_a)>0 \qquad (F^+)$$

的微小邻域内（在极限情况中，当 $C'\to+0$ 时，则在曲面 F^+ 上）；因此，当寄生电容足够小时（C' 足够小时）"缓慢"运动方程可写成方程组(10.54)或(10.55)的形式。

在曲面 F^+ 的外部，相点沿轨线(β)作"迅速"运动，而且间歇振荡器的寄生电容越小，电压 u 和 u_a 的变化速度就越大；这些"迅速"运动轨线在平面 u，u_a 上的投影为线 $v=$ 常数，即直线

$$u+\frac{u_a}{k}=\text{常数}。 \qquad (\beta')$$

曲面 F^+ 上的"缓慢"运动轨线在此曲面的边界上（此边界线在平面 u，u_a 上的投影为曲线 Γ），转变为"迅速"运动（跳跃）轨线；不难看出，"迅速"运动轨线本身又重新走向曲面F^+，并转为"缓慢"运动轨线。此时，由于在跳跃时间内 v 和 I^* 不变，而在曲面 F^+ 上 $I^*=I(u,u_a)$，因而位于曲面 F^+ 上的跳跃轨线的起点和终点必以条件(10.58)彼此联系。为了解释上面所说的，图 569 上表示出了曲面 F^+ 和相空间 u，u_a，I^* 中的某些相轨线，以及它们在平面 u，u_a 上的投影。

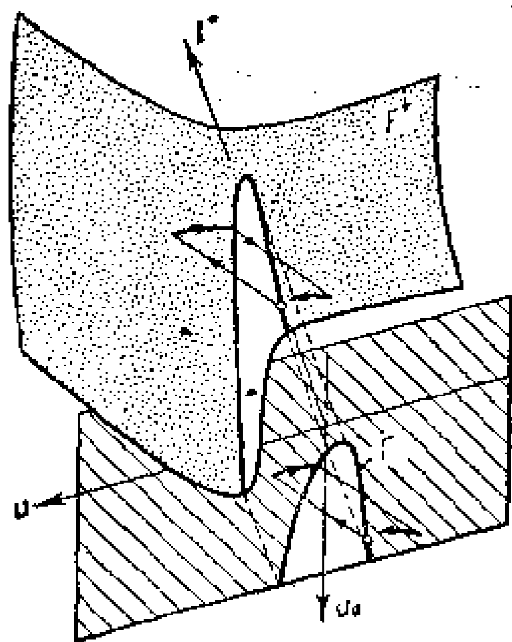


图 569

这样一来，由于考虑了那些在电路状态跳跃时间内起重要作用的小寄生电容，我们就建立起了间歇振荡器的"合格的"模型（三阶模型），这种模型能够满意地反映间歇

振荡器的性状，并在 $C\to0$ 的极限情况中，给出了上面对间歇振荡器的不连续振动性质所提出的假设.

须要指出，这些假设还可以从间歇振荡器的其他模型的动力学中导出，例如考虑变压器中的小漏磁通而忽略所有寄生电容所建立的模型（三阶模型），或既考虑小寄生电容又考虑小漏磁通所建立的五阶模型. 但这样一来，"迅速"运动轨线（它们在平面 u, u_a 上的投影）将不同于直线（β'）；例如，当只考虑变压器中的漏磁通时，"迅速"运动轨线在平面 u, u_a 上的投影将为曲线.

$$I(u, u_a) = 常数. \qquad (\beta'')$$

3. 不连续振动. 为了进一步更详细地研究间歇振荡的不连续自振，我们将电子管的特性以分段线性特性来逼近，并作为五极管的理想化特性，如图 570 所示：

$$i_a = i_a(u, u_a) = \begin{cases} 0 & 当\ u_a \leqslant 0\ 和\ u \leqslant -u_0\ 时, \\ S(u+u_0) & 当\ 0 < S(u+u_0) < \dfrac{u_a}{R_0}\ 时, \\ \dfrac{u_a}{R_0} & 当\ S(u+u_0) \geqslant \dfrac{u_0}{R_0} > 0\ 时, \end{cases}$$

$$i_g = i_g(u) = \begin{cases} 0 & 当\ u < 0\ 时, \\ S_g u & 当\ u \geqslant 0\ 时, \end{cases}$$

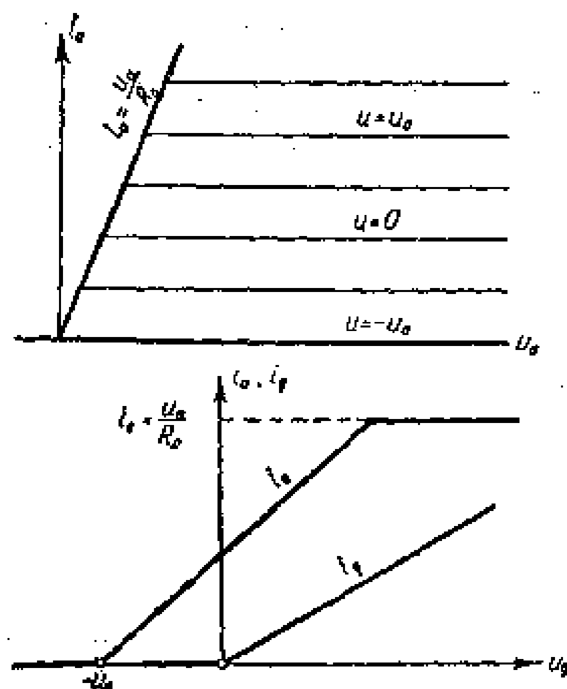


图 570

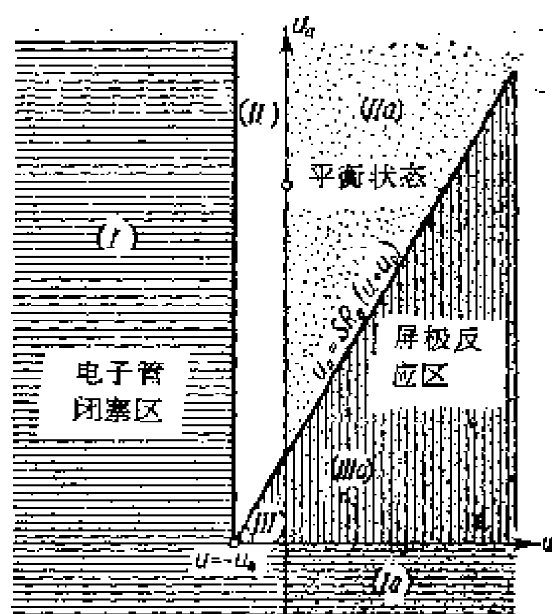


图 571

其中 $-u_0$ 为电子管的闭塞电压，S 和 S_g 为屏流和栅流特性曲线的上升段（直线）的互导，R_0 为电子管在屏极反应区中的内阻（这就是说，我们假定，当电子管屏极电压足够大——$u_a > SR_0(u+u_0)$——时，不存在屏极反应，即屏流 i_a 只与栅压 u 有关；与此相反，在屏极反应区，当 $u_a \leqslant SR_0(u+u_0)$ 时，则屏流完全决定于屏极电压，而与栅压无关）.

采用电子管特性的这种分段线性逼近以后，平面 u, u_a 将划分成六个"线性"区域，在每个区域中间歇振荡器的振动方程都是线性的．这些"线性"区域表示在图 571 上：区域(I)和(Ia)对应于闭塞的电子管（$i_a = 0$），在区域(II)和(IIa)中没有屏极反应，即屏流 i_a 只与栅压 u 有关；最后，区域(III)和(IIIa)为"全"屏极反应区域，其中屏流与栅压无关，而完全决定于电子管的屏压；在区域（Ia），(IIa)和(IIIa)中 $u > 0$，因而在电子管中有栅流通过.

若令

$$kS > \frac{1}{R} + S_g + \frac{k'^2}{R_H} \text{ 和 } E_a > SR_0u_0, \qquad (10.59)$$

则间歇振荡器的平衡状态$(0, E_a)$将位于区域(II)和(IIa)的边界线上，在这两个区域中 $R_i = \infty$，因此 $g(u, u_a) < 0$．可见，此平衡状态不稳定，在区域(II)和(IIa)中只能有相点的"迅速"运动（跳跃）．与此相反，在区域(I)，(Ia)，(III)和(IIIa)中，即电子管的闭塞区和屏极反应区中，则可能出现相点的"缓慢"（以有限的速度）运动，满足方程组(10.55)．很明显，在电子管的特性为分段线性的情况中，"缓慢"运动区域的边界线，即曲线 Γ，为半直线

$$u = -u_0,\ u_a > 0 \text{ 和 } u_a = SR_0(u+u_0) > 0.$$

为了把"缓慢"运动方程组化为无量纲形式，我们引入新的无量纲变量 $x, y, t_{新}$，其与旧变量以如下关系式相联系：

$$u = u_0x,\ u_a = ku_0y,\ t_{旧} = Lg(u, u_a)t_{新} \qquad (10.60)$$

（为简单起见，下面我们把新的无量纲时间 $t_{新}$ 以 t 表示，而旧的普通时间则以 $t_{旧}$ 表示；在相平面的不同"线性"区域中，时间比例尺显然是不同的）．此时，"缓慢"运动方程组——方程组(10.55)——

可写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= y - A - a(x,y)x,\\ \dot{y} &= A - y - b(x)x,\end{aligned}\right\} \tag{10.61}$$

其中

$$a(x,\ y) = \frac{L}{C}\frac{G(x)}{r(x,y)}, \quad b(x) = \frac{L}{C}[G(x)]^2,$$

栅极电路的全电导

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{R} & \text{当 } x < 0 \text{ 时},\\ G = \dfrac{1}{R} + S_g & \text{当 } x \geqslant 0 \text{ 时}, \end{cases}$$

$$\frac{1}{r(x,y)} = \frac{k^2}{R_i} + \frac{k'^2}{R_H}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{r_1} = \dfrac{k'^2}{R_H} & \text{在区域(I)和(Ia)中},\\ \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{k^2}{R_0} + \dfrac{k'^2}{R_H} & \text{在区域(III)和(IIIa)中} \end{cases}$$

为分区常量函数(在每个线性区域中均为常量)，以及

$$A = \frac{E_a}{ku_0}$$

为折算无量纲屏极电压(电源电压)。

在相平面 x, y 上"缓慢"运动区域的边界线为半直线 Γ：

$$x = -1,\ y > 0 \ \text{和}\ y = \frac{SR_0}{k}(x+1) > 0, \tag{10.62}$$

而跳跃条件(10.58)则可表述如下：相点由半直线(10.62)开始跳跃时，量

$$G(x)x - \frac{y}{r(x,y)} \ \text{和}\ x + y \tag{10.58a}$$

的值在跳跃后的瞬时与跳跃前的值完全相等。

为了证明跳跃条件(10.58a)，我们指出，在"缓慢"运动区域中，即区域(I)，(Ia)，(III)和(IIIa)中，屏流

$$i_a = \frac{u_a}{R_i} = \frac{ku_0y}{R_i},$$

其中 R_i 为电子管的内阻(在区域(I)和(Ia)中 $R_i = \infty$,在区域(III)和(IIIa)中 $R_i = R_0$);因此,磁化电流

$$I = u_0 \left\{G(x)x - \frac{y}{r(x, y)} + \frac{A}{r_1}\right\}. \qquad (\alpha)$$

此外,电容器 C 上的电压

$$v = u_0\{A - (x + y)\}. \qquad (\beta)$$

上面所表述的跳跃条件(10.58a)可由跳跃条件(10.58)和 I 及 v 的上述表示式中导出。

为了确定起见,下面我们将假设,在间歇振荡器状态的跳跃时间内,起重要作用的小寄生参数中,寄生电容是最主要的,并忽略变压器的微小的漏磁通。此时,平面 x, y 上的跳跃轨线将是直线

$$x + y = \text{常数}, \qquad (\gamma)$$

因为当变压器中没有漏磁通时,无论在"缓慢"运动过程还是在"迅速"运动过程中,电容器 C 上的电压 v 都决定于表示式(β),而此电压在跳跃时间内,并不发生变化(几乎不变,若间歇振荡器的寄生电容足够小)。在跳跃时间内保持不变的还有磁化电流,但它在跳跃时间内不同于表示式(α)(由于寄生电容的存在),只有在跳跃终止以后,它才等于此表示式。

跳跃轨线(γ),在表示平面 x, y 的相轨线划分的图上,将以细线画出。

由方程组(10.61)中可得出对今后很有用的方程

$$\frac{d}{dt}(x + y) = -\{a(x, y) + b(x)\}x. \qquad (10.61a)$$

例如由此方程中可以导出,当 $x < 0$ (即 $u < 0$)时,$x + y$ 增加(而电压 v 则减小),反之,当 $x > 0$ ($u > 0$) 时,$x + y$ 则减小(v 增加)。

下面我们来研究间歇振荡器的相平面 x, y 的轨线划分,设

$$A \gg 1 \text{ 和 } \frac{R_0}{k^2}, \frac{1}{S_g}, \frac{R_H}{k'^2}, \sqrt{\frac{L}{C}} \ll \sqrt{\frac{RR_H}{k'^2}} \ll R, \qquad (10.63)$$

此条件对于一般常见的间歇振荡器的参数值是满足的(A 约为几十,而 R_0/k^2, $1/S_g$ 和 R_H/k'^2 则具有相同的量级,约为几百欧姆,远小于电阻 R)。

在区域(I)中(电子管闭塞,即 $i_a \equiv 0$, $i_g \equiv 0$, $G(x) = \frac{1}{R}$ 以及 $r(x,y) = r_1 = \frac{R_H}{k'^2}$),间歇振荡器的"缓慢"振动方程组可写成

如下线性微分方程组形式:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= y - A - a_1 x,\\ \dot{y} &= A - y - b_1 x,\end{aligned}\right\} \tag{10.64}$$

其中

$$a_1 = \frac{L}{CRr_1},\ b_1 = \frac{L}{CR^2},$$

而且对于常见的参数值有 $0 < b_1 \ll a_1 \ll 1$; 在区域(I)中 $t_{\text{慢}} \approx \frac{L}{r_1} t_{\text{新}}$,因为在这里 $g(u,\ u_a) = \frac{1}{R} + \frac{k'^2}{R_H} \approx \frac{1}{r_1}$.

方程组(10.64)的特征方程

$$\lambda^2 + (1 + a_1)\lambda + a_1 + b_1 = 0 \tag{10.64a}$$

当 $0 < b_1 \ll a_1 \ll 1$ 时具有两个负实根:

$$\lambda_1 = -\gamma_1 < 0 \text{ 和 } \lambda_2 = -\gamma_1' < 0,$$

其中

$$\gamma_1 = a_1 + b_1[1 + O(a_1)] \approx a_1,$$
$$\gamma_1' = 1 - b_1[1 + O(a_1)] \approx 1^*.$$

方程组(10.64)的通解为:

$$\left.\begin{aligned}x &= B_1 e^{-\gamma_1 t} + B_1' e^{-\gamma_1' t} \approx B_1 e^{-a_1 t} + B_1' e^{-t},\\ y &= A + B_1(a_1 - \gamma_1)e^{-\gamma_1 t} + B_1'(a_1 - \gamma_1')e^{-\gamma_1' t}\\ &\approx A - B_1 b_1 e^{-a_1 t} - B_1' e^{-t}.\end{aligned}\right\} \tag{10.64b}$$

图 572 上表示出了区域(I)划分成相点的"缓慢"运动轨线的图. 在此区域中,有两条直线轨线 $y = A + \varkappa_1 x$ 和 $y = A + \varkappa_2 x$, 其中 $\varkappa_1 = -b_1 \approx 0$, $\varkappa_2 \approx -1$[1]. 其余轨线(在轨线 $y = A + \varkappa_1 x$ 的小邻域外部)则接近于直线 $x + y =$ 常数(更准确些说,接近于平行第二条直线轨线 $y = A + \varkappa_2 x$ 的直线), 相点沿这些轨线趋向第一条直线轨线. 不难看出,所有位于 $y > 0$ 区域中的轨线都

---

* 原书 b_1 为 b; ≈ 1 为 ≈ -1 ——译者注.

1) 根据(10.64),可写出直线相轨线 $y = A + \varkappa x$ 的斜率的关系式:

$$\varkappa^2 + (1 - a_1)\varkappa + b_1 = 0,$$

由此可得

$$\varkappa_1 = -b_1[1 + O(a_1)] \approx 0 \text{ 和 } \varkappa_2 = -1 + a_1 + b_1[1 + O(a_1)] \approx -1.$$

从区域(I)的边界线——半直线 Γ_1

$$x = -1,\ y \geqslant A - a_1$$

走出区域(I)(因为只有 $y \geqslant A_1 - a_1$ 时才有 $\dot{x} \geqslant 0$)。同时，所有位于直线 $x + y = A - 1$ 下方* 的轨线都进入几乎是水平的轨线 $y = A + x_1 x$ 的微小邻域内，因而在极其接近于点 $(-1, A)$ 的点处，到达半直线 Γ_1[1]。

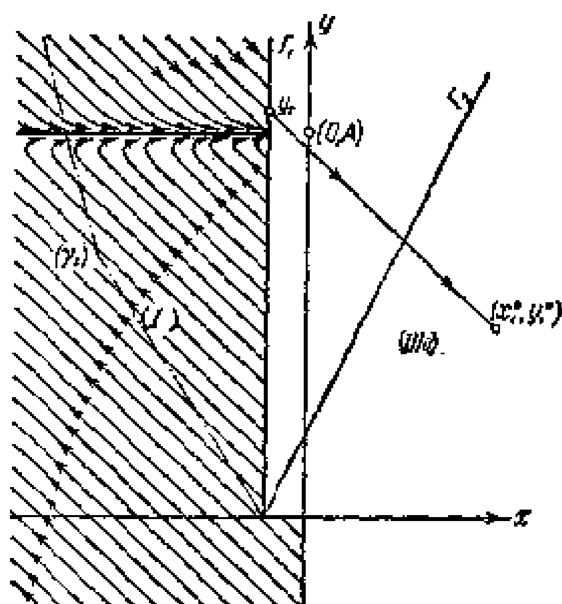


图 572

如果相点在纵坐标为 y_1($y_1 \geqslant A - a_1$) 的点上到达半直线 $x = -1$，则在这以后将沿相应的"迅速"运动轨线(沿轨线 $x + y = y_1 - 1$)"跳到"点(x_1^*, y_1^*)，此点可由跳跃条件(10.58a)(电容器 C 的电压和变压器磁化电流的守恒条件)单值地确定，并位于区域(IIIa)中，若条件(10.63)成立。这就是说，跳跃终点(x_1^*, y_1^*)将根据跳跃起点决定于方程：

$$Gx_1^* - \frac{y_1^*}{r_2} = -\frac{1}{R} - \frac{y_1}{r_1} \approx -\frac{y_1}{r_1},\ \text{因为通常}\ r_1 \ll R,$$

以及

$$x_1^* + y_1^* = -1 + y_1,$$

由此可得

---

* 区域(I)中位于原点附近的一小块(几乎是一三角形)区域中的轨线应除外，因为其中的轨线将进入区域(III)。这亦是为什么上一句话中说"所有位于 $y>0$ 区域中的轨线……走出区域(I)"，显然，$y<0$ 中的轨线除这一小块以外，最后亦将走出区域(I)——译者注。

1) 需要指出，相点在轨线 $y = A + x_1 x \simeq A$ 上以及在其小邻域内的运动对应于变压器线圈电压不大时电容器 C 向电阻 R 的放电过程。当相点沿此轨线运动时，x(电子管栅压 u)的变化与 $e^{-x_1 t}$ 或 $e^{-\frac{t_旧}{RC}}$($t_旧$ 为普通有量纲时间)相似，而沿其余轨线运动时，则变量 x 和 y 的变化与 e^{-t} 或 $e^{-\frac{r_1}{L}t_旧}$ 相同，此变化要快得多。

$$x_1^* \approx \frac{y_1\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)-\frac{1}{r_2}}{G+\frac{1}{r_2}}, \quad y_1^* \approx \frac{y_1\left(G+\frac{1}{r_1}\right)-G}{G+\frac{1}{r_2}} \tag{10.65}$$

(因为 $y_1 \geqslant A-a_1 \gg 1$，所以 $x_1^* > 0$ 和 $0<y_1^*<\frac{SR_0}{k}(x_1^*+1)$，即点$(x_1^*, y_1^*)$确实位于区域(IIIa)中；且有 $y_1^* < y_1$)。

在区域(IIIa)中，即屏极反应和栅流区域中(在这里 $R_i=R_0$ 且 $G(x)=G\approx\frac{1}{S_g}$，因为通常 $S_g \gg \frac{1}{R}$)，方程组(10.61)可写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y-A-a_2x, \\ \dot{y} &= A-y-b_2x, \end{aligned}\right\} \tag{10.66}$$

其中

$$a_2=\frac{L}{C}\frac{G}{r_2}, \quad b_2=\frac{L}{C}G^2;$$

在区域(IIIa)中 $t_{旧}=L\left(G+\frac{1}{r_2}\right)t_{新}$. 积分曲线(或相轨线，因为在区域(IIIa)中方程组(10.66)没有平衡状态)的微分方程为：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{A-y-b_2x}{y-A-a_2x}. \tag{10.66a}$$

线性方程组(10.66)的特征方程

$$\lambda^2+(1+a_2)\lambda+a_2+b_2=0 \tag{10.66b}$$

由于 a_2 和 b_2 之值的不同，即由于间歇振荡器栅极电路的特征阻抗与电阻

$$\frac{1}{G}\approx\frac{1}{S_g} \text{ 以及} \sqrt{\frac{r_2}{G}}\approx\left\{S_g\left(\frac{k^2}{R_0}+\frac{k'^2}{R_H}\right)\right\}^{-1/2}$$

三者之间的关系不同，或具有两个负实根(当$(1-a_2)^2>4b_2$时)，或具有两个实部为负的共轭复根(当$(1-a_2)^2<4b_2$时)。不难看出，存在有这样两个数值 ρ_1 和 ρ_2 (且 $\rho_1<\sqrt{\frac{r_2}{G}}<\rho_2$)，当 $\rho<\rho_1$ 和 $\rho>\rho_2$ 时特征方程(10.66b)的根为负实数，而在 $\rho_1<\rho<\rho_2$

时则为共轭复数.

与此相对应，在区域(IIIa)中的轨线将象稳定结点的抛物线型轨线那样(此稳定结点位于平衡状态$(0, A)$,即在区域(IIIa)的外部)，或象在稳定焦点(亦位于该点处)的螺旋线弧那样. 当间歇振荡器的特征阻抗 $\rho=\sqrt{\frac{L}{C}}$ 具有足够大和足够小的数值时，这些轨线的形状更加简单.

当ρ足够大，即 $a_2, b_2 \gg A$ 时，在纵轴的小邻域外部，$\frac{dy}{dx} \approx +\frac{b_2}{a_2}$(根据方程(10.66a))，而相轨线则接近于直线 $y-\frac{b_2}{a_2}x=$ 常数或 $\frac{y}{r_2}-Gx=$ 常数，这些直线为变压器的恒定磁化电流线，因为在区域(IIIa)中磁化电流

$$I=u_0\left\{Gx-\frac{y}{r_2}\right\}.$$

当相点沿这些轨线运动时，x 和 y 减小(即电子管栅压、屏压及屏流减小). 与此同时，$x+y$ 的减小，亦即电容器C的电压v的增加，比较显著. 换句话说，当 $a_2, b_2 \gg A$，即 $\rho \gg \frac{1}{G}, \sqrt{\frac{r_2}{G}}$ 时，在发出屏流脉冲的时间内变压器的磁化电流几乎不变，而栅压的减少(这种减少最终将使电子管闭塞)则是由于电容器C上的电压v发生显著和比较迅速的变化而引起的(由于电子管中有栅流存在)，而这是和变压器栅极线圈电压的增加无关的. 这样的停止发出屏流脉冲的机理称为间歇振荡器闭塞状态的**容性恢复**.

与此相反，当 $\rho=\sqrt{\frac{L}{C}}$ 的数值足够小，即 $a_2, b_2 \ll 1$ 时 $\frac{dy}{dx} \approx -1$(在直线 $y=A+a_2x$ 和 $y=A-b_2x$ 的邻域外)，因而相轨线接近于直线 $x+y=$常数——电容器C的恒定电压直线. 在此情况下($y<A-b_2x$ 时)x 减小、而 y 增加，从而使磁化电流I比较显著地减小. 此时，在发出屏流脉冲的时间内电容器C的电压v几乎不变，而栅压的减小(它将使脉冲停止发出)则主要是

由于磁化电流 I 和变压器栅极线圈电压(等于 $-L\frac{dI}{dt}{}_{g}$) 的减小而引起的. 这样的停止发出屏流脉冲的机理通常称为间歇振荡器闭塞状态的**感性恢复**.

在区域(III)中存在屏流，但没有栅流，而且相轨线能从区域(IIIa)向它进入. 在此区域内间歇振荡器的振动方程可由方程组(10.66)中得出，若在其中将 G 以 $\frac{1}{R}$ 代替. 在此区域中的相轨线是位于点$(0, A)$处之稳定结点的相轨线，它们都接近于直线 $x+y=$常数.

相点沿屏流区域(III)和(IIIa)中的"缓慢"运动轨线运动时，一定达到这些区域的边界线——半直线 Γ_2:

$$y=\frac{SR_0}{k}(x+1)>0,$$

此边界线同时也是"缓慢"运动区域的边界线，相点将从这里跳到区域(I)中去.

如果跳跃起点是半直线 Γ_2 上的点 (x_2, y_2)，则跳跃终点(x_2^*, y_2^*)将单值地决定于跳跃条件:

$$\frac{x_2^*}{R}-\frac{y_2^*}{r_1}=G(x_2)\,x_2-\frac{y_2}{r_2},\quad x_2^*+y_2^*=x_2+y_2,$$

即

$$\left.\begin{aligned}
y_2^* &\approx \frac{r_1}{r_2}y_2-r_1G(x_2)x_2=r_1\left\{\left[\frac{SR_0}{kr_2}-G(x_2)\right]x_2+\frac{SR_0}{kr_2}\right\},\\
x_2^* &= x_2+y_2-y_2^*\approx\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)y_2+[1+r_1G(x_2)]x_2\\
&= -r_1\left\{\left[kS-\frac{1}{r_1}-G(x_2)\right]x_2+kS\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad(10.67)$$

相点由半直线 Γ_2 上的点开始的跳跃终点所描绘出的几何轨线，以虚折线(γ_2)表示在图 572 上[1]. 相点跳跃到点(x_2^*, y_2^*)以后，

---

1) 不难看出，根据自激条件(10.59)中的第一个条件，$x_2^*<-1$，即跳跃终点(x_2^*, y_2^*)确实位于区域(I)内；而且 $y_2^*>y_2>0$. 根据同一条件以及不等式 $r_2<R_0/k^2$，当 x_2(或 y_2)增加时，x_2^* 减小，而 y_2^* 则增大.

将沿方程组(10.64)的相应轨线在区域(I)中作"缓慢"运动，重新到达半直线 Γ_1，由此再跳跃到区域(IIIa)，如此往复运动下去.

由此可见，当自激条件(10.59)满足时，间歇振荡器将作不连续振动. 此振动由相点在区域(I)和(IIIa)+(III)中的"缓慢"运动，以及由区域(I)向区域(IIIa)和由区域(IIIa)(或(III))向区域(I)的"迅速"(瞬时)运动交替组成. 很明显，此时，在间歇振荡器的振动过程中，和相点在区域(I)中的运动相对应的是振动过程的那些阶段，在这些阶段时间内，电子管处于闭塞状态. 反之，相点在区域(IIIa)和(III)中的运动，则对应于屏流脉冲的发生过程(电子管处于开启状态，但屏压不大，因而有屏流反应).

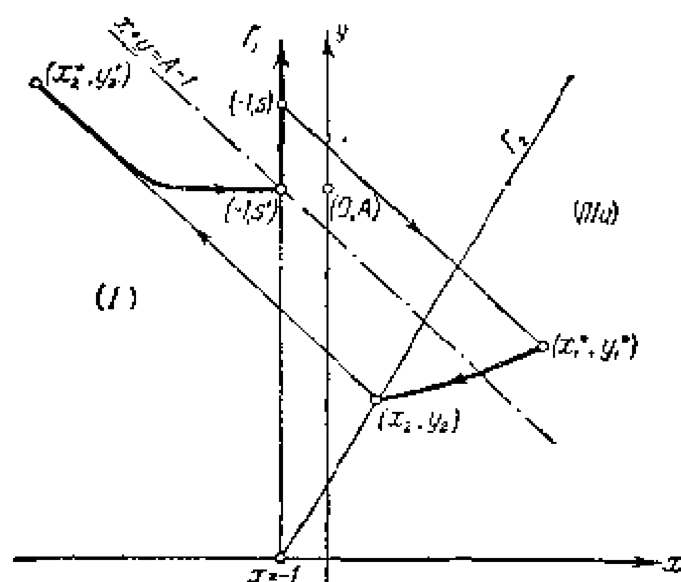


图 573

4. 间歇振荡器的不连续振动. 为了寻求间歇振荡器的不连续振动(自振)，并研究其稳定性，我们来研究由相轨线实现的半直线 Γ_1 对于其自身的点变换 Π(图 573). 设 s 为半直线 Γ_1:

$$x=-1,\quad y\geqslant A-a_1$$

上的初始点的纵坐标. 相点由此点出发，沿"迅速"运动轨线跳到点(x_1^*, y_1^*)(此点由方程组(10.65)根据 s 确定)；然后沿区域(IIIa)(或区域(IIIa)和(III))中的"缓慢"运动轨线到达半直线 Γ_2 上的点(x_2, y_2)，由此跳跃到区域(I)中的点(x_2^*, y_2^*)；最后，相点沿区域(I)

中的相应"缓慢"运动轨线再重新到达半直线 Γ_1 上的某一点 $(-1, s')$，此点即为所研究之点变换 Π:

$$s' = \Pi(s)$$

的后继点.

很明显，在半直线 Γ_1 上，必存在这样一个初始点区间 $A - a_1 \leqslant s < s_1$，与其相对应的点 (x_2, y_2) 位于直线 $x + y = A - 1$ 的下方[1]. 在此直线的下方亦将有相应的点 (x_2^*, y_2^*)，因此当 $b \ll 1$ 时，在区域(I)中由点 (x_2^*, y_2^*) 开始的相轨线将趋向轨线 $y \approx A$ 的小邻域，并在接近于点 $(-1, A)$ 的诸点到达半直线 Γ_1. 由此可见，当 $A - a_1 \leqslant s < s_1$ 时 $s' \approx A$，即后继函数 $s' = \Pi(s)$ 在 s 的这一区间中，其图象接近水平直线. 用直接计算后继函数的方法不难证实，当 $s \geqslant s_1$ 时 $s' < s$. 因此，与所研究点之变换 Π 相对应的后继函数的图象(即拉梅尔图)如图 574 所示. 由于后继函数图

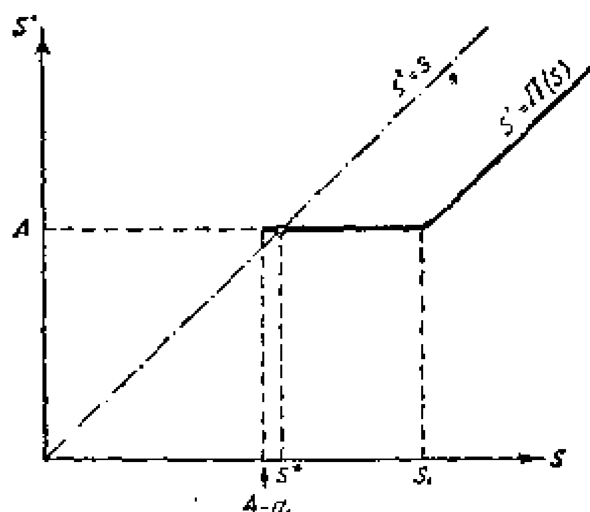


图 574

与分角线 $s' = s$ 具有唯一的交点 $s = s^* \approx A$，且在此点上 $\left|\frac{ds'}{ds}\right| \ll 1$，故点变换 Π 具有唯一的，而且是稳定的不动点 $s = s^*$，在相

1) 为了证明这一论断，只需指出，当相点跳跃时，$x + y$ 不改变(由于电容器 C 上的电压 v 不变)，而在区域(II(a))和(III)中则有

$$\frac{d}{dt}(x + y) = -[a + b]x < 0.$$

平面 x, y 上对应于唯一的稳定极限环，此极限环与半直线 T_1 的交点当 $b_1 \ll 1$ 时接近于点 $(-1, A)$. 所有轨线都向此极限环趋近（当 $t \to +\infty$ 时），换句话说，在任何初始条件下，间歇振荡器中都将建立起同一个不连续自振的工作状态.

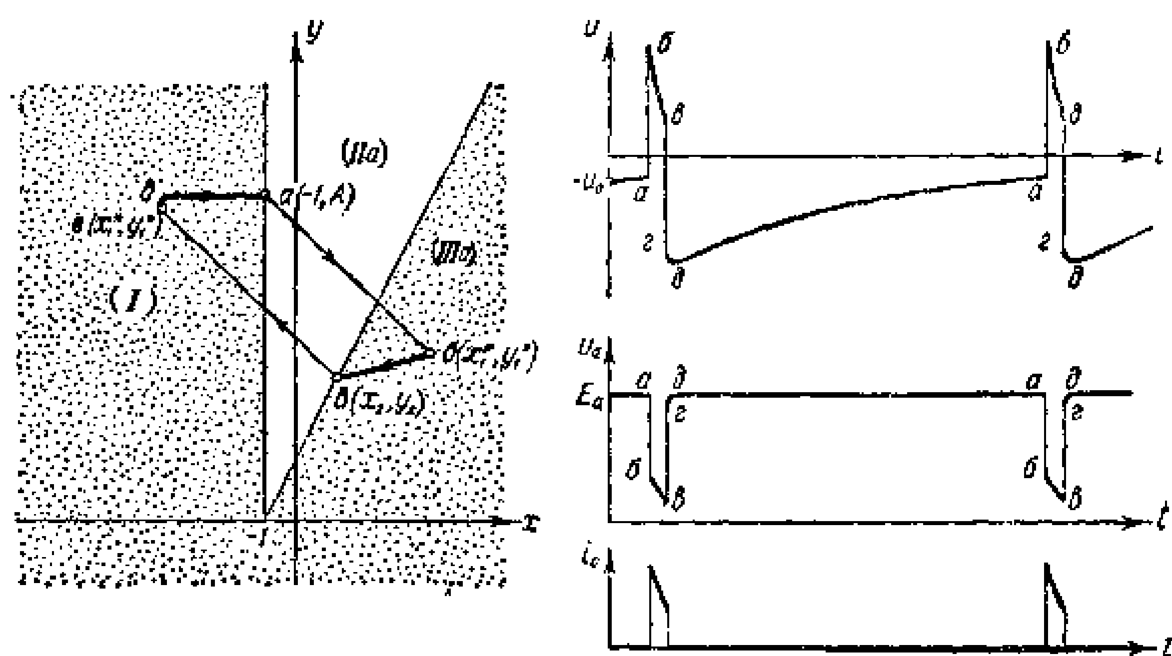


图 575

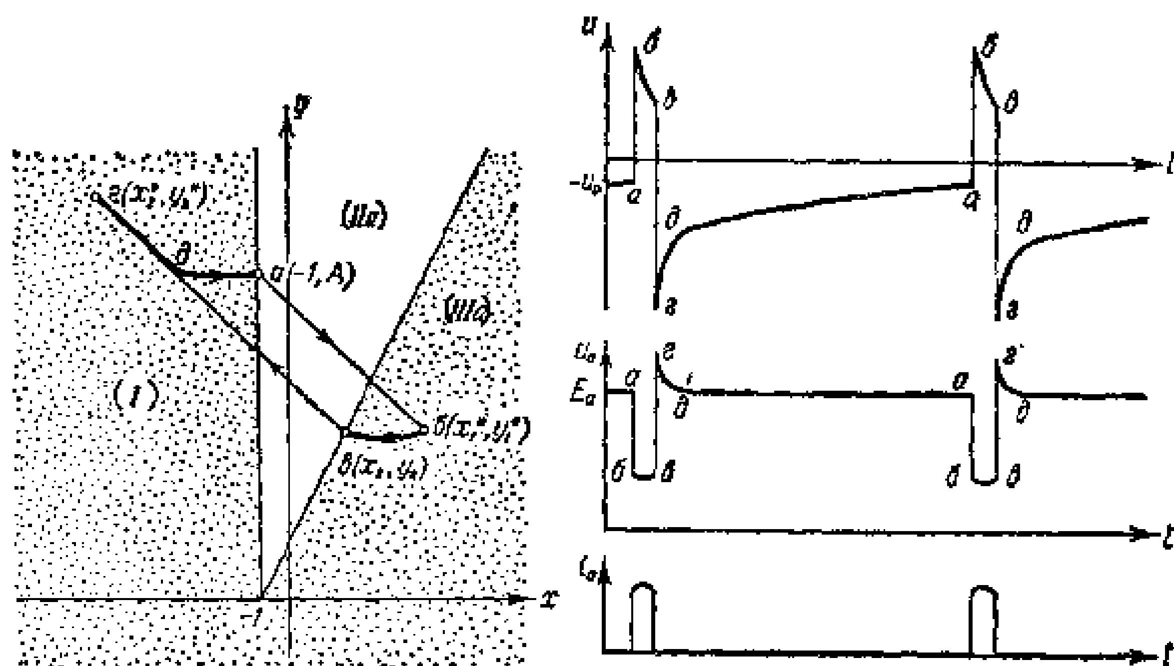


图 576

极限环的形状，因而也就是间歇振荡器的不连续自振的波形，主要决定于区域(IIIa)中之相轨线的形状，而后者本身又取决于参数 a_2 和 b_2 的值. 在图 575—577 上表示出了当间歇振荡器特征阻抗 $\rho=\sqrt{\frac{L}{C}}$ 取不同数值时，极限环以及与之相对应的栅压、屏压和屏流的波形：图 575 对应于 $\rho \gg \frac{1}{G}, \sqrt{\frac{r_2}{G}}$(即容性恢复情况，此时区域(IIIa)中的轨线接近于直线 $y-\frac{b_2}{a_2}x=$ 常数或 $I=$常数)；图 576 对应于 ρ 与 $\frac{1}{G}$ 同量阶的情况；图 577 对应于 $\rho \ll \frac{1}{G}, \sqrt{\frac{r_2}{G}}$(即感性恢复情况，此时区域(IIIa)中的轨线接近于直线 $x+y=$ 常数或 $v=$ 常数). 从图中可以看出，屏流脉冲 i_a, 屏压脉冲 u_a, 以及与 u_a 呈直线关系的输出电压脉冲，当 $\sqrt{\frac{L}{C}}\sim\frac{1}{G},\sqrt{\frac{r_2}{G}}$ 时，即在(间歇振荡器闭塞状态的)"混合"恢复情况中，具有最平的波顶.

由于 $b_1 \ll 1$ 时，即 $\sqrt{\frac{L}{C}} \ll R$ 时，极限环与半直线 Γ_1 的交点

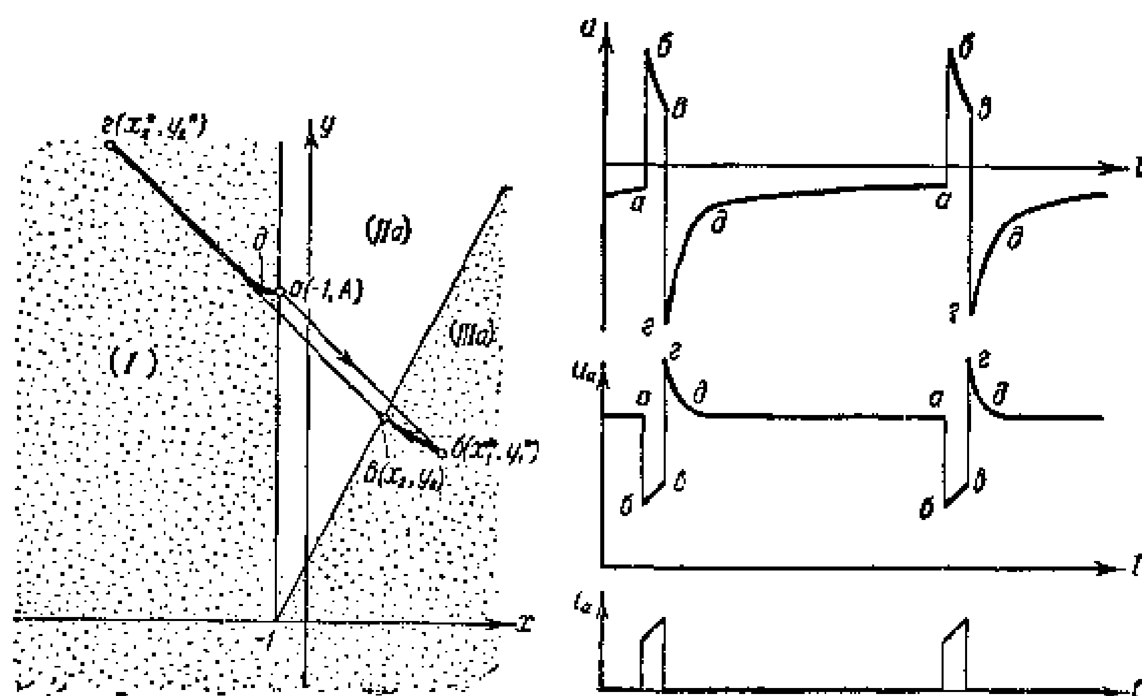


图 577

接近于$(-1, A)$，这一情况就使计算间歇振荡器的定态不连续自振状态中的振动周期、屏流脉冲宽度、电压和电流的振幅，得到很大的简化。因此，由关系式(10.65)决定的跳跃终点的纵坐标等于：

$$x_1^* \approx \frac{A\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)-\frac{1}{r_2}}{G+\frac{1}{r_2}} \approx A\frac{\frac{k^2}{R_0}}{S_g+\frac{k^2}{R_0}+\frac{k'^2}{R_H}},$$

$$y_1^* \approx \frac{A\left(G+\frac{1}{r_1}\right)-G}{G+\frac{1}{r_2}} = A\frac{S_g+\frac{k'^2}{R_H}}{S_g+\frac{k^2}{R_0}+\frac{k'^2}{R_H}} < A,$$

且实际上可看成是和C及L无关的。设$x=\varphi(t), y=\psi(t)$为区域(IIIa)中的“缓慢”运动轨线的方程，此轨线由点(x_1^*, y_1^*)开始($t=0$时)，并构成极限环的一段弧(换句话说，$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$为方程组(10.66)的满足初始条件：$\varphi(0)=x_1^*, \psi(0)=y_1^*$的解)，并设此轨线到达半直线$\Gamma_2$(在点$(x_2, y_2)$处)。建立函数

$$\Phi(t)=\frac{SR_0}{k}[1+\varphi(t)]-\psi(t)$$

(在区域(IIIa)内部$\Phi(t)>0$)；此时，方程

$$\Phi(t)=0$$

的根t'，显然将给出间歇振荡器所发出的屏流脉冲的宽度(采用区域(IIIa)* 中的无量纲时间单位)，而极限环与半直线Γ_2之交点的坐标则为：

$$x_2=\varphi(t'), \quad y_2=\psi(t')^{1)}$$

若采用普通时间单位，则脉冲宽度将等于：

---

* 原书为“区域(III)”——译者注。

1) 如果方程$\Phi(t)=0$具有若干个根(这只有在$(1-a_2)^2<4b_2$时方属可能)，则t'应理解为此方程的最小正根。

$$\tau = L\left(G + \frac{1}{r_2}\right)t'^{1)}.$$

由点(x_2, y_2)开始，相点瞬时地跳跃（沿"迅速"运动轨线 $x + y$ = 常数的线段）到达极限环上的点(x_2^*, y_2^*)（此点由关系式(10.67)决定，并位于区域(I)中），然后沿着从点(x_2^*, y_2^*)开始的（$t = 0$ 时）"缓慢"运动轨线(10.64b)：

$$x \approx -[A - (x_2 + y_2)]e^{-a_1 t} + (A - y_2^*)e^{-t},$$

$$y \approx A - (A - y_2^*)e^{-t}$$

在区域(I)中运动[2]。

设 t_1 为相点在区域(I)中沿极限环运动，到达半直线 Γ_1 的时刻；t_1 显然决定于方程 $x = -1$，或因 $a_1 \ll 1$ 及 $e^{-t_1} \ll e^{-a_1 t_1}$，决定于方程

$$-1 \approx -[A - (x_2 + y_2)]e^{-a_1 t}.$$

由此可见，间歇振荡器的电子管处于闭塞状态的时间间隔，若采用区域(I)中的无量纲时间单位则等于

$$t_1 = \frac{1}{a_1}\ln[A - (x_2 + y_2)],$$

若采用普通时间单位则为：

---

1) 如果极限环先转入区域(III)，然后才到达半直线 Γ_2，则在这种情况下，应将间歇振荡器振动方程分别在区域(IIIa)和(III)中积分，并应用轨线通过这些区域的边界线时必然是连续的这一明显的条件，求出极限环在区域(IIIa)和(III)中的弧线的方程：

$$x = \varphi_1(t_旧),\quad y = \psi_1(t_旧),$$

并构成函数：

$$\Phi_1(t_旧) = \frac{SR_0}{k}[1 + \varphi_1(t_旧)] - \psi_1(t_旧).$$

此时，方程

$$\Phi(t_旧) = 0$$

的根将为脉冲宽度 τ（采用普通单位），而点(x_2, y_2)的坐标则为

$$x_2 = \varphi_1(\tau),\quad y_2 = \psi_1(\tau).$$

2) 若设 $t = 0$ 时 $x = x_2^*$ 和 $y = y_2^*$，则由(10.64b)可以得出：

$$B_1 + B_1' = x_2^* \text{ 及 } A - B_1' = y_2^*,$$

因为 $b_1 \ll 1$，或

$$B_1 = x_2^* + y_2^* - A = -[A - (x_2 + y_2)] \text{ 及 } B_1' = A - y_2^*.$$

$$T_1 = \frac{L}{r_1} t_1 = CR \cdot \ln[A - (x_2 + y_2)].$$

由于通常脉冲宽度 $\tau \ll T_1$，故间歇振荡器的自振周期

$$T = T_1 + \tau \approx T_1.$$

§12 对称多谐振荡器

下面我们来研究对称多谐振荡器的自振。这种多谐振荡器是常用的一种电压不连续振动发生器，它是由阿布拉加姆(Абрагам)和布洛赫(Блох)二人提出的[131,6,61]。

1. 振动方程. 对于这一电路，若忽略栅流、屏极反应以及所有寄生参数，包括寄生电容在内，并假定电路是对称的(即设电子管 $Л_1$ 和 $Л_2$ 具有相同的特性，而且电路中相应的电容和电阻值都相同)，则可以得到这种电路(采用图 578 中之标记)的振动方程:

$$\frac{E_a - (u_1 + v_1)}{R_a} = i_{a2} + \frac{u_1 - E_g}{R_g},$$

$$\frac{E_a - (u_2 + v_2)}{R_a} = i_{a1} + \frac{u_2 - E_g}{R_g},$$

$$C \frac{dv_1}{dt} = \frac{u_1 - E_g}{R_g},$$

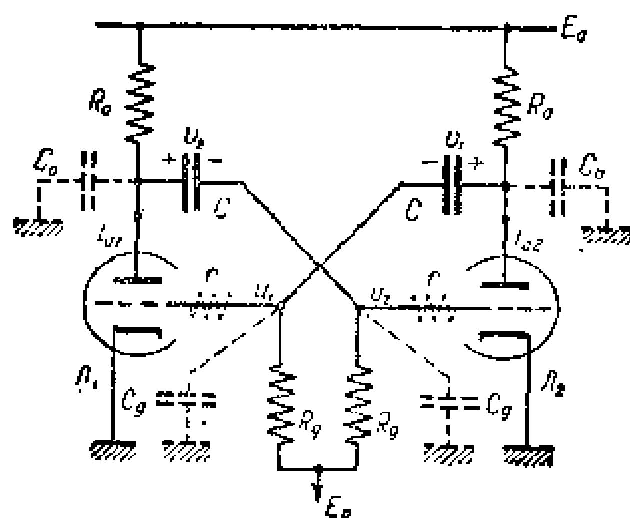


图 578

$$C\frac{dv_2}{dt}=\frac{u_2-E_g}{R_g},$$

其中电子管屏流 i_{a1} 和 i_{a2} 分别为 u_1 和 u_2 的函数：

$$i_{a1}=i_a(u_1),\quad i_{a2}=i_a(u_2).$$

显然，电路具有唯一的平衡状态，在此状态中 $u_1=u_2=E_g$，$i_{a1}=i_{a2}=i_a(E_g)$，$v_1=v_2=v_0=E_a-R_ai_a(E_g)-E_g$.

为简化推导过程起见，引入无量纲变量 x_1, x_2, y_1, y_2，其与电压 u_1, u_2, v_1, v_2 以如下关系式相联系：

$$u_{1,2}=E_g+u_0\cdot x_{1,2},$$

$$v_{1,2}=v_0+\left(1+\frac{R_a}{R_g}\right)u_0\cdot y_{1,2},$$

其中 u_0 为某种电压比例尺（x_1, x_2, y_1, y_2 与栅压和电容器 C 之电压的交变分量成正比），无量纲时间

$$t_{新}=\frac{t_{旧}}{C(R_a+R_g)},$$

而电子管的无量纲特性则为

$$\varphi(x)=\frac{1}{u_0S}[i_a(E_g+u_0\cdot x)-i_a(E_g)],$$

其中 S 为特性在工作点处（即 $u=E_g$ 处）的互导. 为了更加确定起见，下面我们将假定电子管特性以及栅偏压 E_g 是这样的，以致于特性的无量纲互导为 x 的连续偶函数，此函数当 $|x|$ 增加时单调地减小，并趋向零；显然，$0\leqslant\varphi'(x)\leqslant1$（图 579）.

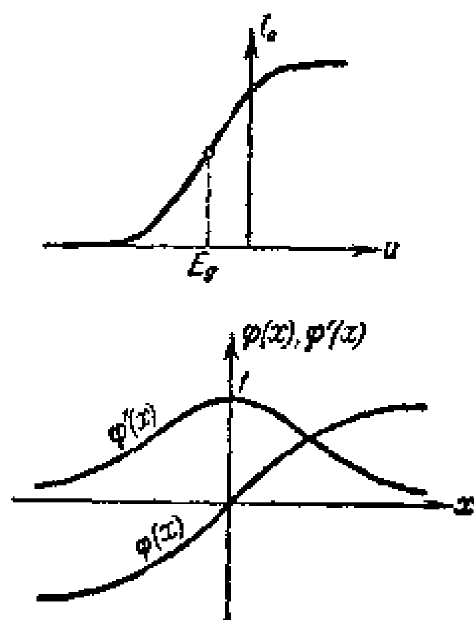


图 579

若采用新的无量纲变量，则多谐振荡器的振动方程将写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}-y_1=x_1+k\varphi(x_2),\quad -y_2=x_2+k\varphi(x_1),\\ \dot{y}=x_1,\quad \dot{y}_2=x_2,\end{aligned}\right\}\qquad(10.68)$$

其中

$$k = \frac{SR_aR_g}{R_a + R_g}$$

为电路参数，它是一半电路的诸元件所构成的放大器的放大系数（对于高频而言）．消去 y_1 和 y_2 以后，则得出两个以 x_1 和 x_2 为自变量的一阶微分方程：

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 + k\varphi'(x_2)\dot{x}_2 + x_1 = 0, \\ \dot{x}_2 + k\varphi'(x_1)\dot{x}_1 + x_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10.68a}$$

若对于 $\dot{x}_1$ 和 $\dot{x}_2$ 求解，则得：

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 = \frac{x_1 - k\varphi'(x_2)x_2}{k^2\varphi'(x_1)\varphi'(x_2) - 1}, \\ \dot{x}_2 = \frac{x_2 - k\varphi'(x_1)x_1}{k^2\varphi'(x_1)\varphi'(x_2) - 1}. \end{aligned}\right\} \tag{10.68b}$$

这样，所研究的这种多谐振荡器乃是二阶系统（在忽略所有寄生参数的条件下），因而其状态可用平面 x_1, x_2 上的点来描述．

若对由方程组（10.68b）中导出的积分曲线方程

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{P(x_1, x_2)}{Q(x_1, x_2)} = \frac{x_1 - k\varphi'(x_2)x_2}{x_2 - k\varphi'(x_1)x_1}$$

运用本狄克生判据，则可以证实，方程组（10.68b）不可能有连续的周期解，因为表示式

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} = +2,$$

即到处都取正值．

在唯一的平衡状态（$x = 0$, $y = 0$）上，特征方程为：

$$(1 - k^2)\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$

因为根据电子管的无量纲特性的定义，有 $\varphi'(0) = 1$．当 $k < 1$ 时，此平衡状态稳定（稳定结点），不难看出，所有相轨线都向它趋近（$t \to +\infty$ 时）．换句话说，多谐振荡器在任何初始条件下都走向平衡状态，而不可能发生任何自振．

因此，下面我们将只研究

$$k > 1$$

的情况，即唯一的平衡状态不稳定（鞍点），而多谐振荡器发生自激的情况．但当 $k>1$ 时，在平面 x_1, x_2 上，显然存在这样一个点集合，在这些点上满足等式

$$k^2\varphi'(x_1)\varphi'(x_2)-1=0; \tag{10.69}$$

此点集合构成某一连续曲线 Γ，它是闭的，并且关于分角线以及平面 x_1, x_2 的坐标轴对称．在此曲线 Γ 上，$\dot{x}_1$ 和 $\dot{x}_2$ 变为无限大，而且重要的一个特点在于，此曲线一部分上的点为方程组（10.68b）之相轨线的止点，因而在其上，对于忽略电路的寄生参数而建立的方程组(10.68b)而言，解不能延拓．这样一来，由于忽略了寄生参数，我们又得到"有缺陷的"动力学模型，利用此种模型的方程不可能研究多谐振荡器的性状(这显然是由于在建立这些方程时，我们曾弃去了寄生参数中对于多谐振荡器的振动过程起重要作用的一些参数所引起的)．

2. 电压 u_1 和 u_2 的跳跃． 下面我们将证明，计入小寄生电容 C_a 和 C_g（在图 578 中以虚线表示出的），当 $k>1$ 时，多谐振荡器中将有不连续振动[61]．

若考虑小寄生电容 C_a 和 C_g（但其他简化假设同前），并采用上面引入过的无量纲变量，则多谐振荡器的振动方程具有如下四阶微分方程组的形式：

$$\left.\begin{aligned}
&\mu\dot{x}_1=-y_1-x_1-k\varphi(x_2)\equiv F_1(x_1, x_2, y_1),\\
&\mu\dot{x}_2=-y_2-x_2-k\varphi(x_1)\equiv F_2(x_1, x_2, y_2),\\
&\dot{y}_1=x_1,\ \dot{y}_2=x_2,\\
&\text{其中}\\
&\mu=\frac{\dfrac{R_a}{R_g}}{\left[1+\dfrac{R_a}{R_g}\right]^2}\cdot\frac{C_a+C_g}{C}
\end{aligned}\right\} \tag{10.70}$$

为正值小参数，它表征寄生电容 C_a 和 C_g 与 C 相比的微小程度．关于考虑寄生电容 C_a 和 C_g 时多谐振荡器的振动方程的推导，以及将这些方程化为无量纲形式的过程，这里从略，因为与此有关的推导与本章 § 5 中推导方程(10.26)时曾进行过的完全一样．方程

组(10.70)是对电容 C_a 和 C_g 足够小(C_a, $C_g \ll C$)的情况，写出的。

下面我们概略地研究一下四维相空间 x_1, x_2, y_1, y_2 划分为方程组(10.70)的轨线的极限情况(当 $\mu \to +0$ 时)。在此空间中划分出的曲面 F：

$$-y_1 = x_1 + k\varphi(x_2), \quad -y_2 = x_2 + k\varphi(x_1)$$

为"退化"系统($\mu = 0$)的相面；此曲面显然与坐标平面 x_1, x_2 同拓扑，即曲面 F 和平面 x_1, x_2 上的点彼此间有单值连续的对应。在四维相空间中，位于此曲面 F 外部的每一点(x_1, x_2, y_1, y_2)上，当 $\mu \to +0$ 时 $\dot{x}_1 \to \infty$, $\dot{x}_2 \to \infty$, 而 $\dot{y}_1$ 和 $\dot{y}_2$ 则保持有限值；因此，在 $\mu \to +0$ 的极限情况中，在曲面 F 外部的整个相空间中所布满的相轨线都位于平面

$$y_1, y_2 = \text{常数}$$

中。相点沿这些相轨线作"跳跃"运动(当 μ 足够小时，变量 x_1 和 x_2 具有任意大的变化速度)，这相当于多谐振荡器状态的"迅速"变化(寄生电容越小，变化越快)，在此过程中栅压 u_1 和 u_2 发生"跳跃"，而电容器 C 上的电压 v_1 和 v_2 则保持不变。

当 μ 足够小时，在某一平面 $y_1 = y_1^0$, $y_2 = y_2^0$(y_1^0, y_2^0=常数)近旁的"迅速"运动轨线的近似(渐近)微分方程，可由方程组(10.70)的前两个方程中得出，只需将其中的变量 y_1 和 y_2 以常量 y_1^0 和 y_2^0 代替即可，它们是：

$$\left.\begin{aligned} \mu\dot{x}_1 &= -y_1^0 - x_1 - k\varphi(x_2) \equiv F_1(x_1, x_2, y_1^0), \\ \mu\dot{x}_2 &= -y_2^0 - x_2 - k\varphi(x_1) \equiv F_2(x_1, x_2, y_2^0). \end{aligned}\right\} \quad (10.71)$$

这些方程当然仅仅在平面 $y_1 = y_1^0$, $y_2 = y_2^0$ 和曲面 F 的交点的微小邻域外部才成立，而它们的解也仅仅在有限时间间隔内，才能近似表示精确方程组(10.70)的解(同样在曲面 F 的外部，且 μ 越小，越为准确)。

由于

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = -2,$$

因而根据本狄克生判据，近似方程组(10.71)不能有闭相轨线．因此，所有"迅速"运动轨线的走向决定于方程组(10.71)的奇点及其分界线．方程组(10.71)的奇点显然是平面 $y_1 = y_1^0$, $y_2 = y_2^0$ 和曲面 F 的交点，而且曲面 F 上的点 (x_1, x_2, y_1^0, y_2^0) 为近似方程组(10.71)的稳定结点，若

$$k^2\varphi'(x_1)\varphi'(x_2) - 1 < 0, \tag{10.72}$$

为其鞍点，若

$$k^2\varphi'(x_1)\varphi'(x_2) - 1 > 0^{1)}. \tag{10.72a}$$

因此，所有"迅速"运动的相轨线(它们在 $\mu \to +0$ 时位于平面 y_1, $y_2 =$ 常数上)都由无限远，以及曲面 F 上满足

$$k^2 \cdot \varphi'(x_1)\varphi'(x_2) - 1 > 0$$

的点 (x_1, x_2, y_1, y_2) 出发，走向曲面 F 上满足

$$k^2\varphi'(x_1)\varphi'(x_2) - 1 < 0$$

那一部分的点的微小邻域；曲面 F 上的这一部分(所有"迅速"运动相轨线都走向它的诸点)以后将用 F^+ 表示．

由此可见，当 μ 足够小时，相点的"缓慢"运动相轨线($\mu \to +0$ 时其相速度为有限值)只能位于曲面 F^+:

$$-y_1 = x_1 + k\varphi(x_2), \quad -y_2 = x_2 + k\varphi(x_1),$$
$$k^2\varphi'(x_1)\varphi'(x_2) - 1 < 0 \tag{10.73}$$

的微小邻域(其大小为 μ 量级)内．在极限情况中，即 $\mu \to +0$ 时，这些"缓慢"运动轨线位于曲面 F^+ 上，其微分方程可由曲面 F^+ 的方程及方程组(10.70)的最后两方程中获得，即与前面忽略电路寄生参数而得出的方程组(10.68)相重合的方程．

---

1) 在曲面 F 的点 (x_1, x_2, y_1^0, y_2^0) 上，即"迅速"运动近似方程(10.71)的奇点上，特征方程具有如下形式(可参看本章 §3 中的(10.18)):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \lambda & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

或

$$\lambda^2 + 2\lambda^* + 1 - k^2\varphi'(x_1)\varphi'(x_2) = 0.$$

* 原书为"-2λ"——译者注．

"缓慢"运动区域(区域 F^+)的边界线为曲面 F 上的闭曲线 γ,此曲线决定于方程:

$$k^2\varphi'(x_1)\varphi'(x_2)-1=0;$$

同时,根据前面对电子管特性所作的假设,区域 F^+ 乃是曲面 F 上位于曲线 γ 外部的那一部分. 由于在"缓慢"运动区域中(在曲面 F^+ 上)既没有平衡状态,又没有闭相轨线,而且"缓慢"运动轨线又不走向曲面 F^+ 的无限远部分(参看方程(10.68)),故相点沿曲面 F^+ 上的"缓慢"运动轨线运动时,必将到达其边界线 γ,在这以后相点沿相应的轨线 $y_1, y_2=$ 常数作"迅速"运动(跳跃),并重新回到曲面 F^+ 上. 跳跃终点的坐标 $x_1=x_1^+$, $x_2=x_2^+$ 显然与跳跃起点坐标 $x_1=x_1^-$, $x_2=x_2^-$ 以如下方程彼此联系:

$$\left.\begin{aligned} x_1^+ + k\varphi(x_2^+) &= x_1^- + k\varphi(x_2^-),\\ x_2^+ + k\varphi(x_1^+) &= x_2^- + k\varphi(x_1^-), \end{aligned}\right\} \tag{10.74}$$

因为在跳跃时间内,y_1 和 y_2(即电容器 C 上的电压 v_1 和 v_2)保持不变,而跳跃起点与终点又都在曲面 F^+ 上.

在所研究的问题中,跳跃条件(10.74)对于曲线 γ 上的每一个点(x_1^-, x_2^-),都能给出唯一的跳跃终点(x_1^+, x_2^+),因此利用跳跃微分方程组(10.71)来确定跳跃终点,就不是必须的了. 然而研究这些方程却使我们有可能找出"迅速"运动轨线本身(当参数 μ 足够小时是近似的),找出跳跃时间内变量 x_1 和 x_2 之间的关系. 位于曲线 γ 上的跳跃起点,对于近似方程组(10.71)来说,是鞍结点型奇点,由此点出发的仅有方程组(10.71)的唯一的轨线,此轨线即为我们所关心的"迅速"运动(跳跃)轨线.

3. 多谐振荡器的不连续振动. 如上所述,当 $k>1$ 时,所研究的多谐振荡器中发生不连续振动,此振动由多谐振荡器状态的"缓慢"的变化(栅压 u_1 和 u_2 以有限速度变化)和"迅速"的、跳跃式的变化(C_a, $C_g\to+0$ 时 $\frac{du_1}{dt}\to\infty$, $\frac{du_2}{dt}\to\infty$)交替组成的. 我们可以利用平面 x_1, x_2 和曲面 F 的同拓扑性,以及平面 x_1, x_2 和平面 $y_1, y_2=$ 常数的同拓扑性来研究这些不连续振动,方法是将平

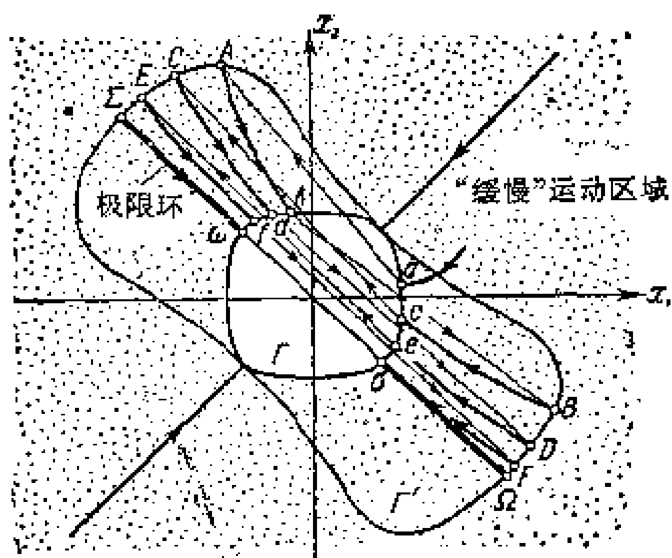


图 580

面 x_1, x_2 (即栅压 u_1, u_2 的平面) 划分成"缓慢"和"迅速"的运动轨线(方程组(10.68)和(10.71)的轨线),并进行研究;需要指出,坐标平面 x_1, x_2 上的轨线乃是四维空间 x_1, x_2, y_1, y_2 中之相轨线的投影,因而它们可能彼此相交.

平面 x_1, x_2 的这种轨线划分定性地表示在图 580 上. 由于曲线 γ——曲面 F^+ 的边界线——在平面 x_1, x_2 上的投影为曲线 Γ (参看(10.69)), 故平面 x_1, x_2 上构成"缓慢"运动区域(曲面 F^+ 的投影)的那一部分,必位于曲线 Γ 的外部; 在位于曲线 Γ 内部的区域中,不可能有任何"缓慢"运动,在那里只能有相点的"迅速"的跳跃式的运动. 相点在"缓慢"区域中沿方程组(10.68)运动, 必到达此区域的边界线——曲线 Γ, 由此沿 "迅速" 运动轨线(沿方程组(10.71)的相应轨线)重新"跳回""缓慢"运动区域. 根据(10.74)与跳跃起点——曲线 Γ 上的点(x_1^-, x_2^-)——相对应的跳跃终点 (x_1^+, x_2^+) 所构成的几何轨迹以曲线 Γ' 表示在图 580 上(在采用上面简化假设的条件下,曲线 Γ' 为一闭的连续曲线,关于平面 x_1, x_2 的分角线对称,并包围曲线 Γ).

如果相点到达曲线 Γ 上的某一点 a (图 580), 则以后的运动将沿轨线 $aAbBcCd\cdots$进行,此轨线由"缓慢"运动轨线线段 Ab, Bc, $Cd\cdots$ 以及跳跃轨线线段 aA, bB, $cC\cdots$ 组成(在图 580 上

"缓慢"运动轨线以粗线表示,"迅速"运动轨线以细线表示). 可以证实,这种运动的结果,将使系统渐近地($t \to +\infty$ 时)趋近一周期过程,此周期过程对应于极限环 $\Sigma\omega\Omega\sigma\Sigma$, 后者由两个"缓慢"运动轨线线段 $\Sigma\omega$ 和 $\Omega\sigma$, 以及两个跳跃轨线 $\omega\Omega$ 和 $\sigma\Sigma$ 组成[1].

在这种周期运动的全部过程中,都满足等式

$$x_2 = -x_1, \quad y_2 = -y_1.$$

振动过程的这种对称性,显而易见是由于多谐振荡器电路和电子管特性的对称性引起的. 所以一开始我们就可以假定稳定自振是对称的;这样一来,在方程组(10.70)中,就可以设 $x_2 \equiv -x_1$, $y_2 \equiv -y_1$, 以及 $\varphi(x_2) \equiv -\varphi(x_1)$,从而得出二阶微分方程组:

$$\mu\dot{x} = -x - y + k\varphi(x),$$

$$\dot{y} = x.$$

这种类型的方程组我们曾在研究具有一个 RC 回路多谐振荡器中的不连续自振时(参看本章 § 5)讨论过(因此,在 § 5 中得到的结论,例如自振周期的表示式,对于对称多谐振荡器的定态振动也是成立的). 但这种研究方法将使我们不可能研究这些振动在电路中的建立过程.

---

1) 关于多谐振荡器中的周期不连续振动的建立,曾在著作 [6] 和著作[58]中指出过,前者利用方程组的图解积分法,后者利用点变换法(采用电子管特性的分段线性近似).

在所研究的问题中,极限环——在四维相空间 x_1, x_2, y_1, y_2 中的闭相轨线——在平面 x_1, x_2 上的投影为分角线 $x_2 = -x_1$ 上的线段 $\Sigma\Omega$, 因此相点(x_1, x_2)在此线段上运动时,时而沿一个方向,时而沿另一个方向. 但是,亦可作到用相点沿相面上的普通极限环的运动,来反映不连续周期振动,只要我们适当地选择这种相面的形状(以代替相平面). 我们已经看到,相点一落到曲线 Γ 上(图 580),立刻就跳到曲线 Γ' 上. 在这以后的"缓慢"运动轨线则位于这两条曲线之间的区域内. 若使 a 点与 A 点恒等, b 点与 B 点恒等……, 即将跳跃轨线线段"缩"成一点, 则可以将这一区域映射成一球面(相互单值连续对应). 此时, 不连续自振将映射成极限环(例如,赤道线). 此外, 在球面上将得到两个奇点(两个不稳定结点),位于极限环的两侧(例如,位于两极上), 并对应于曲线 Γ 与 Γ' 的切点. 进行这种映射以后, 立即可以看出, 在多谐振荡器中不可能有概周期振动(这种振动只有当相曲面是环面时方属可能). 相点沿两次环绕球体的闭轨线所对应的周期运动, 同样是不可能的. 不进行论证, 这些结果并不是显然成立的.

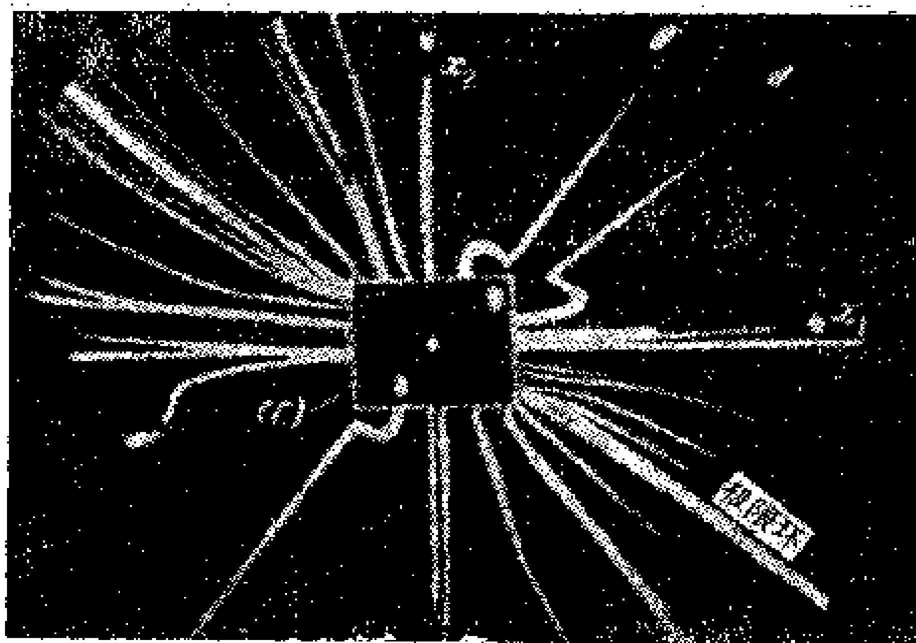


图 581

在图 581 上表示出利用阴极射线管摄制的栅压 u_1, u_2 平面(平面 x_1, x_2)之轨线划分的照片[1]. 这一照片完全证实了上面关于多谐振荡器中振动的不连续性质, 以及其中会建立起周期不连续振动(自振)所得的结论. 可以很明显地看出,电压 u_1 和 u_2 的跳跃不仅可以从曲线 Γ 上的各点开始, 而且还可以从其内部区域中的各点开始. 初始瞬时位于曲线 Γ 内部区域中的相点亦以跳跃的方式向外运动.

§13 对称多谐振荡器(考虑栅流)

在本章的结尾,我们较详细地研究对称多谐振荡器(其电路如图 582 所示)的不连续自振,和以前一样, 研究时仍忽略其屏极反应[2],但考虑电子管的栅流, 后者通常在多谐振荡器的工作中起着

1) 在这里所建立的理论中,我们忽略了栅流. 因此, 为了获得轨线的照片,曾在所用多谐振荡器的栅极电路中串入限流电阻 r, 以显著地减小栅流(在图 578 中这些电阻是以虚线表示出来的).

2) 电子管中的屏极反应可以忽略不计, 如果多谐振荡器中采用的电子管为五极管,或内阻 R_i 相当大的三极管, 同时电子管的屏压在振动过程中总保持相当大的数值. 后一条件在电阻 R_a 不很大,屏极电源电压 E_a 相当大时显然是满足的.

重要的作用[62]. 为了获得定量的结果，我们将电子管的特性以如下分段线性函数(无饱和)来逼近：

$$i_a = i_a(u) = \begin{cases} 0 & \text{当 } u \leqslant -u_0 \text{ 时;} \\ S(u+u_0) & \text{当 } u > -u_0 \text{ 时;} \end{cases}$$

$$i_g = i_g(u) = \begin{cases} 0 & \text{当 } u \leqslant 0 \text{ 时,} \\ S_g u & \text{当 } u > 0 \text{ 时;} \end{cases}$$

在这里 u 为栅压，$-u_0$ 为电子管的闭塞电压，S 和 S_g 为电子管屏流和栅流特性曲线上升段的互导.

这些函数(其图象表示在图 583 上)能满意地反映出现代电子管的性质,因为后者实际上的屏流和栅流都不具有饱和.

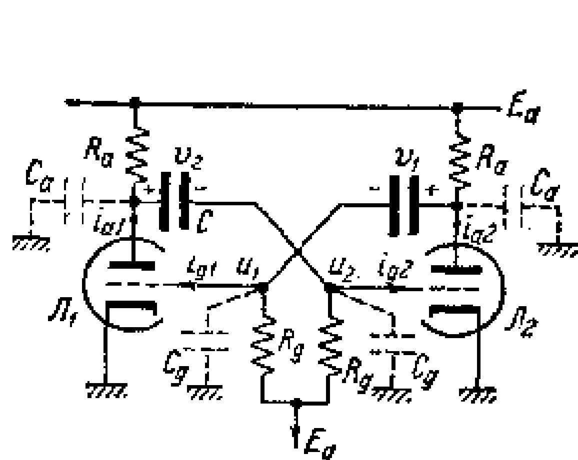


图 582

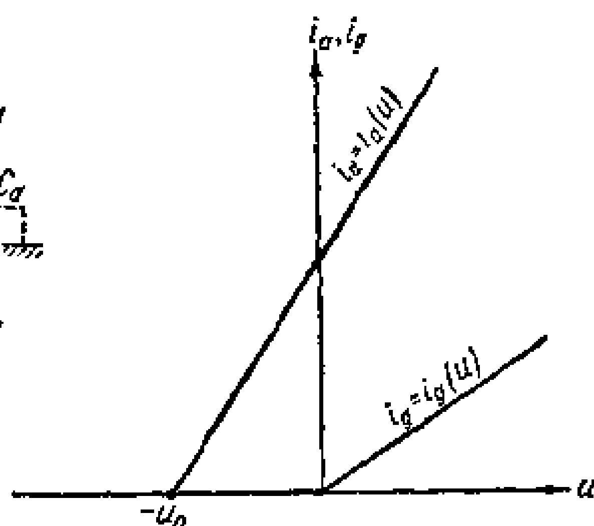


图 583

1. 振动方程. 电压 u_1 和 u_2 的跳跃. 若忽略寄生参数，则可得出(根据克希荷夫定律，并采用图 582 的标记)多谐振荡器状态的"缓慢"的非跳跃式的变化方程如下[1]:

$$C\frac{dv_1}{dt'} = \frac{u_1 - E_g}{R_g} + i_g(u_1),$$

$$\frac{E_a - (u_1 + v_1)}{R_a} = i_a(u_2) + C\frac{dv_1}{dt'},$$

1) 在多谐振荡器状态的"缓慢"变化过程中，小寄生参数不起重要作用，故可忽略不计. 其次,我们用 t' 来表示时间,因为以后将用 t 表示无量纲时间.

$$C\frac{dv_2}{dt'} = \frac{u_2 - E_g}{R_g} + i_g(u_2),$$

$$\frac{E_a - (u_2 + v_2)}{R_a} = i_a(u_1) + C\frac{dv_2}{dt'}.$$

与前一小节一样，引入新的无量纲变量 x_1, x_2, y_1, y_2，它们和电压 u_1, u_2, v_1, v_2 之间有如下关系式：

$$u_{1,2} = u_0 x_{1,2}, \quad v_{1,2} = E_a + \frac{R_a}{R_g}E_g + u_0\left(1 + \frac{R_a}{R_g}\right)y_{1,2},$$

并引入新的无量纲时间

$$t = \frac{t'}{C(R_a + R_g)}.$$

若采用上述变量，则多谐振荡器状态的“缓慢”变化方程可写成如下无量纲形式：

$$\left.\begin{aligned} -y_1 &= x_1 + \alpha\psi(x_1) + k\varphi(x_2), \\ -y_2 &= x_2 + \alpha\psi(x_2) + k\varphi(x_1), \\ \dot{y}_1 &= x_1 + \beta\psi(x_1) - \sigma, \\ \dot{y}_2 &= x_2 + \beta\psi(x_2) - \sigma, \end{aligned}\right\} \tag{10.75}$$

其中

$$k = \frac{SR_aR_g}{R_a + R_g},$$

$$\alpha = \frac{S_gR_aR_g}{R_a + R_g},$$

$$\beta = S_gR_g,$$

折算（无量纲）栅偏压

$$\sigma = \frac{E_g}{u_0}$$

以及

$$\varphi(x) = \frac{1}{u_0S}i_a(u_0x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x < -1 \text{ 时}, \\ x + 1 & \text{当 } x \geqslant -1 \text{ 时}, \end{cases}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{u_0S_g}i_g(u_0x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x < 0 \text{ 时}, \\ x & \text{当 } x \geqslant 0 \text{ 时}, \end{cases}$$

——电子管的折算（无量纲）屏流和栅流特性。前两个方程确定

x_1, x_2 和 y_1, y_2（即栅压 u_1, u_2 和电容器 C 上的电压 v_1, v_2）之间的函数关系，再强调一次，这一函数关系只有在多谐振荡器状态的“缓慢”变化过程中才成立；最后两个方程为微分方程，它们给出多谐振荡器状态随时间的变化规律.

从方程(10.75)中消去变量 y_1, y_2，则得出以 x_1, x_2 为自变量的微分方程组如下：

$$\left.\begin{aligned}&[1+\alpha\psi'(x_1)]\dot{x}_1+k\varphi'(x_2)\dot{x}_2+x_1+\beta\psi(x_1)=\sigma,\\&k\varphi'(x_1)\dot{x}_1+[1+\alpha\psi'(x_2)]\dot{x}_2+x_2+\beta\psi(x_2)=\sigma,\end{aligned}\right\}\quad(10.75\text{a})$$

若对导数求解，则得

$$\dot{x}_1=\frac{P_1(x_1,\ x_2)}{\Delta(x_1,\ x_2)},\ \dot{x}_2=\frac{P_2(x_1,\ x_2)}{\Delta(x_1,\ x_2)},\qquad(10.75\text{b})$$

其中

$$\begin{aligned}P_1(x_1,\ x_2)&=k\varphi'(x_2)[x_2+\beta\psi(x_2)-\sigma]-\\&\quad[1+\alpha\psi'(x_2)][x_1+\beta\psi(x_1)-\sigma],\\P_2(x_1,\ x_2)&=k\varphi'(x_1)[x_1+\beta\psi(x_1)-\sigma]-\\&\quad[1+\alpha\psi'(x_1)][x_2+\beta\psi(x_2)-\sigma],\\\Delta(x_1,\ x_2)&=[1+\alpha\psi'(x_1)][1+\alpha\psi'(x_2)]-\\&\quad k^2\varphi'(x_1)\varphi'(x_2).\end{aligned}$$

因为所得微分方程组为二阶方程组，故可将多谐振荡器的状态（在其“缓慢”变化过程中）映射为平面 x_1, x_2 上的点，而多谐振荡器中的“缓慢”过程则映射为相点在此平面上沿相轨线（沿方程组(10.75b)的轨线）的运动．然而，和不考虑栅流的多谐振荡器问题一样（参看前一小节），对于考虑栅流的多谐振荡器来说，由方程组(10.75b)所描述的状态的“缓慢”变化，也并不是对于变量 x_1, x_2 的所有值都是可能的．具体地说，系统的“缓慢”运动区域（方程组(10.75)适用的区域）乃是平面 x_1, x_2 上满足

$$\begin{aligned}\Delta(x_1,\ x_2)=[1+\alpha\psi'(x_1)][1+\psi'(x_2)]-\\k^2\varphi'(x_1)\varphi'(x_2)>0\end{aligned}$$

的部分——区域 M；在区域 M 的外部，只能有多谐振荡器状态的“迅速”的跳跃式的变化——栅压 u_1, u_2（或变量 x_1, x_2）的“瞬时跳

跃"[1].

"缓慢"运动区域M的边界线为曲线Γ,在此曲线上函数$\Delta(x_1, x_2)$——方程组(10.75b)右边的分母——改变符号;因此,曲线Γ一部分上的点为方程组(10.75b)的相轨线的止点. 如果相点沿"缓慢"运动轨线(在区域M中沿方程组(10.75b)的轨线)运动,在到达曲线Γ上的某一点(x_1^-, x_2^-)后,则将以"迅速"的运动(瞬时跳跃的方式)"跳到"同样属于区域M的点(x_1^+, x_2^+). 由于电容电压v_1和v_2(因而也就是变量y_1和y_2)在瞬时跳跃时间内不能发生变化(否则多谐振荡器中将出现无限大的电流),并由于跳跃起点与终点都属于区域M,故根据(10.75)中的.适用于此区域内的前两个方程,跳跃起点和终点的坐标(x_1^-, x_2^- 和 x_1^+, x_2^+)将以如下方程(**跳跃条件**)彼此联系:

$$\left.\begin{aligned} x_1^+ + \alpha\phi(x_1^+) + k\varphi(x_2^+) &= x_1^- + \alpha\phi(x_1^-) + k\varphi(x_2^-), \\ x_2^+ + \alpha\phi(x_2^+) + k\varphi(x_1^+) &= x_2^- + \alpha\phi(x_2^-) + k\varphi(x_1^-). \end{aligned}\right\} \quad (10.76)$$

为了对上面所讲方程组(10.75)的适用区域以及多谐振荡器状态的跳跃提供依据(不引用物理学的补充考虑),最低限度应当从电路的小寄生参数中选出一些在系统的"迅速"运动过程中起重要作用的参数加以考虑. 这些寄生参数就是电容C_a和C_g,在图582中用虚线表示出的. 考虑这两个电容以后,则得出(条件是C_a, $C_g \ll C$)多谐振荡器的振动方程如下:

$$\left.\begin{aligned} \mu\dot{x}_1 &= -y_1 - x_1 - \alpha\phi(x_1) - k\varphi(x_2) \equiv F_1(x_1, x_2, y_1), \\ \mu\dot{x}_2 &= -y_2 - x_2 - \alpha\phi(x_2) - k\varphi(x_1) \equiv F_2(x_1, x_2, y_2), \\ \dot{y}_1 &= x_1 + \beta\phi(x_1) - \sigma \equiv G(x_1), \\ \dot{y}_2 &= x_2 + \beta\phi(x_2) - \sigma \equiv G(x_2), \end{aligned}\right\} \quad (10.77)$$

---

1) 下面一些看法可以作为引入之跳跃假设的某种依据. 如果$x_1 > -1$和$x_2 > -1$(即多谐振荡器的两个电子管都处于开启状态),而放大系数k相当大,以致于$\Delta(x_1, x_2) < 0$,则可以计算出,通过构成多谐振荡器的元件链(电子管$Л_1$的栅极——电子管$Л_1$的屏极与电子管$Л_2$的栅极之间的RC回路——电子管$Л_2$——第二个RC回路——电子管$Л_1$的栅极)的高频总传输系数将大于1. 由于电路中存在有这样的正反馈,栅压(如u_1)的任何"迅速"的、跳跃式的偏移,都将使栅压发生越来越增涨的、"雪崩"式的变化;只要两个电子管都处于开启状态,这种变化就将一直继续下去. 因此,当$\Delta(x_1, x_2) < 0$时,电路中只能发生多谐振荡器状态的"迅速"的跳跃式的变化.

与此相反,当$x_1 < -1$或$x_2 < -1$,即最少有一个电子管处于闭塞状态,而$\Delta(x_1, x_2) > 0$时,正反馈线路被断开,因而栅压的跳跃式的变化将是衰减的,从而使"缓慢"运动对于栅压的跳跃来说是稳定的,因而是可能的.

其中

$$\mu = \frac{R_a/R_g}{(1 + R_a/R_g)^2} \frac{C_a + C_g}{C}$$

为正值小参数，它表示电容 C_a 和 C_g 的微小程度(与电容 C 相比)。与此相对应，相空间将是四维空间 x_1, x_2, y_1, y_2.

由于

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = -2 - \alpha[\psi'(x_1) + \psi'(x_2)] < 0$$

且

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x_1, x_2)} = [1 + \alpha\psi'(x_1)][1 + \alpha\psi'(x_2)] - k^2\varphi'(x_1)\varphi'(x_2)$$
$$\equiv \Delta(x_1, x_2),$$

因而根据本章§3，系统的"缓慢"运动(即 $\frac{C_a}{C}, \frac{C_g}{C} \to +0$ 时 $\dot{x}_1$ 及 $\dot{x}_2$ 为有限值的运动)将只发生在由方程

$$F_1(x_1, x_2, y_1) = 0, \ F_2(x_1, x_2, y_2) = 0, \ \Delta(x_1, x_2) > 0$$

确定的曲面 F^+ 的微小的 $O(\mu)$ 邻域内，而在极限情况中，即 $\mu \to +0$ 时，则发生在曲面 F^+ 上。因此，"缓慢"运动的近似方程与忽略所有电路寄生参数而建立起来的方程组(10.75)相重合。需要指出，曲面 F^+ 在平面 x_1, x_2 上的投影为与之同拓扑的区域 M.

在曲面 F^+ 的外部，相点沿轨线 $y_1, y_2 =$ 常数作"迅速"运动($\mu \to +0$ 时 $\dot{x}_1, \dot{x}_2 \to \infty$，而 $\dot{y}_1$ 和 $\dot{y}_2$ 则保持有限值)，即在那些电容器 C 上的电压 v_1 和 v_2 保持不变，而栅压 u_1 和 u_2 则发生跳跃。在平面 $y_1 \equiv y_1^0, y_2 \equiv y_2^0 (y_1^0, y_2^0 =$ 常数)附近的轨线上，系统的"迅速"运动的近似(对于 $0 < \mu \ll 1$)微分方程可由(10.77)的前两个方程中得出，只需将其中的 y_1, y_2 以常量 y_1^0, y_2^0 代替就可以得到，它们是：

$$\left.\begin{aligned} \mu\dot{x}_1 &= -y_1^0 - x_1 - \alpha\psi(x_1) - k\varphi(x_2) \equiv F_1(x_1, x_2, y_1^0), \\ \mu\dot{x}_2 &= -y_2^0 - x_2 - \alpha\psi(x_2) - k\varphi(x_1) \equiv F_2(x_1, x_2, y_2^0); \end{aligned}\right\} \quad (10.77a)$$

当然，这些方程只能在曲面 F(曲面 F^+ 为其一部分)：

$$F_1(x_1, x_2, y_1) = 0, \ F_2(x_1, x_2, y_2) = 0$$

的微小邻域外部(例如，在 $O(\sqrt{\mu})$ 邻域外部)，才能反映多谐振荡器状态的"迅速"变化的动力学。

指出下列几点：1)由于对任何 x_1, x_2, y_1^0, y_2^0 值，都有 $\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} < 0$，故根据本狄克生判据，方程组(10.77a)没有闭相轨线；2)平面 $y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0$ 与曲面 F^+ 的交点为近似方程组(10.77a)的稳定平衡状态；3)不存在走向无限远的"迅速"运动轨线。因此，所有"迅速"运动轨线都走向($C_a, C_g \to 0$ 时)

曲面 F^+ 的微小 $O(\mu)$ 邻域内，并转为"缓慢"运动轨线．曲面 F^+ 的边界线(曲线 γ)在平面 x_1, x_2 上的投影为 Γ，在此处 $\Delta(x_1, x_2)$ 由正变为负，故曲面 F^+ 上的"缓慢"运动轨线到达边界线后即转变为"迅速"运动（跳跃）轨线．相点的这种跳跃轨线（由"缓慢"运动区域的边界线出发的）的终点重新位于曲面 F^+ 上，因而满足跳跃条件(10.76)．需要指出，跳跃终点可根据跳跃起点由跳跃条件(10.76)单值地确定，因此，利用跳跃微分方程组(10.77a)来确定跳跃终点，和不考虑栅流的多谐振荡器问题中一样，就不是必须的了．

综上所述，在多谐振荡器中可能发生不连续振动，由系统的"缓慢"运动(栅压 u_1 和 u_2 具有限速度变化)和"迅速"的、跳跃的变化(寄生参数很小时，$\dot{u}_1$ 和 $\dot{u}_2$ 非常大)交替组成．其中第一种运动由方程组(10.75)描述，第二种运动则由跳跃条件(10.76)，或更全面些说，由(10.77a)描述，而且电路中的寄生参数越小就越为准确．

2. 不连续振动． 下面我们在考虑栅流的条件下来研究对称多谐振荡器的不连续振动，且选择最有实际意义的情况：

$$k > 1 + \alpha, \quad \beta \gg 1 + \alpha, \sigma. \tag{10.78}$$

当 $\sigma > -1$ (即 $E_g > -u_0$)时，条件(10.78)中的第一个条件保证多谐振荡器发生自激，第二个条件使得对一个电子管的栅流区

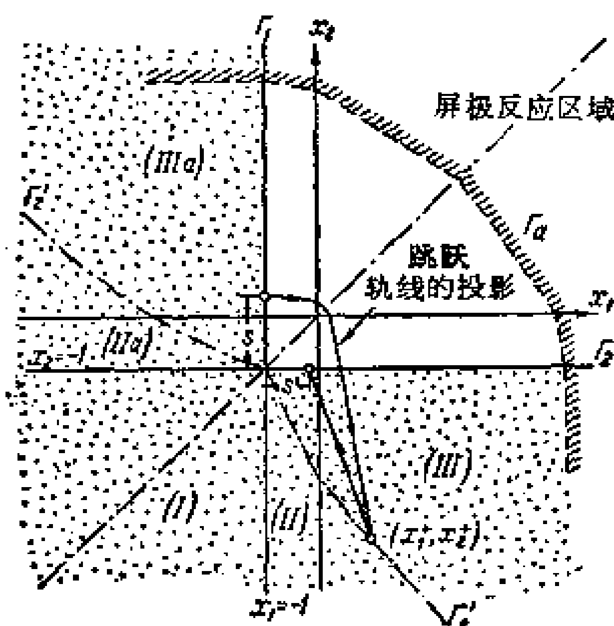


图 584

域中的“缓慢”运动相轨线的研究，有显著的简化[1]。根据(10.78)中的第一个条件，只有在 $\varphi'(x_1)\,\varphi'(x_2) = 0$，即 $x_1 < -1$ 或 $x_2 < -1$时，才能有 $\Delta(x_1, x_2) > 0$；换句话说，“缓慢”运动区域M(在平面 x_1, x_2 上)的边界线Γ 将是半直线 Γ_1: $x_1 = -1$, $x_2 > -1$ 和半直线 Γ_2: $x_2 = -1$, $x_1 > -1$，而“缓慢”运动区域M则为这两条半直线左下方的区域，在此区域内多谐振荡器的电子管中至少有一个处于闭塞状态。与此相反，在半直线 Γ_1 和 Γ_2 右上方的变量 x_1, x_2 的变化区域内，则两个电子管都处于开启状态，$\Delta(x_1, x_2) < 0$，而且其中只可能发生多谐振荡器状态的“迅速”的跳跃式的变化(图 584)。

当 u_1 或 u_2 足够大时，在电子管 $Л_1$ 或 $Л_2$ 中出现屏极反应：屏流 i_a 变为与屏压 u_a 有关，而几乎与栅压无关(例如，可参看本章 § 10)。若采用在屏流区域中 $i_a = \frac{u_a}{R_0}$ 这一假设，则屏流区域的边界线将如图 584 中画有斜线的曲线 Γ_a(定性地)所示。这条曲线的右上方的 x_1, x_2 的值域，就是屏流反应区，不难看出，这个区域亦属于“缓慢”运动区。我们假设，在多谐振荡器的振动过程中，相点(x_1, x_2)不会落到屏流区域中去。

唯一的平衡状态位于分角线 $x_1 = x_2$ 上，并决定于方程

$$x + \beta\phi(x) = \sigma,$$

即平衡状态的坐标为

$$x_1 = x_2 = x_0(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{当 } \sigma \leqslant 0 \text{ 时,} \\ \dfrac{\sigma}{1+\beta} \approx 0 & \text{当 } \sigma > 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

决定平衡状态性质的特征方程可写成如下形式：

---

1) 条件(10.78)等价于不等式：$SR_a > 1 + S_g R_a$, $R_a \ll R_g$ 以及 $S_g R_g \gg 1$, E_g/u_0. 这些不等式通常是满足的，因为在常用的电路中 $R_a \sim 10^3 \div 10^4$ 欧姆，$R_g \sim 10^4 \div 10^6$ 欧姆，$S \sim 3 \div 10$ 微安/伏，$S_g \sim 0.1 \div 1$ 微安/伏，$E_g \sim 0 \div 300$ 伏，而 $u_0 \sim 5 \div 20$ 伏，即 $k \sim 5 \div 20$, $\alpha \sim 0.1 \div 1$, $\beta \sim 10 \div 10^3$, $\sigma \sim 0 \div 60$.

需要指出，当 $k < 1$ 时，在整个平面 x_1, x_2 上不等式 $\Delta(x_1, x_2) > 0$ 都满足，即整个平面 x_1, x_2 为“缓慢”运动区域。不难看出，在这种情况下，所有轨线都走向稳定的平衡状态，因而多谐振荡器中不可能有任何自振出现。

情况 $1 < k < 1 + \alpha$ 中虽然可能出现自振，但从实际应用的观点来看，它并不是使我们感兴趣的情况。

$$\begin{vmatrix} \mu\lambda+\alpha^* & k^* & 1 & 0 \\ k^* & \mu\lambda+\alpha^* & 0 & 1 \\ -\beta^* & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\beta^* & 0 & \lambda \end{vmatrix} \equiv [\lambda(\mu\lambda+\alpha^*)+\beta^*]^2-k^{*2}\lambda^2=0,$$

其中 $\alpha^*=1+\alpha\psi'(x_0)$, $\beta^*=1+\beta\psi'(x_0)$, $k^*=k\varphi'(x_0)$, 且当 $0<\mu\ll 1$ 时,此方程之根为:

$$\lambda_{1,2}=-\frac{\beta^*}{\alpha^*\pm k^*},\quad \lambda_{3,4}=-\frac{1/\mu}{\alpha^*\pm k^*}$$

(其中两个根的量级为 1,其它两个根的量级为 $1/\mu$). 当 $\sigma<-1$ $(E_g<-u_0)$, 即 $x_0=\sigma<-1$ 和 $k^*=0$ 时,所有四个根均为负根,因此,在这种情况下位于"缓慢"运动区域中的平衡状态是稳定的(对于平面 x_1, x_2 上的"缓慢"运动轨线来说,它将是稳定结点). 但如果 $\sigma>-1(E_g>-u_0)$, 则平衡状态将落入"迅速"运动区域,并且是不稳定的, 因为当 $x_0>-1$ 时 $k^*=k>1+\alpha$ (根据(10.78)中的第一个条件), 从而特征方程将有两个正根; 其中一个根的量级为 $1/\mu$, 即相点将以量级为 $1/\mu$ 的速度离开平衡状态 ($\mu\to+0$ 时以跳跃的方式). 在这种情况下 ($\sigma>-1$ 时), 多谐振荡器中将发生自激,而且以后我们会看到,其中将建立起周期性不连续振动(在任何初始条件下都是相同的), 即出现不连续振动的软激状态. 当 $\sigma<-1$ 时,即平衡状态稳定时, 也可能存在稳定的不连续自振,亦就是说, $\sigma<-1$ 时,可能存在自振的硬激状态,也可能完全不存在自振.

由于对电子管特性采取了分段线性近似, "缓慢"运动区域M (在平面 x_1, x_2 上的) 被直线 $x_1=-1$, $x_1=0$, $x_2=-1$ 和 $x_2=0$ 划分成五个区域: (I), (II), (IIa), (III)和(IIIa)(图 584), 在每一区域内的"缓慢"运动方程组都是线性的. 在多谐振荡器的两个电子管都处于闭塞状态的区域(I): $x_1<-1$, $x_2<-1$中,这些方程显然可写成如下形式:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1+x_1=\sigma, \\ \dot{x}_2+x_2=\sigma; \end{aligned}\right\} \qquad (10.79a)$$

在电子管 $Л_2$ 处于闭塞状态而电子管 $Л_1$ 处于开启状态（但其中没有栅流)的区域(II)：$-1 < x_1 < 0$, $x_2 < -1$ 中，为：

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 + x_1 &= \sigma, \\ \dot{x}_2 + x_2 &= \sigma - k\dot{x}_1, \end{aligned}\right\} \tag{10.79b}$$

最后，在电子管 $Л_2$ 仍处于闭塞状态而电子管 $Л_1$ 中则既有屏流又有栅流的区域(III)：$x_1 > 0$, $x_2 < -1$ 中，为：

$$\left.\begin{aligned} (1+\alpha)\dot{x}_1 + (1+\beta)x_1 &= \sigma, \\ \dot{x}_2 + x_2 &= \sigma - k\dot{x}_1. \end{aligned}\right\} \tag{10.79c}$$

由于变量 x_1 和 x_2 以对称的形式出现在多谐振荡器的振动方程(10.75)中(这显然是由电路的对称性所引起的)，故“缓慢”运动区域M划分成方程组(10.75)的轨线，也必关于分角线 $x_1=x_2$ 对称，且后者永远是该方程组的积分曲线；例如，在电子管 $Л_1$ 处于闭塞状态而电子管 $Л_2$ 处于开启状态的区域(IIa)和(IIIa)中，多谐振荡器状态的“缓慢”变化方程组就可由方程组(10.79b)和(10.79c)中导出，只需将其中的变量 x_1 和 x_2 以 x_2 和 x_1 代替即可.

在区域(I)中的积分曲线为直线 $\dfrac{x_2-\sigma}{x_1-\sigma}=$ 常数，这些直线(当 $\sigma > -1$ 时则为其延长线)通过点(σ, σ). 若 $\sigma < -1$, 则平衡状态(σ, σ)位于此区域内.

在区域(II)中水平切线的等倾线为直线 $x_2 - \sigma - k(x_1 - \sigma) = 0$，其延长线同样通过点$(\sigma, \sigma)$，并且只有当 $\sigma \leqslant \dfrac{1}{k-1}$ 时，才能与半直线 Γ_2 相交(在线段 $-1 \leqslant x_1 \leqslant 0$ 上)；在此等倾线的左侧 $\dot{x}_2 < 0$ (轨线离开 Γ_2)，在其右侧则 $\dot{x}_2 > 0$ (轨线向 Γ_2 接近)；例如，当 $\sigma \geqslant \dfrac{1}{k-1}$ 时，区域(II)中的所有轨线都不能到达半直线 Γ_2 而转入区域(III). 其次，在区域(II)中，当$-1 < \sigma < 0$ 时，存在有直线相轨线 $x_1 \equiv \sigma$ (在此相轨线上 $\dot{x}_2 > 0$).

在区域(III)中，

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -k + \frac{1+\alpha}{1+\beta}\,\frac{x_2-\sigma}{x_1-\dfrac{\sigma}{1+\beta}},$$

并且由不等式(10.78)可知，其值在纵轴($x_1=0$)的微小邻域外部近似地等于$-k$. 因此，在区域(III)中位于此邻域外部的所有轨线都接近于直线：

$$x_2+kx_1=常数,$$

而且相点沿这些轨线运动时，变量x_1和x_2的变化速度的量级为$\frac{1+\beta}{1+\alpha}\gg 1$，即相点在这里作比较迅速的运动；这种运动我们将称之为"半迅速"运动[1]. 此外，当$\sigma\geqslant 0$时，在区域(III)中存在有"缓慢"运动的直线轨线

$$x_1=\frac{\sigma}{1+\beta}=x_0\approx 0$$

(在此直线上$x_2>0$，并量级为1).

在三个性质不同的情况：$\sigma<-1$，$-1<\sigma<0$以及$\sigma\geqslant 0$中，"缓慢"运动区域M的轨线划分表示在图585上. 由此轨线划分中可以看出，当$\sigma>-1$时，所有"缓慢"运动轨线都到达(t增加时)"缓慢"运动区域的边界线Γ——半直线Γ_1和Γ_2上，而当$\sigma<-1$，因而区域(I)中存在有稳定平衡状态(σ,σ)时，则一部分"缓慢"运动轨线走向此平衡状态，其余轨线则到达半直线Γ_1和Γ_2. 因此，在"缓慢"运动区域中不存在闭相轨线，因而多谐振荡器中的自振，如果存在，也必然是不连续的，即是由多谐振荡器状态的"缓慢"变化和"迅速"的、跳跃的变化交替组成的[2].

---

1) 为了使相点在区域(III)中的"半迅速"运动属于"缓慢"运动的类型，显然必须设

$$\frac{1+\beta}{1+\alpha}\ll\frac{1}{\mu}.$$

相点的"半迅速"运动相当于电容器C的比较迅速的充电过程(所需时间的量级为$\frac{C}{S_g}\ll CR_g$)，此电容器位于电子管$Л_1$的栅极电路中，且在此电子管中所流过的栅流显著地大于电阻R_g中的电流.

2) 若将本狄克生判据应用于积分曲线方程

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{P_2(x_1,x_2)}{P_1(x_1,x_2)}$$

(参看方程组(10.75b))，则同样可以证明，不可能存在完全位于"缓慢"运动区域的闭相轨线：不存在闭相轨线，因为在整个平面x_1,x_2上都有

$$\frac{\partial P_1}{\partial x_1}+\frac{\partial P_2}{\partial x_2}<0.$$

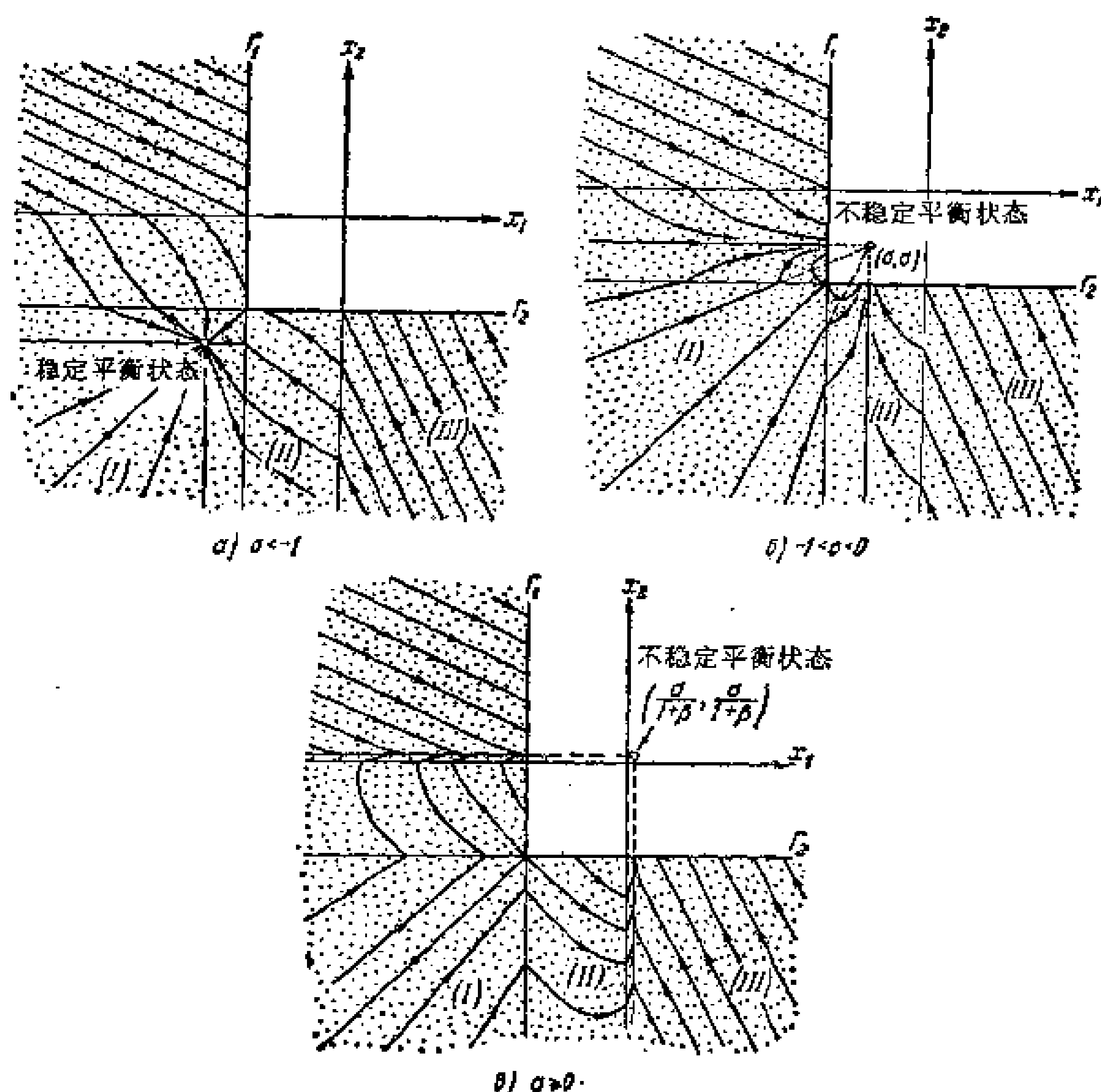


图 585

与其相对应的轨线(在平面 x_1, x_2 上)将与半直线 Γ_1 和 Γ_2 相交．因此，研究多谐振荡器的振动，就归结为建立及研究半直线 Γ_1 和 Γ_2 对于自身或彼此间的点变换(由系统的轨线所实现的)．

在半直线 Γ_1 和 Γ_2 上引入坐标 s——半直线上的点到点(−1, −1)的距离：在半直线 Γ_1 上 $s=1+x_2$，在半直线 Γ_2 上 $s=1+x_1$，且 $s>0$．为了确定起见，设相点由半直线 Γ_1 上坐标为 s 的点(即点(−1, $s-1$))出发，我们来研究它的运动．相点由此点出发"跳到"(沿相应的"迅速"运动轨线)点(x_1^+, x_2^+)上，其坐标可由跳跃条

件(10.76)单值地确定．不难看出，区域(I)，(IIa)和(IIIa)中的点不可能是相点由半直线 Γ_1 出发的跳跃终点．确实如此，若设 $x_1^+ \leqslant -1$，则根据(10.76)将得出 $x_1^+ = -1$，$x_2^+ = s-1$，即跳跃终点与起点相重合，而这是不可能的，因为跳跃终点只能位于"缓慢"运动区域的内部，而不能在它的边界线上．因此，跳跃终点只能在区域(II)和(III)(即 $x_1^+ > -1$，$x_2^+ < -1$)内，且其坐标则按给定数值根据从(10.76)中导出的如下方程组确定：

$$\left.\begin{aligned} x_1^+ + \alpha\phi(x_1^+) &= ks - 1, \\ x_2^+ + kx_1^+ &= s - 1 + \alpha\phi(s-1) - k; \end{aligned}\right\} \tag{10.80}$$

做为特例，当 $s < \frac{1}{k}$ 时，点(x_1^+, x_2^+)位于区域(II)中：

$$x_1^+ = ks - 1 < 0,\quad x_2^+ = -(k^2-1)s - 1, \tag{10.80a}$$

而 $s > \frac{1}{k}$ 时，则点(x_1^+, x_2^+)位于区域(III)中[1]．

相点由点(x_1^+, x_2^+)出发以后，沿通过该点的"缓慢"运动轨线运动，或到达半直线 Γ_2 上的某一点(其坐标为 s')，或渐近地趋近于区域(I)中的平衡状态(σ, σ)．在第一种情况中，半直线 Γ_1 上的点 s 在半直线 Γ_2 上具有后继点 s'，而且不难看出，对应函数

$$s' = \Pi(s)$$

为单值连续函数；在第二种情况中(只有当 $\sigma < -1$ 时才可能)，半直线 Γ_1 上的点 s 无论在半直线 Γ_2 和 Γ_1 上都没有后继点．

半直线 Γ_2 上的点$(s-1, -1)$向半直线 Γ_1^* 上的点$(-1, s'-1)$的点变换与上述情形完全一样(由于电路的对称性)，即后继点的坐标 s'(在半直线 Γ_1 上)，如果存在，将按起始点的坐标 s(在半直线 Γ_2 上)根据同一个对应函数 $s' = \Pi(s)$ 确定．因此下面我们只研究半直线 Γ_1 与 Γ_2 彼此之间的一个点变换，并记之以 Π．多次应用此点变换之后，我们将得出所研究之轨线与半直线 Γ_1 和 Γ_2 的

1) 相点由半直线 Γ_1 的点出发的跳跃终点(x_1^+, x_2^+)所构成的几何轨线，如图584中由三条直线线段组成的虚线 Γ_1' 所示．在同一张图上，与 Γ' 相对称的折线 Γ_2'，为相点由半直线 Γ_2 出发的跳跃终点的几何轨线．

* 原书为"Γ_2"——译者注．

交点序列:

$$s, s_1, s_2, \cdots, s_k, s_{k+1}, \cdots,$$

其中每一后继交点的坐标(在半直线 Γ_1 上为 x_2+1, 在半直线 Γ_2 上为 x_1+1),不论前行交点位于哪条半直线上(Γ_1 或 Γ_2),都可按前行点的坐标根据点变换 Π 的对应函数来确定,即:

$$s_1 = \Pi(s),$$

$$s_2 = \Pi(s_1), \cdots,$$

$$s_{k+1} = \Pi(s_k), \cdots.$$

知道了相轨线与半直线 Γ_1 和 Γ_2 的交点序列之后,我们显然就可以研究多谐振荡器的振动过程. 例如,如果点变换 Π 具有稳定的不动点 s^*, 而且给定序列 $s, s_1, s_2, \cdots$ 向它收敛,这显然说明,存在有稳定的不连续极限环,所研究这条相轨线渐近地 ($t\to+\infty$)向它趋近,多谐振荡器中将建立起周期不连续振动. 但如果点序列 $s, s_1, s_2, \cdots$ 是有限的,即某点 s_N 不具有后继点,则与此序列相对应的轨线与半直线 Γ_1 和 Γ_2 相交 N 次以后,不再到达"缓慢"运动的边界线,因而必趋向稳定平衡状态(这种情况只有当 $\sigma < -1$ 时才可能).

3. 点变换 Π. 下面我们计算并研究点变换 Π 的对应函数 $s' = \Pi(s)$, 而且和以前一样,(但较详细地)研究由半直线 Γ_1 之点出发的相轨线的走向. 和以前一样,令 s 为半直线 Γ_1 上的初始点(出发点)的坐标,x_1^+, x_2^+——相点由半直线 Γ_1 上的点 s 出发的跳跃终点坐标(点 (x_1^+, x_2^+) 位于区域(II)或(III)中),L 为由点 (x_1^+, x_2^+)出发的"缓慢"运动的正半轨线,s'(半轨线 L 到达半直线 Γ_2 上的点的坐标)点变换 Π 的后继点的坐标(如果后继点存在,即如果 L 到达 Γ_2).

首先作几点注记.

1) 由于 x_1^+, x_2^+ 为 s 的连续分段线性函数,而"缓慢"运动微分方程 (10.75b) 的右端为 x_1 和 x_2 的分段线性函数,故对应函数 $s' = \Pi(s)$ 也是连续分段线性函数(导数 $\frac{ds'}{ds}$ 在 $s = \frac{1}{k}$ 和 $s = 1$ 处

具有第一类不连续点)．

2) 若设 s_1 和 s_2 为点变换 Π 的两个起始点的坐标，且 $s_2 > s_1$，而点 s_1 具有后继点 s_1'，则点 s_2 也将具有后继点 s_2'，且 $s_2' > s_1'$；因此，对应函数 $s' = \Pi(s)$ 为单调增函数，且

$$\frac{ds'}{ds} > 0$$

(在 $s = \frac{1}{k}$ 和 $s = 1$ 各点上，$\frac{ds'}{ds}$ 的左极限和右极限满足上述不等式)．

为了证明这一论断，需指出如下事实．根据 (10.80)，对于跳跃终点 (x_1^+, x_2^+) 的几何轨迹(对于图 584 中的曲线 Γ_1')有：

$$\frac{dx_1^+}{ds} = \frac{k}{1 + \alpha\phi'(x_1^+)} > 0,$$

即 x_1^+ 为 s 的单调增函数，且

$$\frac{dx_2^+}{dx_1^+} = -k + \frac{1}{k}[1 + \alpha\phi'(x_1^+)][1 + \alpha\phi'(s-1)]$$
$$\geqslant -\left(k - \frac{1}{k}\right) > -k$$

(其中的等号只对区域(II)中的点 (x_1^+, x_2^+)，即 $s < \frac{1}{k}$ 时，才能成立)．其次，半轨线 L 所进入的区域位于区域(III)中 (若满足条件 $s > -\frac{(1+\sigma)(k-1)}{k^3}$ 则为区域(II)中)点 (x_1^+, x_2^+) 的几何轨迹的上方(曲线 Γ_1' 的上方)；在区域(II)中对应于 $s < -\frac{(1+\sigma)(k-1)}{k^3}$ 的半轨线 L (此种半轨线只在 $\sigma < -1$ 时方能存在)进入曲线 Γ_1' 下方的区域，不再与曲线 Γ_1' 相交，因而不再到达半直线 Γ_2[1]．

---

1) 在区域(III)中(在纵轴的微小邻域外部)相点沿接近于直线 $x_2 + kx_1 =$ 常数的轨线向 x_1 减小的方向运动；因此，半轨线 L 在区域(III)中进入曲线 Γ_1' 上方的区域，因为在曲线 Γ_1' 上

$$-k < \frac{dx_2^+}{dx_1^+} < 0.$$

为了研究"缓慢"运动轨线在区域 (II) 中的走向，我们研究这些轨线与平行直

令 $(x_1^+)_1$, $(x_2^+)_1$ 及 $(x_1^+)_2$, $(x_2^+)_2$ 为相点由半直线 Γ_1 上的点 s_1 及 s_2 出发的跳跃终点的坐标，L_1 和 L_2 为分别由点$((x_1^+)_1, (x_2^+)_1)$ 和点 $((x_1^+)_2, (x_2^+)_2)$ 出发的“缓慢”运动的正半轨线；半轨线 L_1 到达半直线 Γ_2，因而从点 $((x_1^+)_1, (x_2^+)_1)$ 出发进入曲线 Γ_1' 上方的区域．由于 $s_2 > s_1$，故如上所述，必有 $(x_1^+)_2 > (x_1^+)_1$，半轨线 L_2 也将进入曲线 Γ_1' 上方的区域，并通过半轨线 L_1 的右侧，因为半轨线 L_1 和 L_2 不可能相交．因此，半轨线 L_2 也将到达半直线 Γ_2，且其

线族

$$x_2+\left(k-\frac{1}{k}\right)x_1=a=\text{常数} \tag{A}$$

相交的情况，这个平行直线中有一条（当 $a=-\frac{k^2+k-1}{k}$ 时）为曲线 Γ_1'（在区域(II)的范围内）．由于根据(10.79b)有

$$\frac{d}{dt}\left[x_2+\left(k-\frac{1}{k}\right)x_1\right]=\sigma-x_2-\frac{1}{k}(\sigma-x_1),$$

故区域(II)中，当 $\sigma-x_2-\frac{1}{k}(\sigma-x_1)>0$ 时，即在直线

$$x_2-\sigma=\frac{1}{k}(x_1-\sigma) \tag{B}$$

的下方，“缓慢”运动的轨线由下向上与直线(A)相交，而在直线(B)的上方，则由上向下与直线(A)相交．当 $\sigma\geqslant-1$ 时，直线(B)位于区域(II)的上方，因此，区域(II)中的所有轨线（包括所有半轨线 L），随着向半直线 Γ_2 接近，都由下向上与直线(A)相交．根据(10.80a)，在曲线 Γ_1' 的点上有

$$\sigma-x_2-\frac{1}{k}(\sigma-x_1)=\sigma-x_2^+-\frac{1}{k}(\sigma-x_1^+)=k^2s+\frac{(1+\sigma)(k-1)}{k},$$

故当 $\sigma<-1$ 时，进入曲线 Γ_1' 上方区域中的只有对应于 $s>-\frac{(1+\sigma)(k-1)}{k^3}$ 的半轨线 L（在区域(II)中）；对于区域(II)中的点(x_1^+, x_2^+)，有 $0<s<\frac{1}{k}$，故只有当 $-\frac{k^2+k-1}{k-1}<\sigma<-1$ 时，才能存在此种半轨线．与此相反，对应于 $s<-\frac{(1+\sigma)(k-1)}{k^3}$ 的半轨线 L 则进入曲线 Γ_1' 下方的区域，不再与曲线 Γ_1' 相交，因而不能到达半直线 Γ_2．为了证明后一论断，设 $\sigma<-1$ 时某一由点(x_1^+, x_2^+) 出发，并对应于 $s<-\frac{(1+\sigma)(k-1)}{k^3}$ 的半轨线 L 与曲线 Γ_1' 至少还相交一次．于是，半轨线 L 在此交点 $(\bar{x}_1^+, \bar{x}_2^+)$ 上（若有若干个交点，则在其中第一个交点上），必将与曲线 Γ_1' 由下而上相交，而这是不可能的，因为当 $\sigma<-1$ 时在区域(II)中 $x_1<0$，且 $\bar{x}_1^+<x_1^+$，即点$(\bar{x}_1^+, \bar{x}_2^+)$必将对应于 $\bar{s}<s<-\frac{(1+\sigma)(k-1)}{k^3}$（提醒一句，$x_1^+$ 为 s 的单调增函数）．

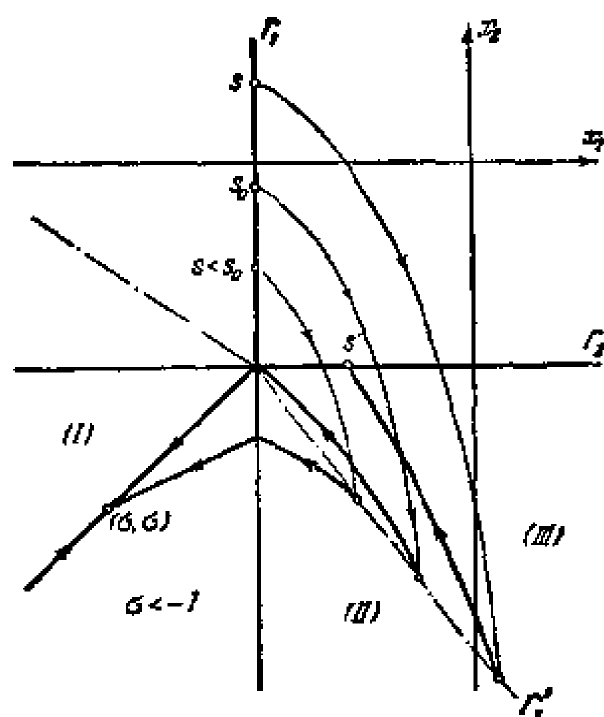


图 586

到达点的坐标 $s_2' > s_1'$. 这样一来，论断 2)得证.

还需指出下面一点：当 $\sigma \geqslant -1$ 时，在区域(II)和(III)中的所有"缓慢"运动轨线都到达半直线 Γ_2，因此所有点 $s>0$ 都具有后继点 s'，而且根据已被证明的论断2)必有 $s' > s_0' = \Pi(0)$；但如果 $\sigma < -1$，则具有后继点 s' 的只是那些满足条件 $s > s_0$ 的点 s，其中 s_0 为半直线 Γ_1 上一点的坐标，此点可转变为半直线 Γ_2 上的点 $s' = 0$ (与点 $s < s_0$ 相对应的半轨线 L，不能到达半直线 Γ_2，而当 $t \to +\infty$ 时渐近地趋近于稳定平衡状态(σ, σ)；参看图 586).

3) 对应函数当然与系统的参数，例如折算（无量纲）栅偏压 σ，有关．由于在区域(II)中

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -k + \frac{\sigma - x_2}{\sigma - x_1},$$

在区域(III)中

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -k + \frac{(1+\alpha)(\sigma - x_2)}{\sigma - (1+\beta)x_1},$$

故将这些关系式对 σ 微分后可得：

在区域(II)中，

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\frac{dx_2}{dx_1}\right]=-\frac{x_1-x_2}{(\sigma-x_1)^2}<0,$$

在区域(III)中,

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\frac{dx_2}{dx_1}\right]=-(1+\alpha)\frac{(1+\beta)x_1-x_2}{[\sigma-(1+\beta)x_1]^2}<0,$$

即在这两区域中,当 σ 增加时,系统的"缓慢"运动轨线的切线方向向量场沿时针方向转动;根据条件(10.78)在区域(III)中 $\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\frac{dx_2}{dx_1}\right]\approx 0$,因此在这个区域中,今后我们将忽略相轨线的切线方向向量场的这种转动. 除此而外,由于跳跃终点的坐标 x_1^+ 和 x_2^+ 与 σ 无关,故显然可以肯定,当 σ 增加时,对应于任意给定的(固定的)数值 s,正半轨线 L 到达 Γ_2 上的点必向右偏移. 因此,

$$\frac{\partial s'}{\partial\sigma}>0; \tag{10.81}$$

在 s 值中,有些对应于全部位于区域(III)中的半轨线 L,对于这些数值显然有 $\frac{\partial s'}{\partial\sigma}\approx 0$[1]. 由此可见,当 σ 减小时,对应函数 $s'=\Pi(s)$ 在拉梅尔图上(在平面 s, s' 上)或不发生变化,或部分地向下移动.

下面我们来计算并较详细地研究点变换 Π 的对应函数 $s'=\Pi(s)$. 由于跳跃方程(10.80)以及"缓慢"运动微分方程都是分段线性方程,因此必须将 s 的变化区间: $\sigma\geqslant -1$ 时为 $0<s<+\infty$, $\sigma<1$ 时为 $s_0<s<+\infty$, 再划分成若干区间,使每个区间中的上述方程都是线性的,然后再在每个区间内计算对应函数.

a) $s\geqslant 1+\frac{k-1}{1+\alpha}$时的点变换 Π. 当 s 足够大时,相点跳跃到点(x_1^+, x_2^+)之后,落到区域(III)中的"半迅速"运动轨线:

$$x_2+kx_1=a=\text{常数}\geqslant -1$$

的某一个上,并沿此轨线在横坐标为 $x_1'=\frac{1+a}{k}\geqslant 0$ 的点上到达

---

1) 对于这些 s 值,$\frac{\partial s'}{\partial\sigma}$ 是量级为 $\frac{1+\alpha}{1+\beta}$ 和 $\frac{\sigma}{1+\beta}$ 的小量.

半直线 Γ_2. 由于根据(10.80)有

$$a = x_2^+ + kx_1^+ = (1+\alpha)(s-1) - k$$

故这种情况中，只有当

$$s \geqslant 1 + \frac{k-1}{1+\alpha} = \frac{k+\alpha}{1+\alpha}$$

时才可能，而变换 Π 的后继点坐标则为 $s' = 1 + x_1' = \frac{1+a}{k} + 1$ 或

$$s' = \frac{1+\alpha}{k}s - \frac{\alpha}{k} \geqslant 1. \tag{10.82}$$

需要指出，点 $s = 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$ 相对应有后继点 $s' = 1$，而当 $s > 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$ 时，根据(10.78)中的第一个不等式，必有 $\frac{ds'}{ds} = \frac{1+\alpha}{k} < 1$[1]. 因此，$s' < s$，点变换 Π 不能有纵坐标 $s^* \geqslant 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$ 的不动点.

6) $\frac{1}{k} \leqslant s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$ 和 $\sigma \geqslant -1$ 时的点变换 Π. 当 $\frac{1}{k} < s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$ 时，跳跃终点 (x_1^+, x_2^+) 同样位于区域(III)中，但此时相点沿相应的"半迅速"运动轨线：

$$x_2 + kx_1 = a = x_2^+ + kx_1^+ < -1$$

或当 $\sigma \geqslant 0$ 时进入"缓慢"运动相轨线

$$x_1 \equiv x_0 = \frac{\sigma}{1+\beta} \approx 0$$

的微小邻域，并在横坐标为 $x_1' \approx x_0 \approx 0$ 的点上到达半直线 Γ_2，或当 $\sigma < 0$ 时在点 $(0, a)$ 上到达区域(III)和(II)的边界线，然后转入区域(II).

由此可见，当 $\sigma \geqslant 0$ 时，后继点坐标为

1) 上面列举之 s 和 $\frac{ds'}{ds}$ 的表示式当然是近似的；它们与准确式只差量级为 $\frac{1+\alpha}{1+\beta}$ 和 $\frac{\sigma}{1+\beta}$ 的小量.

$$s' = 1^{1)};\tag{10.83}$$

因此，当 $\sigma \geqslant 0$ 时，点 $s^* = 1$ 为点变换 Π 的不动点，而且是稳定的。

现在我们来研究 $-1 \leqslant \sigma < 0$ 的情况．将方程组(10.79b)积分后，不难得到区域(II)中由点$(0, a)$开始($t = 0$ 时)的轨线方程：

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sigma(1 - e^{-t}), \\ x_2 &= \sigma - (\sigma - a + k\sigma t)e^{-t}. \end{aligned}\right\}\tag{10.84}$$

相点沿此轨线运动，于某一瞬时 $t = \tau > 0$ 到达半直线 Γ_2．对于这一瞬时，我们有：

$$\begin{aligned} s' - 1 &= \sigma(1 - e^{-\tau}), \\ -1 &= \sigma - (\sigma - a + k\sigma\tau)e^{-\tau}. \end{aligned}$$

因为

$$a = \begin{cases} (1 + \alpha)(s - 1) - k & \text{当 } s \geqslant 1 \text{ 时}, \\ s - 1 - k & \text{当} \dfrac{1}{k} \leqslant s \leqslant 1 \text{时}, \end{cases}$$

故由所得方程解出 s 和 s' 后，可得到变换 Π 的对应函数方程(参数形式)：

当 $1 \leqslant s < 1 + \dfrac{k - 1}{1 + \alpha}$ 时

$$\left.\begin{aligned} s &= 1 + \frac{k + \sigma + k\sigma\tau - (1 + \sigma)e^{\tau}}{1 + \alpha}, \\ s' &= 1 + \sigma(1 - e^{-\tau}); \end{aligned}\right\}\tag{10.85a}$$

当 $\dfrac{1}{k} \leqslant s \leqslant 1$ 时

$$\left.\begin{aligned} s &= 1 + k + \sigma + k\sigma\tau - (1 + \sigma)e^{\tau}, \\ s' &= 1 + \sigma(1 - e^{-\tau}); \end{aligned}\right\}\tag{10.85b}$$

我们看到，方程组(10.85b)可由(10.85a)中得出，若在后一方程组(10.85a)中以 0 代替 α．点 $s = 1 + \dfrac{k - 1}{1 + \alpha}$ 对应于数值 $\tau = 0$ 和

---

1) 更准确些说，应当是 $s' = 1 + g(s)$ 和 $\dfrac{ds'}{ds} = g'(s)$，其中 $g(s)$ 和 $g'(s)$ 是数量级分别为 $\dfrac{1 + \alpha}{1 + \beta}$ 和 $\dfrac{\sigma}{1 + \beta}$ 的小量．

$s' = 1$，点 $s = 1$ 对应数值 $\tau = \tau_1$，点 $s = \frac{1}{k}$ 对应数值 $\tau = \tau_2$，其中 τ_1 和 τ_2 为由下方程组单值确定之参数 τ 的值：

$$\left.\begin{aligned}(1+\sigma)e^{\tau_1} &= k+\sigma+k\sigma\tau_1,\\ (1+\sigma)e^{\tau_2} &= 1-\frac{1}{k}+k+\sigma+k\sigma\tau_2\end{aligned}\right\} \tag{10.86}$$

(此方程组的图解表示在图 587 上；显然 $\tau_2 > \tau_1$)。

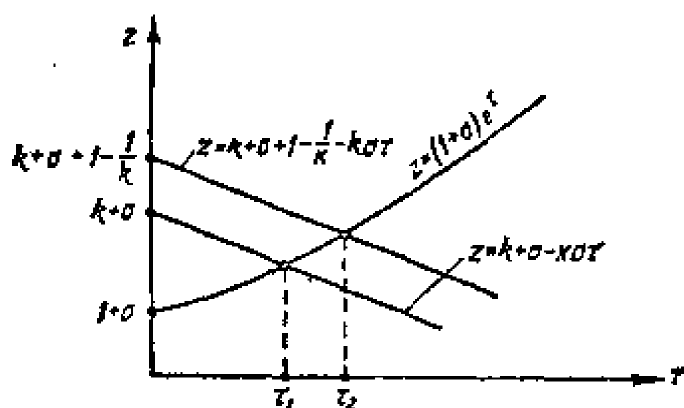


图 587

(两条直线的方程中含 τ 的那一项的符号应为+. ——译者注.)

由于

$$\frac{ds}{d\tau} = \begin{cases}\dfrac{k\sigma-(1+\sigma)e^{\tau}}{1+\alpha} & \text{当 } 1 < s < 1+\dfrac{k-1}{1+\alpha} \text{ 时},\\ k\sigma-(1+\sigma)e^{\tau} & \text{当 } \dfrac{1}{k} < s < 1 \text{时},\end{cases}$$

$$\frac{ds'}{d\tau} = \sigma e^{-\tau} < 0,\ \text{因为 } \sigma < 0,$$

$$\frac{ds'}{ds} = \begin{cases}(1+\alpha)\dfrac{-\sigma e^{-\tau}}{-k\sigma+(1+\sigma)e^{\tau}} & \text{当} 1 < s < 1+\dfrac{k-1}{1+\alpha} \text{ 时},\\ \dfrac{-\sigma e^{-\tau}}{-k\sigma+(1+\sigma)e^{\tau}} & \text{当} \dfrac{1}{k} < s < 1 \text{时},\end{cases}$$

故当 $-1 \leqslant \sigma < 0$ 时，$\frac{ds}{d\tau} < 0$，而且 τ 由 0 到 τ_2 的单调变化对应于 s 由 $1+\frac{k-1}{1+\alpha}$ 到 $\frac{1}{k}$ 的单调减小. 其次，根据(10.78)中的第一个方程，有

$$0 < \frac{ds'}{ds} < \frac{1+\alpha}{k} < 1 \quad 当 \quad 1 < s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha},$$

$$0 < \frac{ds'}{ds} < \frac{1}{k} < 1 \qquad 当 \quad \frac{1}{k} < s < 1.$$

由此可见，当$-1 \leqslant \sigma < 0$ 时，在 $1 < s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$区间上，点变换$\Pi$不能有不动点$s^*$，因为在此区间上$s' < 1$，而在$\frac{1}{k} \leqslant s < 1$区间上，则可能有唯一的稳定不动点（不动点如果存在，其唯一性和稳定性可由不等式$0 < \frac{ds'}{ds} < 1$ 导出，此不等式已在前面对所有的$\frac{1}{k} < s < 1$值证明过）．对应于此不动点的变换参数值 $\tau = \tau^*$可根据(10.85b)由方程

$$k + k\sigma\tau^* + \sigma e^{-\tau^*} - (1+\sigma)e^{\tau^*} = 0 \qquad (10.87)$$

确定．若忽略“迅速”和“半迅速”运动的时间，则数值τ^*亦将给出不连续自振的半周期（采用无量纲单位）．

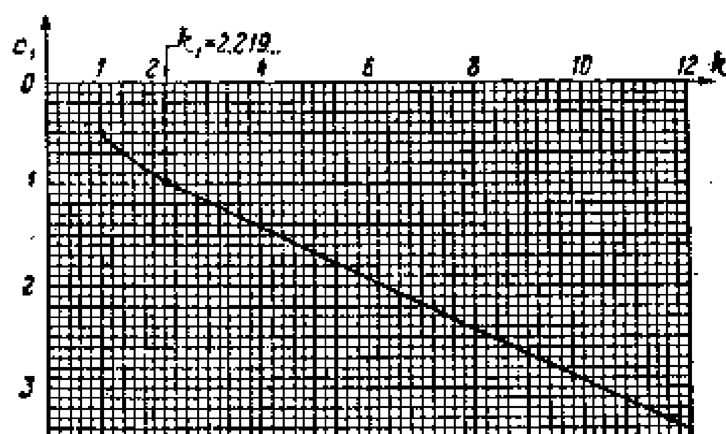


图 588

不动点s^*在区间$\frac{1}{k} \leqslant s < 1$ 中的存在条件，显然可以写成$(s')_{\tau=\tau_2} \geqslant \frac{1}{k}$的形式，或根据(10.81)写成

$$\sigma \geqslant \sigma_1 = \sigma_1(k) \qquad (10.88)$$

的形式，其中σ_1为参数σ的分枝值，由方程

$$(s')_{\tau=\tau_2} = 1 + \sigma(1 - e^{-\tau_2}) = \frac{1}{k}$$

和(10.86)中的第二个方程(它表示 τ_2 与 σ 和 k 的关系)共同确定。由于 $\tau_2 > 0$, 故 $k > 1$ 时 $\sigma_1 < 0$; 此外,当 $k = k_1 = 2.219\cdots$ 时, $\sigma_1 = -1$[1]. 根据上述方程数值解所建立的函数 $\sigma_1 = \sigma_1(k)$ 的图象表示在图 588 上[2]. 由于 $k > k_1 \simeq 2.2$ 时, $\sigma_1 < -1$,故若 $k > k_1$, 在区间内对于所有的 $-1 < \sigma < 0$,都存在有不动点 s^*.

в) $0 < s < \frac{1}{k}$ 和 $\sigma \geqslant -1$ 时的点变换 Π. 当 $0 < s < \frac{1}{k}$ 时, 由(10.80a)可知, 相点由半直线 Γ_1 上的点 s 出发的跳跃终点 (x_1^+, x_2^+) 已位于区域(II)的内部. 将微分方程组(10.79b)积分后, 不难得出轨线 L(此轨线在 $t = 0$ 时由点(x_1^+, x_2^+)出发, 并通过区域(II))的方程:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sigma + (x_1^+ - \sigma)e^{-t}, \\ x_2 &= \sigma + [k(x_1^+ - \sigma)t + x_2^+ - \sigma]e^{-t}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.89)$$

当 $\sigma \geqslant -1$ 时,此轨线或到达区域(II)和(III)的边界线,然后转入区域(III)(这只有在 $\sigma > 0$ 时才有可能,而当 $\sigma \geqslant \frac{1}{k-1}$时,即后继点坐标 $s' = 1$ 时,亦必然成立), 或到达半直线 Γ_2, 然后整个时间内都保持在区域(II)的范围内(在这种情况下, L 到达 Γ_2 的点的

---

1) k_1 为方程 $ke^{-\left(1-\frac{1}{k^2}\right)} = 1$ 的唯一根.

2) 方程$\frac{1}{k} = 1 + \sigma_1(1 - e^{-\tau_2})$ 以及(10.86)中的第二个方程 $(1 + \sigma_1)e^{\tau_2} = 1 - \frac{1}{k} + k + \sigma_1 + k\sigma\tau_2$ 的数值解,用如下方法进行最为方便. 将第一方程代入第二方程,并解出 σ_1:

$$\sigma_1 = \frac{k - e^{\tau_2}}{e^{\tau_2} - e^{-\tau_2} - k\tau_2}. \qquad (A)$$

再重新代入第一方程,则得:

$$k^2(\tau_2 - 1 + e^{-\tau_2}) - k(\tau_2 + 1 - e^{-\tau_2}) + e^{\tau_2} - e^{-\tau_2} = 0. \qquad (B)$$

给定各种不同数值 $\tau_2 > 0$, 但所给定的数值应使二次方程(B) 的判别式取正值(为此, τ_2 必须满足不等式 $0 < \tau_2 < 0.82\cdots$), 则由方程(B)对于每一个 τ_2 值可求出两个 k 值,然后由方程(A)求出相应的 σ_1 值. 需要指出,当 $\tau_2 \to +0$ 时,二次方程(B)的一个根 k 趋于 1,另一根趋向$+\infty$,而与之相对应的 σ_2 值则趋向于 $-1/2$ 和$-\infty$.

横坐标 x_1' 在 x_1^+ 和 σ 的中间).

设于某一时刻 $t=\tau>0$，相点沿轨线 L 运动(在区域(II)的范围内)到达半直线 Γ_2. 此时,变换 $\Pi(s'=x_1'-1)$ 的后继点坐标 s' 将决定于方程:

$$\left.\begin{aligned}&s'-1=\sigma+(ks-1-\sigma)e^{-\tau},\\&-1=\sigma+[(ks-1-\sigma)\tau-(k^2-1)s-1-\sigma]e^{-\tau}\end{aligned}\right\}\quad(10.89a)$$

(在这里我们应用了关系式(10.80a),它表示出当 $0<s<\dfrac{1}{k}$时跳跃终点坐标与半直线 Γ_1 上的跳跃起点坐标 s 间的关系).

当 $\sigma=-1$ 时,(10.89a)中的第二方程对所有轨线 L 都给出同一穿越时间 τ, 即 $\tau=1-\dfrac{1}{k^2}$; 此时，根据(10.89a)的第一方程,对应函数(对于$0<s<\dfrac{1}{k}$)将是线性的:

$$s'=ske^{-\left(1-\frac{1}{k^2}\right)},\quad(10.90)$$

其图象是斜率为 $ke^{-\left(1-\frac{1}{k^2}\right)}$ 由原点开始的直线线段. 显然，当 $k>k_1$ 时(其中 $k_1=2.2\cdots$为方程 $ke^{-\left(1-\frac{1}{k^2}\right)}=1$ 的唯一根),此线段位于分角线 $s'=s$ 的上方,当 $k<k_1$ 时则在其下方[1].

当 $\sigma>-1$ 时,由(10.81)可知,对应函数 $s'=\Pi(s)$ 在区间 $0<s\leqslant\dfrac{1}{k}$ 上的图象位于直线(10.90)的上方,即 $s'=\Pi(s)>sk$ $e^{-\left(1-\frac{1}{k^2}\right)}$, 因此当 s 由 0 变化到 $\dfrac{1}{k}$ 时, s' 由某一数值$s_0'=\Pi(0)>0$ 单调增加(因$\dfrac{ds'}{ds}>0$) 到 $\Pi\left(\dfrac{1}{k}\right)>e^{-\left(1-\frac{1}{k^2}\right)}$. 将方程组(10.89a)对 s 和 s' 求解,则可得到参数形式的对应函数:

---

1) 由此根据 (10.81), 可再一次看出,当 $-1<\sigma<0$ 及 $k\geqslant k_1$ 时,$(s')_{s=\frac{1}{k}}>\dfrac{1}{k}$, 因而变换$\Pi$具有不动点$\dfrac{1}{k}<s^*<1$.

$$
\left.\begin{aligned}
s &= (1+\sigma)\frac{1+k\tau-e^{\tau}}{k^2\tau-(k^2-1)},\\
s' &= (1+\sigma)\frac{k^2\tau-(k^2+k-1)(1-e^{-\tau})}{k^2\tau-(k^2-1)},
\end{aligned}\right\}\quad(10.91)
$$

当然必需满足条件 $s'\leqslant 1$.

但如果对于区间 $0<s<\frac{1}{k}$ 中的某些 s 值,(10.91)中的第二关系式给出 $s'>1$,则这显然说明,所研究的轨线 L 不到达半直线 Γ_2 在区域(II)范围内的线段,而转入区域(III);因此,对于这些 s 值,对应函数将不再由关系式(10.91)表达. 这只有当 $\sigma>0$ 时,才有可能,而当 $\sigma\geqslant\frac{1}{k-1}$,即区域(II)中的所有轨线都转入区域(III)时,则上述情况对于所有的 $0<s\leqslant\frac{1}{k}$,都一定会出现[1]. 因此,对应于这些 s 值的轨线 L,由区域(II)中的点 (x_1^+, x_2^+) 出发转入区域(III)——进入轨线 $x_1\equiv x_0=\frac{\sigma}{1+\beta}\approx 0$ 的微小邻域,并在这里到达半直线 Γ_2——到达点的横坐标为 $x_1'\approx x_0\approx 0$,即当 s 取这些数值时,后继点坐标为

$$
s'=1. \quad(10.91a)
$$

下面我们简单地研究一下对应函数(10.91). 显然,点 $s=\frac{1}{k}$ 对应于 $\tau=\tau_2$,此数值由(10.86)的第二方程决定,而点 $s=0$ 则对应于 $\tau=\tau_3>0$,后者由方程

$$
e^{\tau_3}=1+k\tau_3
$$

单值($k>1$ 时)确定. 其次不难证实,区间 $0<s<\frac{1}{k}$ 中的 s 值

---

1) 根据(10.89a)的第一方程,若 $\sigma<0$,则对于所有的 $0<s<\frac{1}{k}$ 都有 $s'<1$. 与此相反,当 $\sigma>0$ 时,对应于 $s=\frac{1}{k}$ 的轨线 L_1 则转入区域(III). 因此,根据轨线 L 与初始条件的连续相关性,向区域(III)中转入的还将有接近于 L_1,并对应于靠近 $\frac{1}{k}$ 的 s 值 $\left(s<\frac{1}{k}\right)$ 的轨线 L,亦即,当 $\sigma>0$ 时,在 $0<s<\frac{1}{k}$ 区间上,永远有这样的 s 值,当 s 取这些数值时,对应函数不能用关系式(10.91)来表达.

对应于区间 $\tau_3 > \tau > \tau_2$ 中的 τ 值.

为了证明后一论断，引入辅助函数

$$\Psi(\tau) = \frac{1 + k\tau - e^{\tau}}{k^2\tau - (k^2 - 1)},$$

s 的符号与此函数的符号相同($\sigma > -1$ 时). 此函数的分母 $k^2\tau - (k^2 - 1)$ 当 $\tau < \tau_4$ 时小于零，当 $\tau > \tau_4$ 时大于零，其中 $\tau_4 = 1 - \frac{1}{k^2}$；当 $\tau = \tau_4$ 时分母变为零，函数本身则变为无限大. 函数 Ψ 的分子 $1 + k\tau - e^{\tau}$ 当 $\tau = 0$ 时等于零，$0 < \tau < \tau_3$(τ_3 是前面已引入的)时大于零，$\tau = \tau_3$ 时重新变为零，$\tau > \tau_3$ 时则小于零. 由于 $\tau = \tau_4$ 时函数 Ψ 的分子 $1 + k\tau_4 - e^{\tau_4} = 1 + \tau_4 \times (1 - \tau_4)^{-1/2} - e^{\tau_4} > 0$ (因为 $0 < \tau_4 < 1$, $k = (1 - \tau_4)^{-1/2}$)，而对于所有的 $0 < \tau < 1$ 都有 $\tau(1 - \tau)^{-1/2} > e^{\tau} - 1$，故 $\tau_4 < \tau_3$. 利用这些知识就足以定性

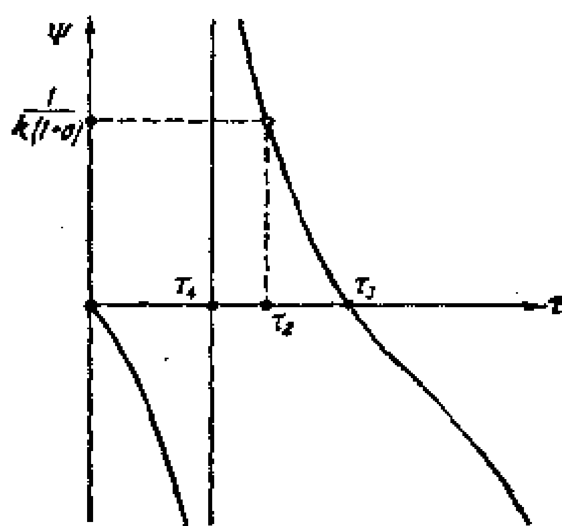


图 589

地画出函数 Ψ 的图象 (显然，当 $0 < \tau < \tau_4$ 时 $\Psi < 0$, $\tau_4 < \tau < \tau_3$ 时 $\Psi > 0$, $\tau > \tau_3$ 时 $\Psi < 0$, 且 $\tau \to +\infty$ 时 $\Psi \to -\infty$). 此图象表示在图 589 上. 显然 $\tau_4 < \tau_2 < \tau_3$, 因为 τ_2 满足方程 $\Psi(\tau_2) = \frac{1}{k(1+\sigma)} > 0$. 由此可见，区间 $0 < s < \frac{1}{k}$ 中的 s 值对应于区间 $\tau_3 > \tau > \tau_2$ 中的 τ 值，而且在此区间上有 $\frac{ds}{d\tau} < 0$，故亦有 $\frac{ds'}{d\tau} < 0$(因 $\frac{ds'}{ds} > 0$)，因此当参数 τ 由 τ_2 单调增加到 τ_3 时，s 由 $\frac{1}{k}$ 单调减小到 0，而 s' 则由 $(s')_{\tau=\tau_2} > e^{-\left(1-\frac{1}{k^2}\right)}$ 单调减小到 $s_0' = (s')_{\tau=\tau_3} > 0$.

如果点变换 Π 在区间 $0 < s < \frac{1}{k}$ 中具有不动点 s^*，则此不动

点的参数值 $\tau=\tau^*(\tau_2<\tau^*<\tau_3)$由条件 $s=s'<\frac{1}{k}<1$ 或根据(10.91)由方程

$$e^{\tau}+k(k-1)\tau-(k^2+k-1)(1-e^{-\tau})-1=0 \quad (10.92)$$

确定．不难证实，此方程具有唯一的正根 τ^*（这样一来，如果 τ^* 满足不等式 $\tau_2<\tau^*<\tau_3$，则变换Π在区间 $0<s<\frac{1}{k}$上具有唯一的不动点s^*）．为此目的，我们来研究辅助函数

$$\Phi(\tau)=e^{\tau}+k(k-1)\tau-(k^2+k-1)(1-e^{-\tau})-1^*$$

对于此函数有

$$\Phi'(\tau)=e^{\tau}+k(k-1)-(k^2+k-1)e^{-\tau},$$
$$\Phi''(\tau)=e^{\tau}+(k^2+k-1)e^{-\tau}>0,$$
$$\Phi(0)=0,\Phi'(0)=-2(k-1)<0,$$
$$\Phi(+\infty)=+\infty,\Phi'(+\infty)=+\infty.$$

因此，函数$\Phi(\tau)$具有如图 590 所示之形状：当参数τ为足够小的正值时函数$\Phi(\tau)<0$，并有唯一的极小值 $\Phi_{极小}<0$（当参数τ取某一数值 $\tau=\tau'>0$ 时，此τ'值由方程 $\Phi'(\tau)=0$ 确定）；当 $\tau>\tau'$ 时 $\Phi(\tau)$ 为单调增函数，由 $\tau=\tau'$ 时的 $\Phi_{极小}<0$ 变化到 $\tau\to+\infty$ 时的$+\infty$；因而函数$\Phi(\tau)$和τ轴相交($\tau>\tau'$时)，且只

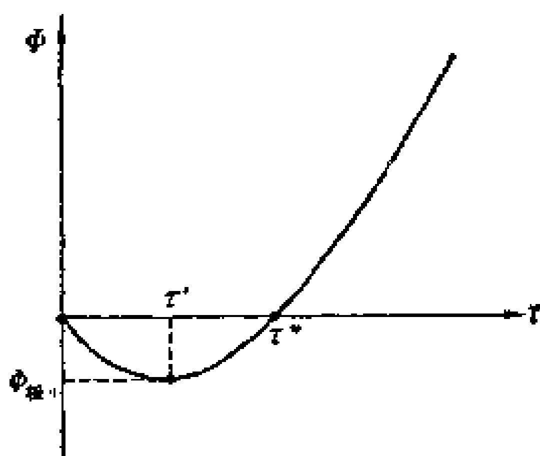


图 590

* 此方程中的项“-1”原书没有——译者注。

相交一次．由此可见，方程 $\Phi(\tau)=0$ 具有唯一的正根 τ^*，而点变换 Π 在区间 $0<s<\frac{1}{k}$ 上可能有的不动点亦不超过一个．

由于当 $k>k_1=2.2\cdots$ 时，直线(10.90)位于分角线 $s'=s$ 的上方，故对应函数 $s'=\Pi(s)$ 的图象当 $k>k_1$ 和 $\sigma>-1$ 时也将位于此分角线的上方，亦即，对于所有的 $0<s<\frac{1}{k}$ 都将满足不等式 $s'=\Pi(s)>s$．因此，在这种情况下，区域 $0<s<\frac{1}{k}$ 上没有变换 Π 的不动点．

当 $\sigma>-1$，但 $k<k_1$(当 $\sigma_1(k)>-1$) 时，可能出现两种情况．

1) 如果 $\sigma>\sigma_1(k)$，则如上所述(参看(10.88))，$(s')_{\tau=\tau_2}>\frac{1}{k}=(s)_{\tau=\tau_2}$，或者换句话说，当 $\tau=\tau_2$（或 $s=\frac{1}{k}$）时 $s'-s>0$；当 $\tau=\tau_3(s=0)$ 时差值 $s'-s$ 也具有与此相同的符号．因此，作为 s 的连续函数之差值 $s'-s$，或在区间 $0<s<\frac{1}{k}$ 上不等于零，或在此区间上变为零的次数为偶数．后者，我们在前面已经证明过，是不可能的．因此，在这种情况下，变换 Π 在区间 $0<s<\frac{1}{k}$ 上也不可能有不动点．

2) 当 $-1<\sigma<\sigma_1(k)$ 时，$(s')_{\tau=\tau_2}<\frac{1}{k}$，即 $s=\frac{1}{k}$ $(\tau=\tau_2)$ 时，差值 $s'-s<0$；当 $s=0(\tau=\tau_3)$ 时，此差值仍为正值．因此，在区间 $0<s<\frac{1}{k}$ 上差值 $s'-s$ 变为零，即存在有变换 Π 的不动点 s^*，而且如上面已证明过，是唯一的．此不动点由于其唯一性，故必然是稳定的．确实如此，假如不动点 s^* 是不稳定的，则在 $s=s^*$ 时必有不等式 $\frac{ds'}{ds}>1$ 或 $\frac{d}{ds}(s'-s)>0$ 成立．此时，当 $s>s^*$，但接近于 s^* 时(即 $s^*<s\leqslant s^*+\varepsilon$，其中 ε 为某一足够小的正数)，差值 $s'-s$ 必为正值，因此在区间 $s^*+\varepsilon<s<\frac{1}{k}$ 上至

少还将有一次变为零，即点变换Π在区间 $0 < s < \frac{1}{k}$上至少还将有一个不动点(s^*除外)，而这是不可能的.

r) $\sigma < -1$ 时的点变换 Π. 当 $\sigma < -1$ 时，在区域 (I) 中有稳定平衡状态(σ, σ)存在，一部分“缓慢”运动轨线将走向此平衡状态(参看图 585a 和 586). 因此，这时必存在这样的 $s_0 > 0$, 它是与全部具有后继点的诸点相对应的 s 值的下确界，即点变换Π只有当 $s > s_0$ 时才成立(参看 873 页). 当然，变换Π的存在区间的这一下确界必然小于 $1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$，因为对于所有的σ，其中包括$\sigma < -1$，点 $s \geqslant 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$都具有由函数(10.82)确定的后继点$s'$.

其次，在推导变换Π的对应函数之表示式 (10.85a)，(10.85b) 和(10.91)时，我们从未应用过条件 $\sigma \geqslant -1$ (此条件只在分析上述表示式时才用到). 因之，当 $\sigma < -1$ 时，上述表示式在 s 的相应变化区间上(当然只有在变换Π的存在区间范围以内，即只有当 $s > s_0$ 时)，也仍然是成立的.

最后，我们指出，当 $\sigma < -1$ 时，对于所有的 $s_0 < s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$，根据(10.81)都将成立不等式

$$s' = \Pi(s) < (s')_{\sigma=-1}, \tag{10.93}$$

其中

$$(s')_{\sigma=-1} = \begin{cases} ske^{-\left(1-\frac{1}{k^2}\right)} & \text{当 } 0 < s \leqslant \frac{1}{k} \text{ 时}, \\ e^{-\left(1-\frac{s}{k}\right)} & \text{当 } \frac{1}{k} \leqslant s \leqslant 1 \text{ 时}, \\ e^{-\left(1+\frac{\alpha}{k}-\frac{1+\alpha}{k}s\right)} & \text{当 } 1 \leqslant s \leqslant 1 + \frac{k-1}{1+\alpha} \text{ 时} \end{cases}$$

——$\sigma = -1$ 时的对应函数[1]. 从不等式(10.93)中可以得出，当

1) 当 $\sigma = -1$ 和

$$\frac{1}{k} \leqslant s \leqslant 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$$

时，对应函数的显式可由(10.85a)和(10.85b)导出；当 $\sigma = -1$ 时，$s' = e^{-\tau}$，而 τ 则为 s 的分段线性函数.

$\sigma < -1$, $k < k_1 = 2.2\cdots$时,对于所有的 $s > s_0$ 都有 $s' < s$,因为当 $k < k_1$ 时 $(s')_{\sigma=-1} < s$,即变换Π在这种情况下没有不动点. 它只能当 $k > k_1$ 时才有不动点. 同时,由于 $\sigma < -1$ 时对于所有的 $s_0 < s < 1 + \frac{k-1}{1+\alpha}$ 都有 $s'<1$(参看不等式(10.93)),因而不动点 s^* 只能位于区间 $s_0 < s < 1$ 上,因此这些点上的参数值 $\tau = \tau^*$ 将决定于方程(10.87),若 $\frac{1}{k} < s^*<1$,或方程(10.92),若 $s^*<\frac{1}{k}$. 最后这个方程,正象前面已经证明过的(参看 883 页的证明,此证明也适用于 $\sigma < -1$ 情形),不可能有一个以上正根 τ^*,因此如果在区间 $s_0 < s < \frac{1}{k}$ 上有变换Π的不动点,则只能是一个(很明显,要想使这种不动点得以存在,必须有 $s_0 < \frac{1}{k}$).

经过上述讨论以后,设 $\sigma < -1$ 和 $k > k_1 = 2.2\cdots$. 由于 $s = s_0$ 时差值 $s' - s = -s_0 < 0$,故如果 $s = \frac{1}{k}$ 时差值

$$s' - s = (s')_{\tau=\tau_2} - \frac{1}{k} > 0,$$

即如果(参看(10.88))

$$\sigma > \sigma_1(k),$$

则变换Π具有不动点,且只有一个(提醒一句,当 $k=k_1$ 时,$\sigma_1(k) <-1$). 在此不动点 $s = s^*$ 上,差值 $s' - s$ 的符号由负($s < s^*$ 时)变为正($s > s^*$ 时),这说明,$s = s^*$ 时,$\frac{d}{ds}(s'-s) > 0$ 或 $\frac{ds'}{ds} >1$,即当 $k > k_1$ 和 $\sigma_1(k) < \sigma < -1$ 时,变换Π的唯一的(在区间 $s_0 < s < \frac{1}{k}$上的)不动点是不稳定的.

但如果 $\sigma < \sigma_1(k)$,则当 $s = \frac{1}{k}$ 时 $s' - s = (s')_{\tau=\tau_2} - \frac{1}{k} < 0$,因此,差值 $s' - s$ 由于其连续性,或在区间 $s_0 < s < \frac{1}{k}$ 上

不变为零，或在此区间上变为零的次数为偶数．由于后者不可能，因而当 $\sigma < \sigma_1(k)$ 时，变换 Π 在区间 $s_0 < s < \frac{1}{k}$ 上亦没有不动点．

下面我们研究区间$\frac{1}{k} < s < 1$ 上的对应函数．由于在变换 Π 的整个存在区间上，$s' > 0$（对于所有的 $s > s_0$），故根据(10.85b)我们有：

$$s' = 1 + \sigma(1 - e^{-\tau}) > 0, \text{ 即 } \frac{1+\sigma}{\sigma} e^{\tau} < 1,$$

以及

$$\frac{ds}{ds'} = e^{\tau}\left(k - \frac{1+\sigma}{\sigma} e^{\tau}\right) > e^{\tau}(k-1) > e^{\tau}(k_1 - 1) > 1$$

（不应忘记，我们所研究的是 $\sigma > -1$ 和 $k > k_1 = 2.2\cdots > 2$ 的情况）．这样一来，对于所有满足不等式 $s > s_0$ 和 $\frac{1}{k} < s < 1$ 的 s，都有：

$$0 < \frac{ds'}{ds} < 1 \text{ 和 } \frac{d}{ds}(s' - s) < 0.$$

由此可得结论，如果在区间 $\frac{1}{k} < s < 1$ 上存在有变换 Π 的不动点，则此不动点必然是稳定的，而且是唯一的（在此区间上）．因为在上述 s 变化的区间上，差值 $s' - s$ 为 s 的单调减函数，因此变为零的次数不可能多于 1．由于 $s = 1$ 时 $s' - s < 0$，故只有在条件

$$\sigma > \sigma_1(k)$$

成立时不动点才能存在，此时若 $s = \frac{1}{k}$，则

$$s' - s = (s')_{\tau=\tau_2} - \frac{1}{k} > 0.$$

但如果 $\sigma < \sigma_1(k)$，则当 $s = \frac{1}{k}$（若 $s_0 < \frac{1}{k}$）或 $s = s_0$（若 $\frac{1}{k} < s_0 < 1$）时，差值 $s' - s < 0$，此差值对于所研究区间上的所

有的 s 都是负的，因为在那里 $\frac{d}{ds}(s'-s)<0$[1]. 因此，在这种情况下，变换 Π 在区间 $\frac{1}{k}<s<1$ 上没有不动点.

由此可见，当 $\sigma<-1$ 时，无论在 $k<k_1$ 和 $k>k_1$ 但 $\sigma<\sigma_1(k)$ 时，变换 Π 都没有不动点，而当 $k>k_1$ 和 $\sigma_1(k)<\sigma<-1$ 时，则具有两个不动点（一个稳定不动点在区间 $\frac{1}{k}<s<1$ 上，一个不稳定不动点在区间 $s_0<s<\frac{1}{k}$ 上）.

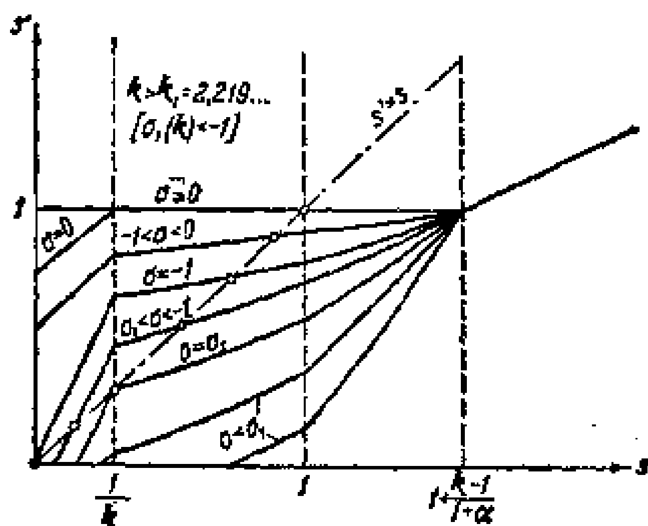


图 591

4. 拉梅尔图. 不连续振动建立的软激和硬激. 上面关于变换 Π 及其不动点所讲的一切，使我们有可能画出拉梅尔图（对应函数在平面 s, s' 上的图象），并借助于它来研究多谐振荡器中可能出现的工作状态. 对应函数 $s'=\Pi(s)$ 对于不同的 σ 值所绘制的曲线族表示在图 591 ($k>k_1=2.22\cdots$) 和图 592 ($k<k_1$) 上（提醒一句，我们所研究的乃是 $k>1+\alpha$ 和 $\beta\gg 1+\alpha, \sigma$ 的情况）.

当 $\sigma>-1$ 时，变换 Π 对于所有的 $s>0$ 都存在，且具有唯一的稳定不动点 $s^*(0<s^*\leqslant 1)$; 不难证实（例如用绘制"拉梅尔

---

1) 我们不研究 $1<s_0<1+\frac{k-1}{1+\alpha}$ 的情况，因为在这种情况下，当 $s<1$ 时变换 Π 不存在，因而没有任何不动点.

梯线”的方法)，系统轨线与半直线 Γ_1 和 Γ_2 的所有交点序列都向此不动点收敛；与此相对应，在相空间中存在有唯一的稳定的不连续极限环，所有其它相轨线都向它趋近($t \to +\infty$ 时)． 这样一来，当 $\sigma > -1$ ($E_g > -u_0$)时，在任何初始条件下，多谐振荡器中都将建立起同一个周期的不连续振动，即出现**不连续振动的软激状态**.

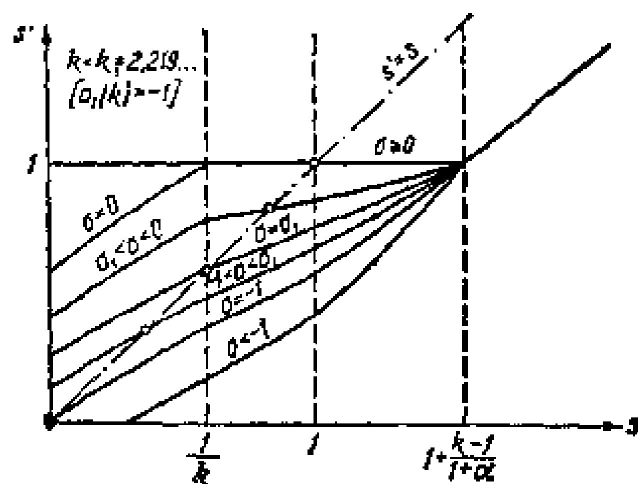


图 592

当 $\sigma < -1$ 时，相空间中有稳定平衡状态，而点变换 Π 则仅当 $s > s_0$ 时才存在($s_0 > 0$，且与 k 和 σ 有关；与 $0 < s < s_0$ 中的点相对应的轨线不能到达“缓慢”运动区域的边界线，而渐近地趋近于平衡状态)．随着 k 和 σ 的不同，可能出现两种情况.

当 $k < k_1$，以及 $k > k_1$ 但 $\sigma < \sigma_1(k) < -1$ 时，变换 Π 没有不动点，对于所有的 $s > s_0$，都有 $s' < s$，因而轨线(在平面 x_1，x_2 上)与半直线 Γ_1 和 Γ_2 的所有交点序列都是有限的，而且最后一个点位于区间 $0 < s < s_0$ 中．因此，在这种情况下，多谐振荡器中(经通有限次不连续振动以后)，将建立起稳定的平衡状态(在任何初始条件下)，即**多谐振荡器中不能出现自振**.

当 $k > k_1 = 2.2\cdots$ 和 $\sigma_1(k) < \sigma < -1$ 时，点变换 Π 有两个不动点 s_1^* 和 s_2^* ($s_0 < s_1^* < \dfrac{1}{k} < s_2^* < 1$)，第一个是不稳定的，第二个是稳定的．与此相对应，在相空间中，除稳定平衡状态外，

尚有两个不连续极限环，一个是稳定的(对应于 $s = s_2^*$)，另一个是不稳定的(对应于 $s = s_1^*$)．不难看出，系统的轨线与半直线 Γ_1 和 Γ_2 的所有交点序列

$$s, s_1, s_2, \cdots,$$

若其起始点 $s > s_1^*$，必向稳定不动点 s_2^* 收敛，而起始点为 $s < s_1^*$ 的序列则是有限的，因为最后一个点 $s_N < s_0$ (例如，用绘制"拉梅尔梯线"的方法就可以证实这一论断)．

由此可见，在这种情况下，因初始条件的不同，或建立起稳定的平衡状态，或建立起稳定的自振状态，即多谐振荡器中出现**不连续自振的硬激状态**[1]．当固定的 $k > k_1$，而 $\sigma_1 = \sigma_1(k) < -1$ 时，我们将得到自振振幅与栅偏压 E_g (与参数 σ) 之间的"迴滞"型关系，这对硬激状态是很典型的．设 σ 由负值 $\sigma < \sigma_1$ 开始足够缓慢地增加．此时，多谐振荡器将处于平衡状态，直到 σ 到达 $\sigma = -1$，从而使平衡状态变为不稳定时为止．当 $\sigma = -1$ 时，多谐振荡器转入自振状态，具有异于零的有限振幅(提醒一句，自振存在于 $\sigma > \sigma_1$ 时)．当栅偏压继续增加时，自振仍然继续存在，且其振幅不断增大．如果现在我们按相反的方向改变栅偏压，即减小参数 σ (仍然是足够缓慢地)，则当 $\sigma > \sigma_1$ 时，自振将继续维持下去(其振幅连续地减小，且当 $\sigma \to \sigma_1 + 0$ 时趋近于不为零的有限值)．当 $\sigma = \sigma_1$ 时自振消失，因为稳定极限环与不稳定极限环合而为一，于是在多谐振荡器中建立起平衡状态[2]．

为了对上面讲过的给以形象的说明，在图 593 上将参数平面划分成若干区域，每一区域对应于多谐振荡器的一定的工作状态．其边界线为直线 $k = 1$, $\sigma = -1$ 和 $\sigma = \sigma_1(k)$ ($\sigma < -1$ 时)[3]．

---

1) 关于多谐振荡器中存在不连续自振的硬激状态，可能是在 B. B. 维特凯维奇(Витkевич)的著作[43]中首先提出的．

2) 参数 σ 的变化速度必须很小，使得多谐振荡器的工作状态在每一瞬间都与 σ 取相应的恒值时的定常状态相差很小，即虽然参数 σ 变化，但却使相点得以保持在稳定平衡状态或稳定不连续极限环的附近．

3) 如前所述，当 $k < 1$ 时，没有不连续自振，在任何初始条件下都将建立起稳定平衡状态．

在图 593 上我们没有把带状平面 $1 < k < 1 + \alpha$ 划分成多谐振荡器的不同工作状态区，因为对这种情况我们没有进行过研究.

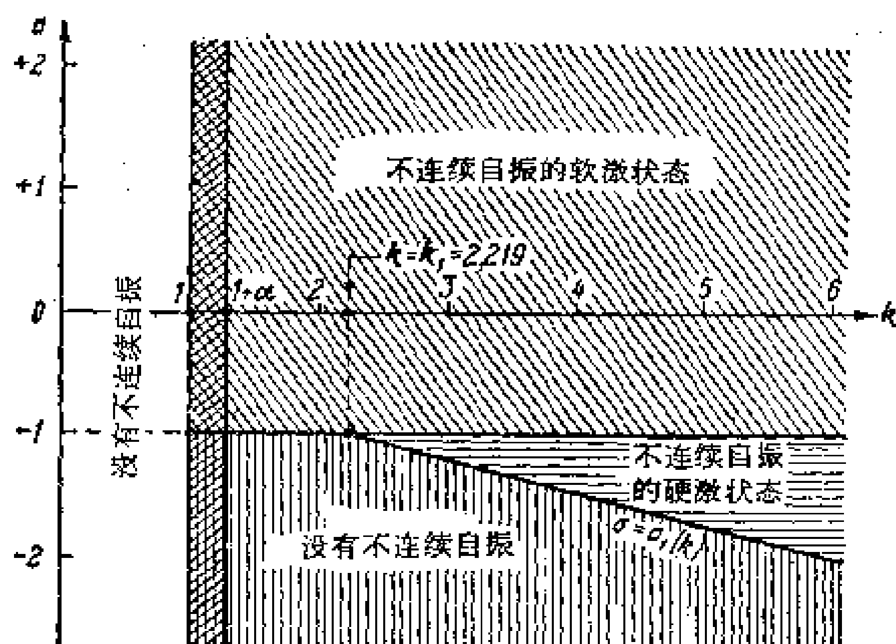


图 593

5. $E_g \geqslant 0$ 时多谐振荡器的自振. $E_g \geqslant 0$ 的情况，从实际应用的观点来看，是十分重要的，下面我们就来计算在此种情况中多谐振荡器的不连续自振周期，并画出电压波形图(和以前一样，仍设条件(10.78)是满足的). 前面已经看到，当 $E_g \geqslant 0(\sigma \geqslant 0)$ 时，多谐振荡器的唯一的平衡状态

$$x_1 = x_2 = \frac{\sigma}{1+\beta} \approx 0$$

是不稳定的，所有轨线都趋近于($t \to +\infty$ 时)唯一的稳定不连续极限环，后者与变换 Π 的唯一的稳定不动点 $s^* \approx 1$ 相对应. 此极限环在平面 x_1, x_2 和 y_1, y_2 上的投影表示在图 594 上. 此极限环由“迅速”运动轨线 A_1A_2 和 $A_1'A_2'$ (这些轨线在平面 y_1, y_2 上的投影是一些点，因为在相点的“迅速”运动过程中，$y_1, y_2 \approx$ 常数)，“半迅速”运动轨线线段 A_2A_3 和 $A_2'A_3'$(相点通过这些线段所需时间，若采用无量纲时间单位，则(量级为 $\dfrac{1+\alpha}{1+\beta} \ll 1$)以及“缓慢”运

动轨线线段 A_3A_1' 和 $A_1'A_1$ 组成[1]。

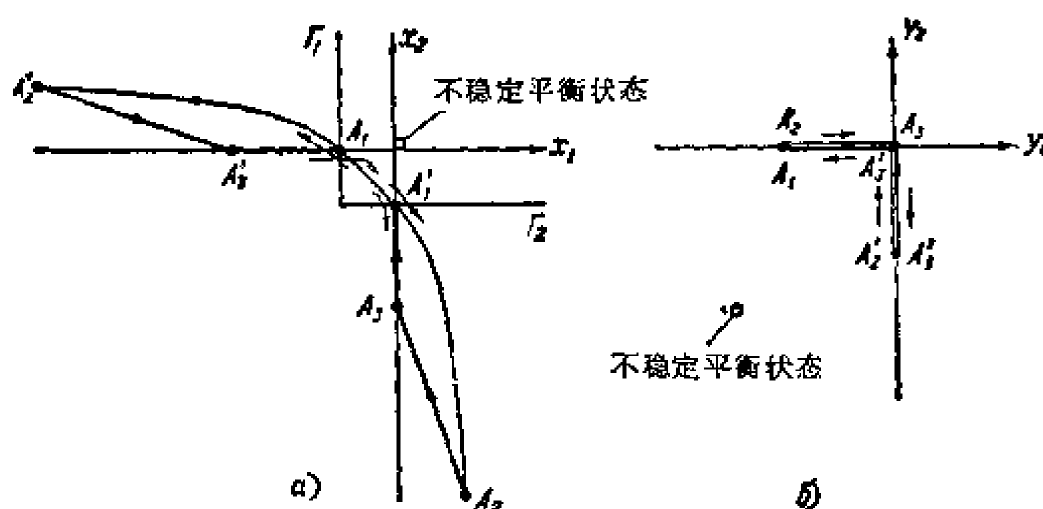


图 594

由于当 $\sigma \geqslant 0$ 时变换 Π 的不动点的坐标 $s^* = 1$（准确到量级为 $\frac{1+\alpha}{1+\beta}$ 和 $\frac{\sigma}{1+\beta}$ 的项），故"迅速"运动轨线 A_1A_2 的起始点 A_1 具有坐标[2]：

$$x_1^{(1)} = -1, \quad x_2^{(1)} = s^* - 1 = 0,$$
$$y_1^{(1)} = -(k-1), \quad y_2^{(1)} = 0;$$

这时，此轨线的终点 A_2 的坐标将根据 $x_1^{(1)}$，$x_2^{(1)}$ 按跳跃条件(10.80)算出为：

$$x_1^{(2)} = \frac{k-1}{1+\alpha}, \quad x_2^{(2)} = -k\frac{k+\alpha}{1+\alpha}, \quad y_1^{(2)} = -(k-1), \quad y_2^{(2)} = 0.$$

对于相点沿轨线 A_1A_2 的"迅速"运动，我们有：$y_1 \equiv y_1^{(1)} = -(k-1)$；$y_2 \equiv y_2^{(1)} = 0$，这时，根据(10.77a)此轨线与 y_1 和 y_2 取相同恒定数值时的其它"迅速"运动轨线都是由下方程组近似地确定的（μ 越小，亦即寄生电容 C_a 和 C_g 与电容 C 相比越小，就越为准确）：

$$\left.\begin{aligned} \mu\dot{x}_1 &= k - 1 - x_1 - \alpha\psi(x_1) - k\varphi(x_2), \\ \mu\dot{x}_2 &= -x_2 - \alpha\psi(x_2) - k\varphi(x_1), \end{aligned}\right\} \qquad (10.94)$$

1）"缓慢"和"半迅速"运动轨线在平面 y_1, y_2 上的投影彼此重合，但为了清楚起见，在图上将它们略微错开了一些。

2）在这里和以后，计算"缓慢"和"半迅速"运动过程中的变量 y_1，y_2 时（例如，对于极限环上的 A_1，A_2 和 A_3 各点），采用(10.75)中的前两个方程。

同时只有在此方程组的平衡状态的微小邻域外部，即其中发生"迅速"运动（$\mu\to+0$ 时 $\dot{x}_1,\ \dot{x}_2\to\infty$）的区域中，上述才成立，或确定于积分曲线的微分方程：

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{-x_2-\alpha\psi(x_2)-k\varphi(x_1)}{k-1-x_1-\alpha\psi(x_1)-k\varphi(x_2)}.\qquad(10.94a)$$

平面 $x_1,\ x_2$ 划分成近似方程组(10.94)的轨线如图595所示．此方程组具有两个平衡状态 A_1 和 A_2：点 $A_1(-1,\ 0)$（跳跃起点）为不稳定的鞍结点型复杂奇点，点 $A_2\left(\frac{k-1}{1+\alpha},\ -k\frac{k+\alpha}{1+\alpha}\right)$——稳定结点，所有"迅速"运动轨线都走向此结点（$y_1\equiv-(k-1)$ 和 $y_2\equiv0$ 时）．由点 A_1（更准确些说，从它的任意小邻域）出发的只有一个相轨线——此奇点的分界线．由本章§3可知，**此分界线恰好是"迅速"运动轨线 A_1A_2，它是不连续极限环的一部分．**

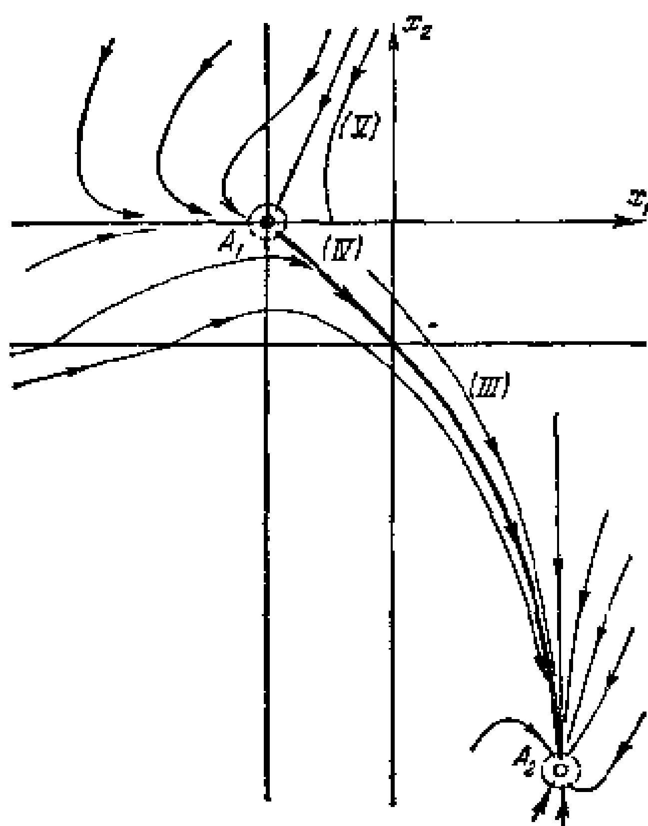


图 595

在正方形(IV)（参看图595）$-1\leqslant x_1\leqslant0,\ -1\leqslant x_2\leqslant0$ 中，"迅速"运动之积分曲线的微分方程（方程(10.94a)）可写成如下形式：

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{x_2+k(x_1+1)}{x_1+1+kx_2},$$

因此，由点 A_1 出发的分界线将为（在正方形(IV)范围内）直线

$$x_2 = -(x_1 + 1)$$

的线段[1]。然后此分界线在点(0,−1)处转入区域(III)：$x_1 \geqslant 0$，$x_2 \leqslant -1$，在此区域中它将决定于此区域之积分曲线的微分方程：

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2 - k(x_1 + 1)}{k - 1 - (1+\alpha)x_1}.$$

若将此方程积分并应用初始条件：$x_1 = 0$ 时 $x_2 = -1$，我们就得到所研究之分界线 A_1A_2（在区域(III)的范围内）的方程：

$$x_2 = -k\frac{k+\alpha}{1+\alpha} - \frac{k}{\alpha}\left(\frac{k-1}{1+\alpha} - x_1\right) + \left[k\frac{k+\alpha}{1+\alpha} + \frac{k}{\alpha}\frac{k-1}{1+\alpha} - 1\right]\left(1 - \frac{1+\alpha}{k-1}x_1\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

按所得方程画出的"迅速"运动轨线 A_1A_2——奇点 A_1 的分界线——如图595和594a所示。

还需指出，根据(10.94)可得出相点由点 A_1 的微小邻域出发向点 A_2 的微小邻域边界作"迅速"的跳跃式的运动时，变量 x_1 和 x_2 与 t 的近似关系。例如，不难证实，相点由点 A_1 的 $O(\sqrt{\mu})$ 邻域的边界运动到点 A_2 的 $O(\sqrt{\mu})$ 邻域的边界所需时间的量级为 $\mu\ln\frac{1}{\mu}$。

相点的"迅速"运动在点 A_2 转变为"半迅速"运动，后者的轨线接近于直线

$$x_2 + kx_1 = \text{常数} = x_2^{(2)} + kx_1^{(2)} = -k;$$

相点沿此轨线经过量级为 $\frac{1+\alpha}{1+\beta}$ 的时间间隔后，到达点 A_3，其坐标为：

$$x_1^{(3)} = 0, \quad x_2^{(3)} = -k,$$
$$y_1^{(3)} = 0, \quad y_2^{(3)} = 0.$$

在这以后相点则沿"缓慢"运动轨线 A_3A_1'：

$$x_1 \equiv 0$$

运动（变量 x_2 的变化速度是与1同阶的）。对于此轨线有

---

1) 渐近地向奇点 A_1 趋近的另一个分界线位于区域(V)：$-1 \leqslant x_1 \leqslant 0$，$x_2 > 0$ 中，它是（在此区域的范围内）直线 $x_2 = \varkappa(x_1 + 1)$ 的线段，其斜率为

$$\varkappa = \frac{\alpha}{2k} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2k}\right)^2 + 1}.$$

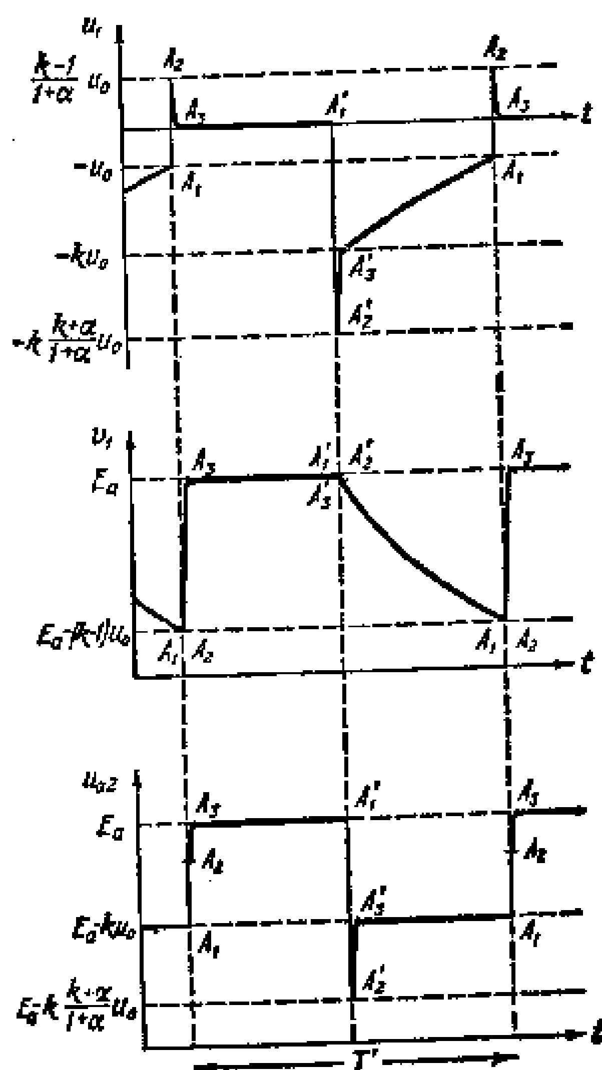


图 596

$$\dot{x}_2 + x_2 = \sigma$$

(参看方程(10.79B)),因而

$$x_2 = \sigma - (k + \sigma)e^{-t}$$

(选择相点位于点 A_3 的瞬时为时间的起点 $t = 0$). 因此，相点经过时间间隔

$$\tau^* = \ln \frac{k + \sigma}{l + \sigma}$$

以后到达半直线 Γ_2 上的点 A_1',并由此重新开始"迅速"运动. 极限环的另一半 $A_1'A_2'A_3'A_1$ 与刚才研究过的一半 $A_1A_2A_3A_1'$ 相对称(在空间 x_1, x_2, y_1, y_2 中关于平面 $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ 对称，而在平面

x_1, x_2 和平面 y_1, y_2 上则关于分角线 $x_1 = x_2$ 和 $y_1 = y_2$ 对称).

多谐振荡器中所发生的自振与相点沿不连续极限环 $A_1A_2A_3A'_1A'_2A'_3A_1$ (图 594) 的运动相对应,因而,知道此极限就不难画出多谐振荡器中的电压波形. 电压 u_1, v_1 和 $u_{a2} = u_1 + v_1$ 的这种波形表示在图 596 上. 自振是对称的,因此,如果忽略"迅速"和"半迅速"运动所需之时间,则在考虑栅流的多谐振荡器中,其不连续自振周期当 $\sigma \geqslant 0$ 时($E_g \geqslant 0$ 时)等于

$$T = 2\tau^* = 2\ln\frac{k+\sigma}{1+\sigma}$$

(采用无量纲时间单位)和

$$T' = 2(R_a + R_g)C\ln\frac{\dfrac{SR_a}{1+R_a/R_g} + \dfrac{E_g}{u_0}}{1+\dfrac{E_g}{u_0}}$$

(采用普通单位).



图 597 不连续极限环的照片(在平面 u_1, u_2 上).
1——"缓慢"运动轨线; 2——"半迅速"运动轨线;
3——"迅速"运动轨线.

在本小节的结尾,我们指出,无论在定性上还是定量上,实验研究都完全证实了这里所提出的理论. 做为例子,在这里我们举出电压 u_1 和 u_2 平面上的不连续极限环的照片(图 597),以及电压 u_1, v_1 和 u_{a2} 的波形照片(图 598),这些照片都是用电子示波器实

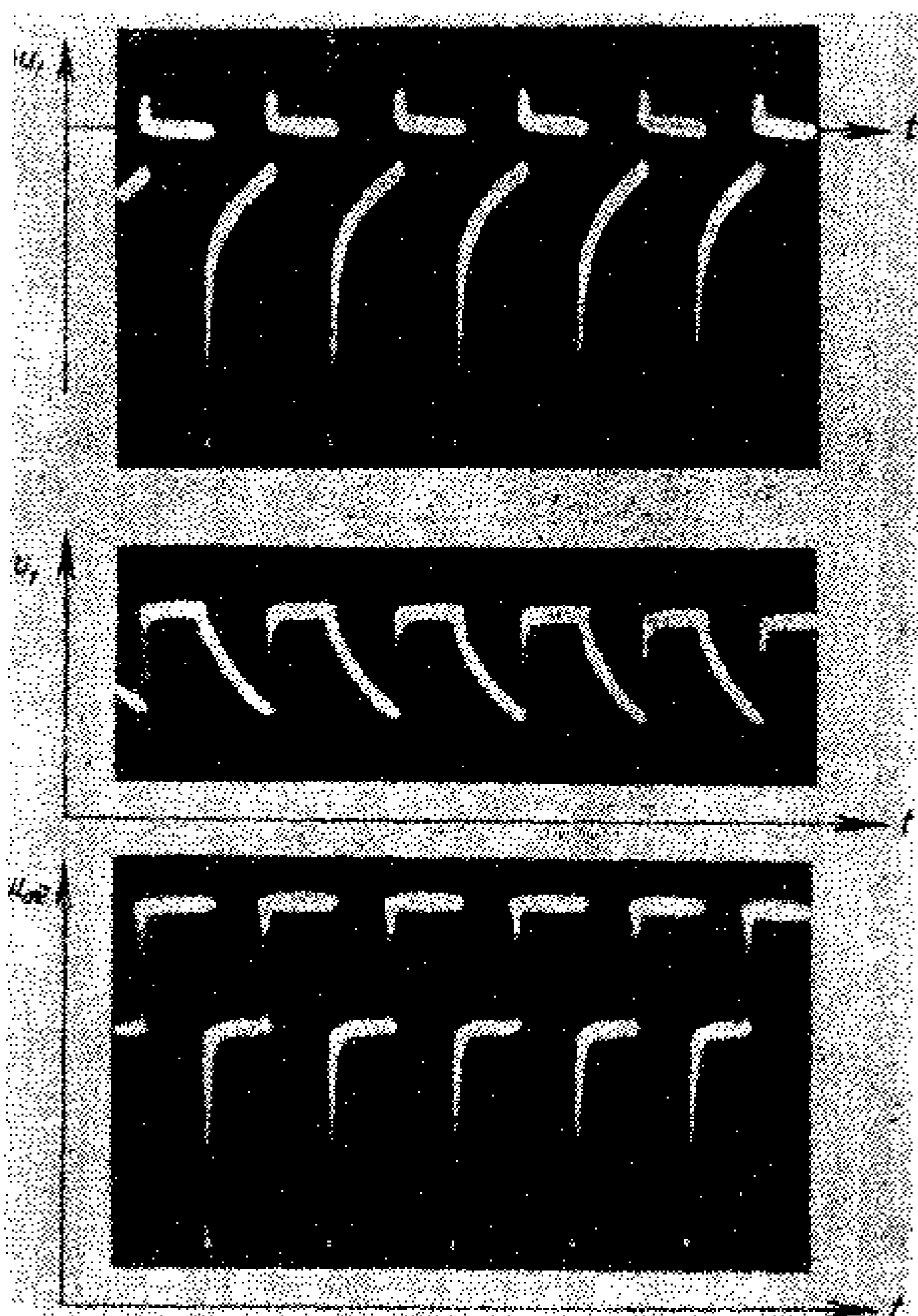


图 598

际摄制的[1]（比较图 594a 及 596）。

1）为了在极限环照片上能看到"迅速"运动线段，在多谐振荡器中电子管的屏极上接入了电容，从而人为地增大了寄生电容，同时在摄制时选择了相当长的曝光时间(由于曝光时间长，照片上的"缓慢"和"半迅速"运动轨线都具有很强的光晕)。

附 录 I

微分方程论的基本定理

在本附录中准备只提出与本书正文中所用微分方程有关的一些基本定理，而不予以证明．这些定理的证明，例如，读者可以在[103, 113, 129]中找到．

设有一微分方程组：

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= P_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, t), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= P_n(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) \end{aligned}\right\} \tag{I.1}$$

(n 为任意整数)，其中函数 $P_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ 定义于某一开区域 R 中，在此区域内连续，并具有对 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的连续偏导数．这一要求，当右端为 $x_1, x_2, \cdots, x_n, t$ 的解析函数时，一定是满足的．

定理 I (解的存在性和唯一性定理)．

在区域 R 中取任何一点 $M_0(t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)$，都存在有包含 t_0 的 t 值区间($t_1 < t < t_2$)，和一个且只有一个函数组

$$x_k = \varphi_k(t) \quad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

此函数组定义于此区间，且满足如下条件：

a) $\varphi_k(t_0) = x_k^0$；

б) 对于所有的 t ($t_1 < t < t_2$)，点 $M[t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)]$ 都属于区域 R；

в) 对于所有的 $t_1 < t < t_2$ 都有 $\dot{\varphi}_k(t) = P_k[t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)]$，即函数组满足微分方程组(I.1)；

г) 取任何一个全部位于区域 R 中的闭区域 $\bar{R}_1$，都能找到这样的数值 t' 和 t'' ($t_1<t'<t_2$, $t_1<t''<t_2$)，而使点 $M_1[t', \varphi_1(t'), \cdots, \varphi_n(t')]$ 和点 $M_2[t'', \varphi_1(t''), \cdots, \varphi_n(t'')]$ 位于 $\bar{R}_1$ 的外部.

可以证实,在定理 I 中所谈到的 t 值区间 $t_1<t<t_2$,由于条件 г)，是"解的最大可能定义区间"，其意思为：不存在这样一个包含区间(t_1, t_2)的 t 值区间(t_1^*, t_2^*)，其中函数 $x_k=\varphi_k^*(t)$ 都有定义，且满足本定理的条件 а)，б) 和 в)，从而在区间(t_1, t_2)上与函数 $x_k=\varphi_k(t)$ 重合.

条件 г) 表述了区间(t_1, t_2)为最大可能区间这样一个事实，也常常将这个条件表述如下:"方程组的解可延拓到区域 R 的边界".

在本书中,方程组 (I.1) 的解永远理解为定义于最大可能 t 值区间上的解. 同时，本书中的解通常对于一切 t 值，亦即，区间 $-\infty<t<+\infty$ 中的 t 值,都有定义.

在空间 $t, x_1, x_2, \cdots x_n$ 中,函数 $x_k=\varphi_k(t)$确定着**积分曲线**. 根据定理 I,在区域 R 中的每一点$M(t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)$都有一个且只能有一个积分曲线通过.

为了用显式表出解与初始值 $t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0$ 有关这一事实，将其写成如下形式:

$$x_k=\varphi_k(t, t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0). \tag{I.2}$$

根据这种写法的含义本身,显然有:

$$\varphi_k(t_0, t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)\equiv x_k^0.$$

如果将 $t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0$ 看做是任意参数（但显然是能使点 $M(t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 位于区域 R 的一些参数值),则函数组(I.2)称为**通解**. 如果 $t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0$ 取固定值,则函数组(I.2)称为特解,或简称为解(因之"解"和特解具有相同的含义). 对于它如下定理成立.

定理 II (解对于初始条件的连续相关定理).

设
$$x_k=\varphi_k(t, t^*, x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$$
是方程组(I.1)的任一解，定义于 $t_1<t<t_2$ 上的一切值，并设 τ_1 和 τ_2 是属于此区间的任意数,且 $\tau_1<\tau_2$. 此时,对于任意的 $\varepsilon>0$，都能指出这样的 $\delta>0$, $\delta=\delta(\varepsilon, \tau_1, \tau_2)$，使得对于所有满足

$$|t_0 - t^*| < \delta, \ |x_i^* - x_i^0| < \delta \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$
的 $t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0$, 解

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)$$

对所有的 $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$ 值都有定义,而且对于所有这些 t 值，都满足不等式:

$$|\varphi_k(t, t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0) - \varphi_k(t, t^*, x_1^*, \cdots, x_n^*)| < \varepsilon.$$

定理 III.

如果方程组(I.1)右端的函数 $P_i(t, x_1, \cdots, x_n)$具有对 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的连续偏导数,则函数

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)(k = 1, 2, \cdots, n)$$

具有对变量 $x_1^0, \cdots, x_n^0$ 的连续偏导数[1]. 这些偏导数和函数 φ_k 本身共同满足如下形式的微分方程组,即:

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = P_k(t, \varphi_1, \cdots, \varphi_n),$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i^0} = \frac{\partial P_k}{\partial\varphi_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i^0} + \cdots + \frac{\partial P_k}{\partial\varphi_n}\cdot\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i^0},$$

$$i = 1, 2, \cdots, n; \ k = 1, 2\cdots, n.$$

当方程组(I.1)的右端为其变量的解析函数时,则下定理成立.

定理 IV.

如果函数 $P_k(t, x_1, \cdots, x_n)$ 为变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的解析函数,则函数

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)$$

在任何一组数值的邻域内(只要对于这些数值有定义), 都是其变量的解析函数.

定理 I—IV, 特别地被用来研究后继函数. 若注意一下后继函数的构成方法, 则不难看出, 当动力学方程组右端为解析函数时, 根据定理 IV, 后继函数也必然是解析函数. 当右端具有对 x

---

1) 如果方程组(I.1)的右端对于 x_i 具有直到 $k\geqslant 1$ 阶的连续偏导数,则此方程组的解对于 x_i^0 也同样具有直到 $k\geqslant 1$ 阶的连续偏导数. 但 $k>1$ 的情况本书中并未用到.

和 y 的连续导数时，由定理 I，II 和 III 可知，后继函数连续并具有连续导数(参看第五章 § 7)。

设与方程组(I.1)

$$\frac{dx_k}{dt}=P_k(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

同时，我们研究"变更"方程组：

$$\frac{dx_k}{dt}=P_k(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)+p_k(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$$

$$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{I.3}$$

其中函数 $p_k(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 与函数 P_k 定义于同一区域 R 中，且在此区域中连续并具有对变量 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 的连续偏导数。

特例地，我们设给定之方程组的右端与某一参数 μ 有关，即方程组具有如下形式：

$$\frac{dx_k}{dt}=P_k(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n,\ \mu)(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{I.4}$$

假定我们在 μ 取某一特定值 $\mu=\mu_0$ 时，研究这一方程组，即研究方程组

$$\frac{dx_k}{dt}=P_k(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n,\ \mu_0)(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{I.5}$$

与此同时，对方程组 (I.4) 在 μ 取任一不等于 μ_0 的数值时进行研究。在这种情况下，可以认为方程组(I.4)在 $\mu\neq\mu_0$ 时为方程组(I.5)的变更方程，并可假定方程组(I.4)具有如下形式：

$$\frac{dx_k}{dt}=P_k(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n,\ \mu_0)+p_k(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n),$$

其中

$$p_k(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)=P_k(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n,\ \mu)-P_k(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n,\ \mu_0).$$

定理 V (解对于右端及初始值的变化的连续相关定理).

设

$$x_k=\varphi_k(t,\ t_0,\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0)\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

为方程组(I.1)的解，对于区间

$$t_1 < t < t_2 \quad (t_1 < t_0 < t_2)$$
的所有 t 值均有定义，并设 τ_1 及 τ_2 为此区间中满足不等式 $t_1 < \tau_1 < t_0 < \tau_2 < t_2$ 的任意两个数. 此时,对于任意 $\varepsilon > 0$, 都存在这样的 $\delta > 0$, 使得在区域 R 中满足条件
$$|p_k(t, x_1, \cdots, x_n)| < \delta \quad (k = 1, 2, \cdots, n),$$
且有
$$|x_i^0 - x_i^*| < \delta \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$
时,方程组(I.3)的对应初始值 $t_0, x_1^*, \cdots, x_n^*$ 的解
$$x_k = \varphi_k^*(t, t_0, x_1^*, \cdots, x_n^*),$$
对于 $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$ 中的所有 t 值均有定义,且对于所有这些 t 值,均满足不等式
$$|\varphi_k^*(t, t_0, x_1^*, \cdots, x_n^*) - \varphi_k(t, t_0, x^0, \cdots, x_n^0)| < \varepsilon$$
$$(k = 1, 2, \cdots, n).$$

推论. 若所研究之方程组(I.4)的右端为参数 μ 的连续函数,则在此方程组的解
$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0, \mu)$$
中,函数 $\varphi_k(t, t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0, \mu)$ 亦为 μ 的连续函数.

我们假设函数 $P_k(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 及 $P_k(t, x_1, \cdots, x_n) + p_k(t, x_1, \cdots, x_n)$ 具有对 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的连续偏导数. 此时根据定理 III,在方程组(I.1)的解以及方程组(I.3)的解中,函数 $\varphi_k(t, t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 及 $\varphi_k^*(t, t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 具有对 $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$ 的偏导数:
$$\frac{\partial\varphi(t, t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)}{\partial x_i^0} \text{ 及 } \frac{\partial\varphi^*(t, t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)}{\partial x_i^0}.$$

设方程组(I.1)的解对于 t 值: $t_1 < t < t_2$ 有定义,并设 τ_1 和 τ_2 为满足不等式 $t_1 < \tau_1 < \tau_2 < t_2$ 的任意两个数. 此时将有如下定理成立.

定理 VI.

对于任意 $\varepsilon > 0$, 都存在这样的 $\delta > 0$, 使得在区域 R 中,若有

$$|p_k(t, x_1, \cdots, x_n)| < \delta, \quad \left|\frac{\partial p_k(t, x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_i}\right| < \delta,$$

$$|x_i^0 - x_i^*| < \delta \ (k = 1, 2, \cdots, n; \ i = 1, 2, \cdots, n),$$

则方程组(1.3)的解

$$x = \varphi^*(t, t_0, x_1^*, \cdots, x_n^*)$$

对于区间 $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$ 中的所有 t 值均有定义,且对于所有这些 t 值,不等式

$$\left|\frac{\partial \varphi(t, t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)}{\partial x_i^0} - \frac{\partial \varphi^*(t, t_0, x_1^*, \cdots, x_n^*)}{\partial x_i^*}\right| < \varepsilon$$

成立. 若所研究之动力学方程组的右端 $P_k(t, x_1, \cdots, x_n, \mu)$和导数 $\frac{\partial P_k(t, x_1, \cdots, x_n, \mu)}{\partial x_i}$ 均为 μ 的连续函数,且 $x_k = \varphi_k(t, x_1^0, \cdots, x_n^0, \mu)$为此方程组的解,则导数

$$\frac{\partial \varphi_k(t, x_1^0, \cdots, x_n^0, \mu)}{\partial x_k^0}$$

亦为 μ 的连续函数.

我们再来研究一种情况,这就是方程组

$$\frac{dx_k}{dt} = P_k(t, x_1, \cdots, x_n, \mu)$$

的右端为所有变量的解析函数的情况. 对于此种方程组, 有如下定理成立.

定理VII.

若函数 $P_k(t, x_1, \cdots, x_n, \mu)$ 为其变量的解析函数,则函数

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0, \mu)$$

在使其有定义的任何一组数值 $t, t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0$ 的邻域内, 亦为其所有变量的解析函数.

推论. 假设满足数值 $t_0, x_1^*, \cdots, x_n^*, \mu^*$ 的解

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^*, \cdots, x_n^*, \mu^*)$$

对于区间 $t_1 < t < t_2$ 中的所有 t 值均有定义, 并令 τ_1 及 τ_2 为满足 $t_1 < \tau_1 < \tau_2 < t_2$ 的两个任意数值,此时,函数

$$x_k = \varphi_k(t, t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0, \mu)$$

可按$(x_i^0 - x_i^*)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$展开成幂级数，此级数对于所有满足不等式

$$\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2, \quad |\mu - \mu^*| < \delta \tag{I.6}$$

的 t 值和 μ 值，以及所有的

$$|x_i^0 - x_i^*| < h_0,$$

都是收敛的，其中 h_0 为一常量，与满足不等式(I.6)的 t 值和 μ 值的选择无关。这时这些级数的系数对于所有位于区间

$$|\mu - \mu^*| < \delta$$

中的 μ 值，都是 μ 的解析函数。

附 录 II

利用电子示波器对相空间的轨线划分的实验研究

通过分析相空间的轨线划分的方法，来研究这种或那种系统中的振动过程，不仅是理论(数学)的方法，而且也是实验的方法．利用电子示波器不仅可以观察振动波形，而且还可以观察相点在相平面上的运动．为此，可在示波管的一对偏转板上加以(直接或通过相应的放大器)正比于变量 x 的电压(例如，电子管振荡器振荡回路的电容电压)，而在另一对偏转板上则加以正比于变量 y 的电压（例如与振荡回路中的电流强度成正比的电压)．这样一来，光点在示波器光屏上的位置，将准确地对应于相点在相平面上的位置．如果系统状态发生变化，则光点在光屏上的位置也将以相应的方式发生变化，于是光点在光屏上将画出满足给定初始条件的相轨线(更正确些，正半轨线)．如果示波管具有长余辉的光屏，此轨线可以摄制下来，或用肉眼进行观察．

如果所采用的示波器具有短余辉的光屏，那么为了获得可用肉眼观察到的相轨线，就必须使相轨线的同一线段在示波器的光屏上多次扫描，且应具有足够的频率(每秒不少于 10—15 次)．在某些情况中，这一条件很自然就可以得到满足，例如，当我们观察周期过程时就是这样．此时，相点(光屏上的光点)一次又一次地返回原出发点，从而扫描出同一个闭曲线——极限环．由此可见，借助于电子示波器，可以直接再现相平面上的极限环．然而，使我们感兴趣的是，如何在示波器的光屏上获得整个相图，它不仅包括极限环，而且还包括不对应于周期运动的其它相轨线．为此就必须采取某种特别的装置，来保证相点能返回原出发位置．这一装置

必须在"代表点"扫描完整个光屏或到达定态状态之后，能使其重新返回原始位置；为此须使系统返回原来的初始条件.

做为例子，我们来描述一下 B. 包伏舍维洛夫(Бовшеверов)[140]为绘制电子管振荡器的"相图"而设计的一种电路，如图 599 所示. 在振荡器振荡回路的电容支路上串入一不大的电阻 R_2，其上的电压(与电容支路的电流成正比)加到示波管的一对偏转板上. 在示波管的另一对偏转板上，加上电容器 C 上的电压 u(经过高阻电位器 R_1). 电阻 R_1 应选得充分大而电阻 R_2 充分小，使得它们对振荡回路中的振动的衰减无显著影响，即对振荡回路的影响可忽略不计.

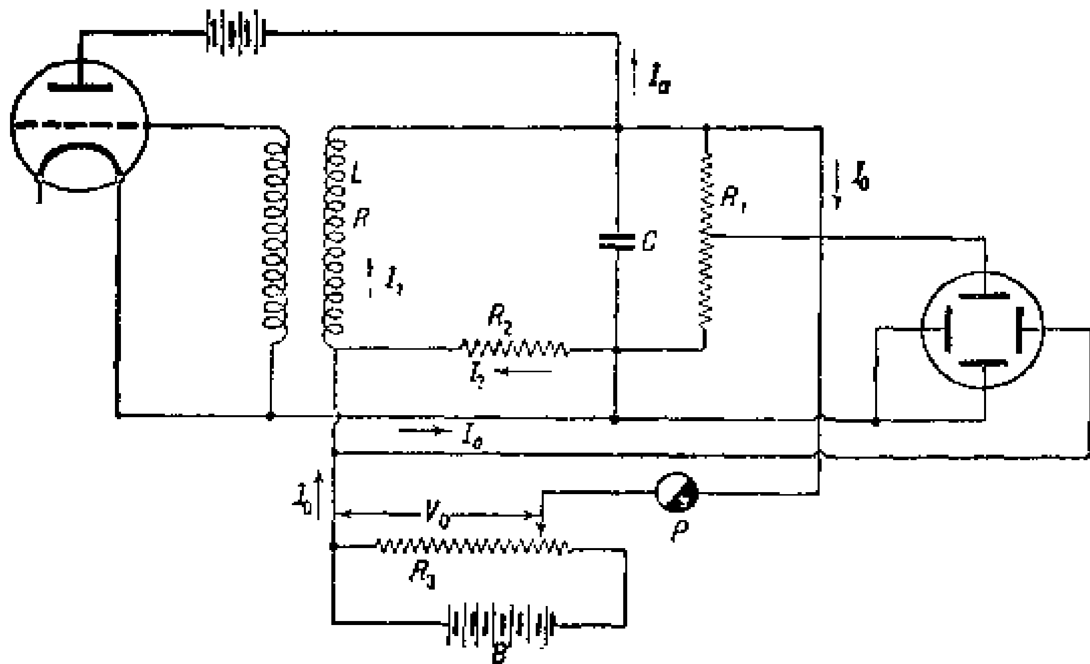


图 599

为了建立各种不同的初始条件，在振荡回路上并联一低阻电位器 R_3，后者与电池组 B 相联. 电位器与振荡回路联结时通过一开关 P，此开关周期地将电路断开一不长的时间间隔. 当开关闭合时，小电阻 R_3 强烈地使回路分路，这就使得回路甚至在最强的反馈下，也是非振荡的衰减回路. 在开关闭合这段时间内，回路中得以建立起常值电流，电容器 C 上的电压也达到常值. 在电路中

所建立的电流值和电压值与电位器 R_3 的输出电压 V_0 有关. 这些常值可以准确确定出，但如果应用电感线圈电阻 $R_4 \ll R_1$，以及 $R_2 \ll R_1$ 这两个条件，则特别容易求出其近似值. 根据这两个关系式，由电位器发出的电流 I_0 几乎全部流过电感线圈 L. 对于电子管屏流 I_a 来说，情况也完全相同. 因此，$I_2 \ll I_0$，从而线圈之电感支路中的电流强度 $I_1 \approx I_0 + I_a$. 另一方面,在电阻 R_1 和 R_2 支路中,电压 V_0 几乎全部落在电阻 R_1 上. 这说明,近似地有电容电压 $U_0 \approx V_0 = R_4(I_0 + I_a)$.

在开关 P 断开的瞬时,发生如下过程：电流 I_0 的电路断开，但 I_1——电感电路电流——不能突变. 因此，在电阻 R_2 的电路中，电流必须由零突变到 I_0,因为只有满足此条件时,才能使电流 I_1 在开关断开时不致发生变化. 电容电压不能突变，保持原来的数值(约等于 V_0). 这样，在初始瞬时(开关 P 刚刚断开后)电容电压等于 V_0，而电容支路中所流过的电流则为 $I_0 = \dfrac{V_0}{R_4} - I_a$. 由于开关断开时,与回路相并联的小电阻 R_3 断开,故在这以后,电路中则发生决定于初始条件的过程，于是在示波器的光屏上将得到电子管振荡器的相应正轨线的弧线. 开关 P 的接通将小电阻 R_3 重新并联到振荡回路上，于是系统异常迅速地返回到初始状态($u = V_0$, $i = I_0$). 开关断开时,过程将从同一初始条件再行开始,这样一直重复下去. 在示波器的光屏上，“代表点”几乎瞬时地返回到初始位置,开关 P 断开后重新画出同一个相轨线,如此等等[1]. 改变 V_0 就可以改变初始条件,从而在示波器的光屏上,获得各种不同相轨线的影象.

用上述方法曾摄下电子管振荡器的“相图”,如图 600 所示,这些照片[2]对应于硬激电子管振荡器的四个不同的反馈值. 在图601

---

1) 为使电阻 R_3 电路的闭合与断开做周期性的重复,可采用圆形开关，并由电动机带动做均匀旋转,或采用快动继电器（例如极化继电器),其线圈由适当频率(音频)的交流电压供电.

2) 在这里举出的所有照片上,“代表点”均沿逆时针方向运动.

上用相应的字母表示出了这些反馈值． 图 600a 为无反馈时的相图——衰减较大的振动系统的一般相图． 图 600б 所对应的反馈值尚未达到临界值．此相图的形状与第一种情况相同，这种相图是衰减较小(其所以较小是因为有反馈的缘故)的振动系统所特有

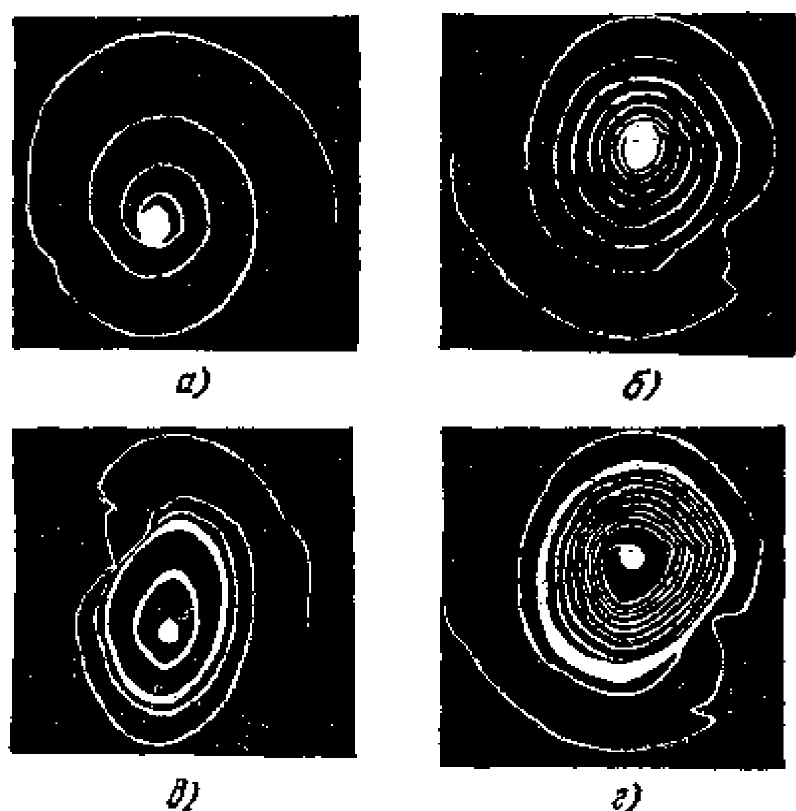


图 600

的． 图 600в 所示电子管振荡器相图，其反馈超过临界值，但尚未引起自激． 相图具有两个极限环，外部是稳定极限环，内部为不稳定极限环． 为了摄下不稳定极限环，采用了如下方法． 选取初始值时，应使与其相对应的点，恰好位于不稳定的极限环上．由于在不稳定极限环附近，相轨线非常缓慢地离开它，故在一次运动的时间内(开关 P 处于断开状态的时间内)代表点还来不及显著地离开极限环．结果在照片上便得出不稳定极限环的影象．必须指出的是，图 600в 上的照片(以及图 600г 上的照片也是一样)，实际上都是两个照片合制而成的，各自对应于振荡器的两个不同初始状态：其一位于稳定极限环外部，另一个恰好在不稳定极限环上．

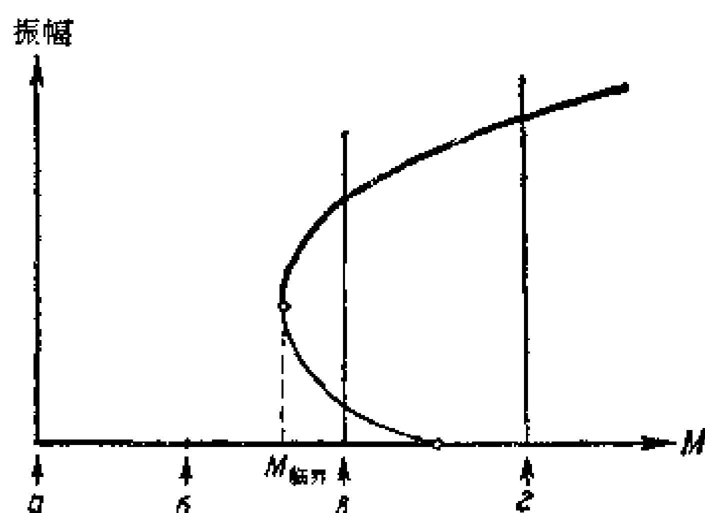


图 601

图 600г 对应于很强的反馈，在这种反馈下，振荡器发生自激，因而在相平面上只有唯一的而且是稳定的极限环. 这一相图，与前一个一样，也是两次摄制的，即摄制两个相轨线：其一由极限环外部开始，另一个则由其内部开始.

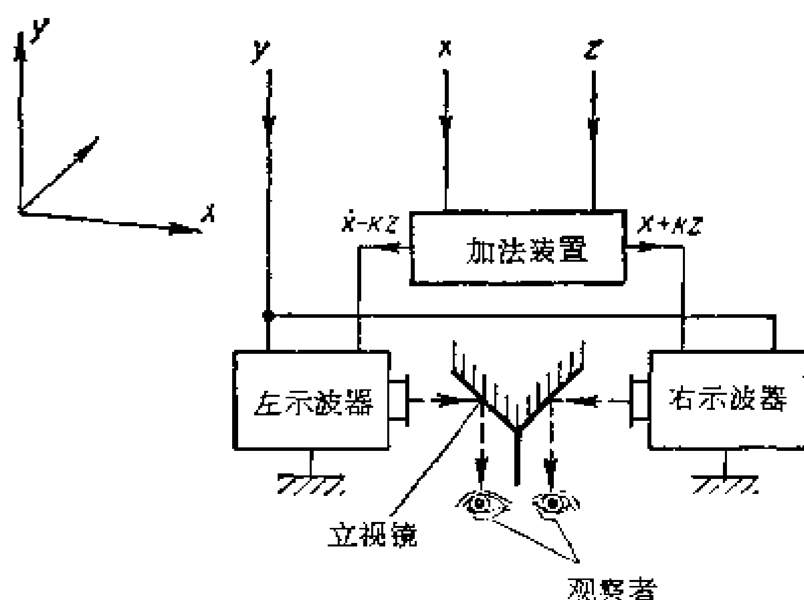


图 602

三维空间中的相轨线可用两个示波器和立视镜进行观察. 此种装置的方块图表示在图 602 上. 将正比于三维相空间坐标 x, y, z 的电压，由被研究的系统，加到简单的加法装置和两个示波

器上；与坐标 y 成正比的电压直接加到两个示波器上——加到示波管的铅垂向偏转板上，而与坐标 x，z 成正比的电压则加到加法装置上，在它的一个输出端上，可获得与 $x-kz$ 成正比的电压，在另一个输出端上则得出与 $x+kz$ 成正比的电压。由加法装置的输出端所获得的电压，分别加到左右两示波器的水平向偏转板上．结果在示波器的光屏上便分别得出相轨线对于左右两眼所投影的形象，若通过立视镜同时对其进行观察，即可看到成立体形的相轨线（由于立体效应）．为了多次重复给定相同的初始条件，在被研究的系统中采用了断续器，与前面所述包伏含维洛夫所用的相类似[1]．

1）这种装置曾于1952年，在高尔基大学振动理论教研室（由应届毕业生德尼索夫（Г. Г. Денисов））作出．需要指出的是，所采用的坐标线性变换没有考虑到，物体离开观察者越远物体角尺寸越小，因而在这种装置中观察到的相轨线的透视图有某些畸变．

附 录 III

某些三角公式

$$\sin^2 z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2z.$$

$$\sin^3 z = \frac{3}{4}\sin z - \frac{1}{4}\sin 3z.$$

$$\sin^4 z = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2z + \frac{1}{8}\cos 4z.$$

$$\sin^5 z = \frac{5}{8}\sin z - \frac{5}{16}\sin 3z + \frac{1}{16}\sin 5z.$$

$$\sin^6 z = \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cos 2z + \frac{3}{16}\cos 4z - \frac{1}{32}\cos 6z.$$

* * *

$$\cos^2 z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2z.$$

$$\cos^3 z = \frac{3}{4}\cos z + \frac{1}{4}\cos 3z.$$

$$\cos^4 z = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2z + \frac{1}{8}\cos 4z.$$

$$\cos^5 z = \frac{5}{8}\cos z + \frac{5}{16}\cos 3z + \frac{1}{16}\cos 5z$$

$$\cos^6 z = \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos 2z + \frac{3}{16}\cos 4z + \frac{1}{32}\cos 6z.$$

* * *

$$\sin^2 z\cos z = \frac{1}{4}\cos z - \frac{1}{4}\cos 3z.$$

$$\cos^2 z \sin z = \frac{1}{4}\sin z + \frac{1}{4}\sin 3z.$$

（$\cos^2 z \sin z$， $\sin^2 z \cos z$ 型表达式可由上述 $\sin^3 z$ 和 $\cos^3 z$ 的公式中，通过简单的微分得出．）

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)].$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)].$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)].$$

*　　*　　*

下面再引出一个计算 $\sin^m z$ 和 $\cos^m z$ 的平均值的递归公式．令

$$A_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^m z dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^m z dz;$$

此时，

$$A_{m+2} = \frac{m+1}{m+2}A_m.$$

由于 $A_0 = 1$ 和 $A_1 = 0$，故 $A_3 = A_5 = A_7 = \cdots = 0$ 以及

$$A_2 = \frac{1}{2},\quad A_4 = \frac{3}{8},\quad A_6 = \frac{5}{16},\quad A_8 = \frac{35}{128},\cdots$$

参 考 文 献

[1] Айзерман М. А. Введение в динамику автоматического регулирования двигателей. Машгиз, 1950.

[2] Айзерман М. А. Физические основы применения методов малого параметра к решению нелинейных задач теории автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика 14, 597 (1953).

[3] Андронов А. А. Предельные циклы Пуанкаре и теория автоколебаний. Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 41. Изд. АН СССР, 1956.

[4] Андронов А. А. Математические проблемы теории автоколебаний. Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 85. Изд. АН СССР, 1956.

[5] Андронов А. А. Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний. Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 32. Изд. АН СССР, 1956.

[6] Андронов А. А., Витт А. А. Разрывные периодические решения и теория мультивибратора Абрагама и Блоха. ДАН СССР 8, 189 (1930); Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 65. Изд. АН СССР. 1956.

[7] Андронов А. А., Витт А. А. К теории захватывания Ван-дер-Поля. Arch. f. Elektrotech. 24, 99 (1930); Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 51. Изд. АН СССР, 1956.

[8] Андронов А. А., Витт А. А. Об устойчивости по Ляпунову. ЖЭТФ 3, 373 (1933); Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 140. Изд. АН СССР, 1956.

[9] Андронов А. А., Вознесенский И. Н. О работах Д. К. Максвелла, И. А. Вышнеградского и А. Стодолы в области теории регулирования машин. Сб. «Д. К. Максвелл, И. А. Вышнеградский, А. Стодола. Теория автоматического регулирования (классики науки)». Изд. АН СССР, 1949; Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 490. Изд. АН СССР, 1956.

[10] Андронов А. А., Леонтович Е. А. К теории изменений качественной структуры разбиения плоскости на траектории. ДАН СССР 21, 427 (1938); Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 217. Изд. АН СССР, 1956.

[11] Андронов А. А., Леонтович Е. А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра. Уч. зап. ГГУ, стр. 3 (1939); Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 188. Изд. АН СССР, 1956.

[12] Андронов А. А., Леонтович Е. А. Рождение предельных циклов из негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла. ДАН СССР 99, 885 (1954).

[13] Андронов А. А., Леонтович Е. А. Рождение предельных циклов из

негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла. Матем. сб. **40**, 179 (1956).

[14] Андронов А. А., Любина А. Г. Применение теории Пуанкаре о «точках бифуркаций» и «смене устойчивости» к простейшим автоколебательным системам. ЖЭТФ **5**, вып. 3—4 (1935); Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 125. Изд. АН СССР, 1956.

[15] Андронов А. А., Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. Новые исследования в области нелинейных колебаний. Радиоиздат, 1936; Physics of the USSR **11**, № 2—3, 1 (1935).

[16] Андронов А. А., Неймарк Ю. И. О движениях идеальной модели часов, имеющей две степени свободы. Модель догалилеевых часов. ДАН СССР **51**, 17 (1946); Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 313. Изд. АН СССР, 1956.

[17] Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы. ДАН СССР **14**, 247 (1937); Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 181. Изд. АН СССР, 1956.

[18] Баркгаузен Г. Г. Катодные лампы, т. II, 1928.

[19] Баутин Н. Н. К теории синхронизации. ЖТФ **9**, 510 (1939).

[20] Баутин Н. Н. Об одном случае негармонических колебаний. Уч. зап. ГГУ **12**, 231 (1939).

[21] Баутин Н. Н. Об одном дифференциальном уравнении, имеющем предельный цикл. ЖТФ **9**, 601 (1939).

[22] Баутин Н. Н. О движении идеальной модели часов, имеющей две степени свободы. Модель часов Галилея—Гюйгенса. ДАН СССР **61**, 17 (1948).

[23] Баутин Н. Н. О задаче Мандельштама в теории часов. ДАН СССР **65**, 279 (1949).

[24] Баутин Н. Н. Динамичеткая модель хронометрового хода Инж. сб. АН СССР **12**, 3 (1952).

[25] Баутин Н. Н. Динамическая модель часового хода без собственного периода. Инж. сб. АН СССР **16**, 3 (1953).

[26] Баутин Н. Н. О периодических решениях одной системы дифференциальных уравнений. ПММ **18**, 128 (1954).

[27] Баутин Н. Н. Динамическая теория часовых ходов без конструктивной остановки ходового колеса. Инж. сб. АН СССР **21**, 3 (1955).

[28] Баутин Н. Н. Динамические модели свободных часовых ходов. Сб. памяти А. А. Андронова, стр. 109. Изд. АН СССР, 1955.

[29] Безменов А. Е. Методы Баркгаузена-Мёллера с точки зрения строгой теории автоколебаний. ЖТФ **6**, 467 (1936).

[30] Безменов А. Е. Теория диаграмм срыва Рукопа. Электросвязь, № 4, стр. 13 (1938).

[31] Белюстина Л. Н. Определение качественной структуры разбиения на траектории фазовой плоскости грубой системы. (*Готовится к печати.*)

[32] Бендриков Г. А., Горелик Г. С. Применение Брауновской трубки

к исследованию движения изображающей точки на плоскости переменных Ван-дер-Поля. ЖТФ 5, 620 (1935).
[33] Бессонов Л. А. Электрические цепи со сталью. Госэнергоиздат, 1948.
[34] Биркгоф Д. Д. Динамические системы. М.—Л., 1941.
[35] Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Изд. АН УССР, 1945.
[36] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1955.
[37] Бремзен А. С., Файнберг И. С. Анализ работы двух связанных релаксационных генераторов. ЖТФ 11, 959 (1941).
[38] Булгаков Б. В. О применении метода Пуанкаре к свободным псевдолинейным колебательным системам. ПММ 6, 263 (1942).
[39] Булгаков Б. В. О применении метода Ван-дер-Поля к псевдолинейным колебаниям системы с многими степенями свободы. ПММ 6, 395 (1942).
[40] Булгаков Б. В. Автоколебания регулируемых систем. ПММ 7, 97 (1943).
[41] Булгаков Б. В. Колебания. Гостехиздат, 1954.
[42] Васильева А. Б. О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры. Матем. сб. 31 (73). 587 (1952).
[43] Виткевич В. В. «Жесткий» режим самовозбуждения релаксационного генератора (мультивибратора). ЖТФ 16, вып. 3, 309 (1946).
[44] Власов Н. П. Автоколебательная система с однофазным асинхронным мотором. ЖТФ 5, 641 (1935).
[45] Гаузе Г. Ф., Витт А. А. О периодических колебаниях численности популяции. Изд. АН СССР, сер. 7, 1551 (1934).
[46] Гольдфарб Л. С. О некоторых нелинейностях в системах регулирования. Автоматика и телемеханика 8, 347 (1947).
[47] Гольдфарб Л. С. Метод исследования нелинейных систем регулирования, основанный на принципе гармонического баланса. Сб. «Теория автоматического регулирования». Машгиз, 1951.
[48] Горелик Г., Кузовкин В., Секерская В. Исследование прерывистой генерации. Техника радио и слабых токов 11, 629 (1932).
[49] Градштейн И. С. Нелинейные дифференциальные уравнения с малыми множителями при некоторых производных. ДАН СССР 66, 789 (1949).
[50] Градштейн И. С. Дифференциальные уравнения, в которые множителями входят различные степени малого параметра. ДАН СССР 82, 5 (1952).
[51] Грановский В. Л., Электрический ток в газе, т. I. Гостехиздат, 1952.
[52] Дородницын А. А. Асимптотическое решение уравнений Ван-дер-Поля. ПММ 11, 313 (1947).
[53] Евтянов С. И. Теория автогенератора с гридликом. Электросвязь, № 9, 66 (1940).
[54] Жевакин С. А. К теории звездной переменности. ДАН СССР 99,

217 (1954).

[55] Жевакин С. А. О сдвигах фаз между колебаниями блеска и колебаниями лучевой скорости переменных звезд. ДАН СССР **99**, 353 (1954).

[56] Жевакин С. А. Об автоколебаниях переменных звезд «большой последовательности». Сб. памяти А. А. Андронова, стр. 629. Изд. АН СССР, 1955.

[57] Железнов Н. А. Самомодуляция автоколебаний лампового генератора с автоматическим смещением в цепи катода. ЖТФ **13**, 495 (1948).

[58] Железцов Н. А. К теории симметричного мультивибратора. ЖТФ **20**, 778 (1950).

[59] Железцов Н. А. К теории лампового генератора с двухзвенной *RC*-цепочкой. Труды Горьковского физико-технического института и радиофизического факультета ГГУ **35**, 220, Москва—Горький, 1957.

[60] Железцов Н. А. К теории разрывных колебаний в системах второго порядка. Радиофизика **1**, № 1 (1958).

[61] Железцов Н. А., Родыгин Л. В. К теории симметричного мультивибратора. ДАН СССР **81**, 391 (1951).

[62] Железцов Н. А., Фейгин М. И. О режимах работы симметричного мультивибратора. Радиотехника и электроника **2**, 751 (1957).

[63] Жуковский Н. Е. О движении маятника с трением в точке подвеса. Соб. соч., т. 1, стр. 290. Гостехиздат, 1948.

[64] Жуковский Н. Е. О парении птиц. Труды отделения физич. наук Общества любителей естествознания **4**, вып. 2, 29 (1891); Собр. соч., т. 4, стр. 5. Гостехиздат, 1949.

[65] Ицхоки Я. С. Импульсная техника. Советское радио, 1949.

[66] Казакевич В. В. О приближенном решении уравнения Ван-дер-Поля. ДАН СССР **49**, 424 (1945).

[67] Казакевич В. В. Многократные системы и простейшие динамические модели часов. ДАН СССР **74**, 665 (1950).

[68] Кайдановский Н. Л. Природа механических автоколебаний, возникающих при сухом трении. ЖТФ **19**, вып. 9 (1949).

[69] Кайдановский Н. Л., Хайкин С. Э. Механические релаксационные колебания. ЖТФ **3**, вып. 1 (1933).

[70] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. ИЛ, 1950.

[71] Капчинский И. М. Методы теории колебаний в радиотехнике. Госэнергоиздат, 1954.

[72] Карман Т., Био М. Математические методы в инженерном деле. Гостехиздат, 1948.

[73] Кобзарев Ю. Б. Устойчивость частоты автоколебательной системы. Сб. «Первая Всесоюзная конференция по колебаниям», т. 1, стр. 5, Москва, 1933.

[74] Кобзарев Ю. Б. О квазилинейном методе трактовки явлений в ламповом генераторе (почти синусоидальных колебаний). ЖТФ **5**, 216

(1935).
[75] Колмогоров А. Н. Аналитические методы теории вероятностей. УМН, вып. 5, стр. 5 (1938).
[76] Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. Изд. АН СССР, 1933.
[77] Крылов А. Н. О применении способа последовательных приближений к нахождению решения некоторых дифференциальных уравнений колебательного движения. Изв. АН СССР, стр. 1 (1933).
[78] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Новые методы нелинейной механики в их применении к изучению работы электронных генераторов, ч. 1. ОНТИ, 1934.
[79] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Изд. АН УССР, 1937.
[80] Леонтович Е. А., Майер А. Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории. ДАН СССР 14, 251 (1937).
[81] Леонтович Е. А., Майер А. Г. Общая качественная теория. Дополнение к главам 5 и 6 в книге А. Пуанкаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями». Гостехиздат, 1947.
[82] Леонтович Е. А., Майер А. Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории. ДАН СССР 103, 557 (1955).
[83] Леонтович М. А. Статистическая физика. Гостехиздат, 1944.
[84] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892; Гостехиздат, 1950.
[85] Майер А. Г. Исследование уравнений Релея и Ван-дер-Поля. Изв. ГГУ, вып. 2 (1936).
[86] Майер А. Г. К теории связанных колебаний двух самовозбуждающихся генераторов. Уч. зап. ГГУ, вып. 2, стр. 3 (1935).
[87] Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1949.
[88] Мандельштам Л. И. Вопросы электрических колебательных систем и радиотехники. Сб. «Первая Всесоюзная конференция по колебаниям», т. 1, стр. 5, ГТТИ, 1933.
[89] Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д., Андронов А. А., Витт А. А., Горелик Г. С., Хайкин С. Э. Новые исследования нелинейных колебаний. Радиоиздат, 1936.
[90] Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. Об обосновании одного метода приближенного решения дифференциальных уравнений. ЖЭТФ 4, 117 (1934).
[91] Меерович Л. А., Зеличенко Л. Г. Импульсная техника. Совradio, М., 1953.
[92] Мигулин В. В., Левитас Д. М. О работе блокинг-генератора. ЖТФ 17, вып. 10 (1947).

[93] Мищенко Е. Ф. Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных. Изв. АН СССР (сер. матем.) 21, 627 (1957).

[94] Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С. Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным. ДАН СССР 102, 889 (1955).

[95] Неймарк Ю. И. Устойчивость линеаризованных систем. Л., 1949.

[96] Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1949.

[97] Нетушил А. В. К вопросу о «скачках» в нелинейных системах. ЖТФ 15, 873 (1945).

[98] Никольский Г. Н. К вопросу об автоматической устойчивости корабля на заданном курсе. Труды Центральной лаборатории проводной связи. вып. 1 (1934).

[99] Основы автоматического регулирования. Сб. под ред. Солодовникова В. В. Машгиз, 1954.

[100] Папалекси Н. Д. О некоторых современных проблемах в теории колебаний. УФН 11, 185 (1931).

[101] Папалекси Н. Д., Андронов А. А., Горелик Г. С., Рытов С. М. Некоторые исследования в области нелинейных колебаний, проведенные в СССР, начиная с 1935 г. УФН 33, 335 (1947).

[102] Петров В. В., Уланов Г. М. Теория двух простейших релейных систем авторегулирования. Автоматика и телемеханика 11, 289 (1950).

[103] Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1952.

[104] Б. Ван-дер-Поль. Нелинейная теория электрических колебаний. Связьтехиздат, 1935.

[105] Понтрягин Л. С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. Изв. АН СССР (сер. матем.) 21, 605 (1957).

[106] Понтрягин Л. С., Андронов А. А., Витт А. А. О статистическом рассмотрении динамических систем. ЖЭТФ 3, 165 (1933); Собрание трудов А. А. Андронова, стр. 142. Изд. АН СССР, 1956.

[107] Понтрягин Л. С. О динамических системах, близких к гамильтоновым. ЖЭТФ 4, 883 (1934).

[108] Пуанкаре А. О кривых определяемых дифференциальными уравнениями. Гостехиздат, 1947.

[109] Ржевкин С. Н., Введенский Б. А. Прерывистый триодный генератор, его теория и применения. Телегр. и телеф. без проводов, № 11, 67 (1921).

[110] Рунге К. Графические методы математических вычислений. ГТТИ, 1932.

[111] Рытов С. М. Развитие теории нелинейных колебаний в СССР. Радио-

техника и электроника 2, 1435 (1957).
[112] Скибарко А. П., Стрелков С. П. Качественные исследования процессов в генераторе по сложной схеме. ЖТФ 4, 158 (1938).
[113] Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1953.
[114] Стокер Д. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. ИЛ, 1952.
[115] Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. Гостехиздат, 1950.
[116] Стрелков С. П. Маятник Фроуда. ЖТФ 3, 563 (1933).
[117] Стретт Д. В. (Релей). Теория звука, т. 1, стр. 235. Гостехиздат, 1955.
[118] Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. Гостехиздат, 1952.
[119] Тихонов А. М. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Матем. сб. 31 (73). 575 (1952).
[120] Толле М. Регулирование силовых машин. Госэнергоиздат, 1951.
[121] Фельдбаум А. А. Введение в теорию нелинейных цепей. Госэнергоиздат, 1948.
[122] Фельдбаум А. А. *Простейшие релейные системы автоматического регулирования*. Автоматика и телемеханика 10, 249 (1949).
[123] Франк-Каменецкий Д. А. Механизм двухстадийного воспламенения. ЖФХ 14, 30 (1940).
[124] Франк-Каменецкий Д. А. Проблема автоколебаний в теории переменных звезд. Сб. памяти А. А. Андронова, стр. 691. Изд. АН СССР, 1955.
[125] Хайкин С. Э. Непрерывные и разрывные колебания. ЖПФ 7, вып. 6, 21 (1930).
[126] Хайкин С. Э. Автоколебательные системы. Сб. «Первая Всесоюзная конференция по колебаниям», т. 1, стр. 72. ГТТИ, 1933.
[127] Хайкин С. Э. О влиянии малых параметров на характер стационарных состояний динамической системы. ЖТФ 5, 1389 (1935).
[128] Шишелов Л. П. Механика часового механизма, ч. 1, 2, 3, Л., 1933—1937.
[129] Эльсгольц Л. Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Гостехиздат, 1954.
[130] Юзвинский В. Об автоколебаниях системы, аналогичной язычку гармонии и кларнета. ЖТФ 4, 1295 (1934).
[131] Abraham N. et Bloch E. Mesures en valeur absolue des periodes des oscillations electriques de haute frequence, Annales de Physique, Ser. 9, 12, 237 (1919).
[132] Airy C. On the Regulator of the Clock-work for effecting Uniform Movement of Equatoreales. Mem. Roy. Astr. Soc., London 11, 249 (1840); 20, 115 (1850—51).
[133] Andrade J. L'Horlogerie et Chronometrie. Paris, 1925.
[134] Appleton E. and Greaves W. On the Solution of the Representative

Differential Equation of the Triode Oscillator. Phil. Mag., Ser. 6, **45** (1923).

[135] Appleton E. and van der Pol B. On a type of oscillation—hysteresis in a simple triode generator. Phil. Mag., Ser. 6 **43** 177 (1922).

[136] Barkhausen H. Die Vakuumröhre und ihre technische Anwendung. Jahrbuch d. drahtl. Telegraphie **14**, 27 (1919); **16**, 82 (1920).

[137] Bendixson I. Sur les courbes definies par des equations differentielles, Acta Math. **24**, 1 (1901).

[138] Bieberbach L. Theorie der Differentialgleichungen. Berlin, J. Springer, 1930.

[139] Birkhoff G. Quelques theoremes sur les mouvements des systemes dynamiques. Bull. Soc. Math. de France, 40 (1912).

[140] Bowschewerow V. Experimentelle Untersuchung des Phasenraumes autoschwingender Systeme. Tech. Phys. of the USSR **11**, 43 (1935).

[141] Chaikin S., Lochakov L. Oscillations «discontinues» dans un circuit a capacite et self-induction. Tech. Phys. of the USSR 11, 181 (1935).

[142] Cholodenko L. Zur Theorie der Frühaufschen Kipp-Schaltung. Tech. Phys. of the USSR **2**, 552 (1935).

[143] Le Corbeiller P. Les systemes auto-entretenues et les oscillations de relaxation. Paris, Hermann, 1931.

[144] Le Corbeiller P. La mechanisme de la production des oscillations. Annales des Postes, Telegraphes et Telephones **21**, 697 (1932).

[145] Debaggis L. Contributions of the Theory of Nonlinear Oscillations. Prinston, 1952; русск. перевод: УМН **10**, вып. 4, 66 (1955).

[146] Decaux et Corbeiller P. Sur une systeme electrique autoentretenues, utilisant un tube a neon. Comp. Rend. **193**, 723 (1931).

[147] Dulac H. Sur les cycles limites. Bull. Soc. Math. de France **51** (1923).

[148] Dulac H. Recherche des cycles limites. Comp. Rend. **204**, 23 (1937).

[149] Fatou P. Sur le mouvement d'un systeme soumis a des forces a courte periode. Bull. Soc. Math. de France **56**, 98 (1928).

[150] Friedländer E. Steurungsvorgänge durch «Feldzerfall» und Kippschwingungen in Elektronenröhren, Zts. f. tech. Phys. **7**, 481 (1926).

[151] Friedländer E. Über Stabilitätbedingungen und ihre Abhängigkeit von Steuerorganen und Energie-Speichern. Phys. Zts. **27**, 361 (1926).

[152] Friedländer E. Ueber Kippschwingungen, insbesondere bei Elektronenröhren. Arch. f. Elektrotech. **17**, 1, 103 (1927).

[153] Friedländer E. Einige Berichtungen und Ergänzungen zum Problem der Kippschwingungen. Arch. f. Elektrotech. **20**, 158 (1928).

[154] Frommer M. Singuläre Punkte. Math. Ann. **99** (1928).

[155] Frühauf G. Eine neue Schaltung zur Erzeugung von Schwingungen mit linearem Spannungsverlauf. Arch. f. Elektrotech. **21**, 471 (1929).

[156] Haag J. Sur les oscillations auto-entretenues. Comp. Rend. **199**, 906

(1934).

[157] Haag J. Sur l'etude asymptotiques des oscillations de relaxation. Comp. Rend. **292**, 102 (1936).

[158] Haag J. Etude asymptotique des oscillations de relaxation. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **60** (1943).

[159] Haag J. Examples concrets d'etude asymptotique d'oscillations de relaxation. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **61** (1944).

[160] Den Hartog. Mechanical Vibrations. Mc Graw-Hill Comp., New York and London, 1947.

[161] Heegner K. Ueber Schwingungserzeugung mittels eines Elektronenröhrensystem, welche Selbstinduction nicht erhalten. Zts. f. Hochfrequenztechnik **29**, 151 (1927).

[162] Heegner K. und Watanabe I. Ueber Schwingungerzeugung mittels eines Elektronenröhrensystem, bei welchem die Kapazität von untergeordneter Bedeutung ist. Zts. f. Hochfrequenztechnik **34**, 49 (1929).

[163] Hopf E. Zwei Sätze über den wahrscheinlichen Verlauf der Bewegung dynamischen Systeme. Math. Ann. **103**, Heft 4—5.

[164] Hull. Das Dynatron, ein Vakuumröhre mit der Eigenschaft des negativen elektrischen Widerstandes. Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie **14**, **47**, 157 (1919).

[165] Iobst G. Drei Beiträge über Schwingungserzeugung. Telefunken Zeitung, No. 47, **11** (1927).

[166] Ikonnikov E. On the dynamics of symmetrical flight of an aeroplane. Tech. Phys. of the USSR **4**, No. 6, 1 (1937).

[167] Kamke E. Differentialgleichungen Reeler Funktionen. Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft, 1930.

[168] Koenigs. Recherches sur les substitutions uniformes. Bulletin des Sciences mathematiques, 1883.

[169] Koenigs. Recherches sur les equations fuctionelles. Annales de l'Ecole Norm., 1884.

[170] Krüger. Mechanische Schwingungssysteme mit Stossanregung. Annalen der Physik **70**, 291 (1923).

[171] Lanchester F. Aerodonetics, London, 1908.

[172] Leaute H. Sur les oscillations a longues periodes dans les machines actinnees par des moteurs hydrauliques et sur les moyens de prevenir ces oscillations. Jour. de l'Ecole Polytechnique **55**, 1 (1885).

[173] Levinson N. Perturbations of discontinuous solutions of nonlinear differential equations. Acta Math. **82**, 71 (1951).

[174] Lienard A. Etude des oscillations entretenues. Revue Generale d'Electricite **23**, 901, 946 (1928).

[175] Lotka. Elements of Physical Biology. Baltimore, 1925.

[176] Mayer A. On the theory of Coupled Vibrations of Two Self-Excited Generators. Tech. Phys. of the USSR **2**, No. 5, 1 (1935).

[177] Mayer A. A Contribuyion to the Theory of Forced Oscillations

in a Generator with Two Degrees of Freedom. Tech. Phys. of the USSR 3, No. 12, 1 (1936).
[178] Möller H. Quantitative Behandlung der Schwingungen im Röhren generator mit Hilfe der Schwingkennlinien. Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie 14, 326 (1919).
[179] Ollendorf F. und Peters W. Schwingungsstabilität Parallelarbeiten der Synchronmaschinen. Wissenschaftlichen Veröffentlichungen aus dem Simens-Konzern 5 (1926).
[180] Papalexi N. Theorie des Elektronenröhrengenerator. Odessa, 1922.
[181] Poincare H. Oeuvres, Vol. 1. Paris, Gauthier-Villars, 1928.
[182] Poincare H. Sur l'equilibre d'une masse fluide animee d'un mouvement de rotation. Acta Mathematica 7 (1885).
[183] Poincare H. Figures d'equilibre d'une masse fluide. Paris, 1903.
[184] Poincare H. Sur le probleme de trois corps et les equations de la dynamiques. Acta Mathematica 13 (1890).
[185] Poincare H. Les methodes nouvelles de la mecanique celeste. Paris, Gauthier-Villars, 1892—1899.
[186] Van der Pol B. A theory of the amplitude of free and forced triode vibration. Radio Review 1, 701 (1920).
[187] Van der Pol B. An Oscillation-Hysteresis in a Triode-Generator. Phil. Mag. 43, 177 (1922).
[188] Van der Pol B. On relaxation oscillation. Phil. Mag. (7) 2, 978 (1926).
[189] Van der Pol B. Ueber Relaxationschwingungen. Zts. f. Hochfrequenztechnik 28, 178 (1926); 29, 114 (1927).
[190] Van der Pol B. Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance. Phil. Mag. (7) 3, 65 (1927).
[191] Van der Pol B. Oscillations sinusoidales et de relaxation. L'Onde electrique, 1930.
[192] Van der Pol B. et van der Mark M. Le battement du coeur considere comme oscillation de relaxation et un modele electrique de coeur. L'Onde electrique 7, 365 (1928).
[193] Robb A. On a graphical solution of a class of differential equation occuring in wireless telegraphy. Phil. Mag. (6) 43, 700 (1922).
[194] Rukop H. Reissdiagramme von Senderröhren, Telefunken Zeitung 6, Juni 1923, 27; September 1923, 20.
[195] Rukop H. Reissdiagramme von Senderröhren. Zts. f. techn. Physik 5, 260, 299, 387, 441, 569 (1924).
[196] La Salle J. Relaxation oscillations. Quart. of Appl. Math. 7, 1 (1949).
[197] Schunk H., Zenneck I. Ueber Schwingungskreise mit Eisenkernspulen. Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie 19, 170 (1922).
[198] Tricomi F. Integrazione di un'equazione differenziale presantatasi in electrotechnica. Annali della R. Scuola Normale Superiore di

Pisa, Ser. 11, 2, 1 (1933).
[199] Volterra V. Leçons sur la Theorie Mathematique de la Lutte pour la Vie. Paris, Gauthier-Villars, 1931.
[200] Wagner K. Der Lichtbogen als Wechselstromerzeuger. Leipzig, Verl. S. Hirzel, 1910.
[201] Webb H., Becker G. Theory of Multivibrator. Journ. Appl. Physics 15, 825 (1944).